Datenkompression (Rote), SS 2003, 8. Übungsblatt
Abgabe: bis Montag, 23. 6. 2003

32. Kompression nach LZW (Ziv-Lempel und Welch) (8 Punkte)

    (a) Dekodieren Sie die Folge

    1 2 4 3 1 4 9 5 8 12 2

    mit einem Wörterbuch, das am Anfang die Buchstaben a, b, c enthält.

    (b) Kodieren Sie die Nachricht *abababacccdccdccdca* über dem Alphabet a, b, c, d.

33. (7 Punkte) Zeigen Sie, dass für die N-te Einheitswurzel $\omega = e^{2\pi i/N} = \cos \frac{2\pi}{N} + i \sin \frac{2\pi}{N}$ und $k \in \mathbb{Z}$ folgende Beziehung gilt:

$$\sum_{j=0}^{N-1} \omega^{jk} = \begin{cases} N, & \text{falls } k \text{ ein Vielfaches von } N \text{ ist,} \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

    (Hinweis: Die Summe ist eine geometrische Reihe.)

34. Fouriertransformation (15 Punkte, wird als Programmieraufgabe bewertet)

    (a) Berechnen Sie die diskrete Fouriertransformation für folgende Vektoren

        i. $(2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9)$
        ii. $(5, 2, -1, -2, -2, 0, 2, 4)$
        iii. $(2, 0, 2, 0, 2, 0, 2, 0)$

    (b) Setzen sie alle Fourierkoeffizienten bis auf die k Fourierkoeffizienten mit dem größten Betrag auf 0, und berechnen Sie vom Ergebnis die inverse Fouriertransformation, für $k = 1, 2, 3$.

    (c) Vergleichen Sie das Resultat mit den ursprünglichen Daten. Für welche Werte von k bekommt man eine gute Annäherung?

35. (0 Punkte) Redundanz eines Kodes.

    Die *bedingte Entropie* h_k in einem inneren Knoten k eines vollständigen Kodebaumes mit Gewicht p und Kindern mit Gewichten p_1 und p_2 ($p_1 + p_2 = p$) ist $H(p_1/p, p_2/p)$.

    durch Induktion. Die Entropie ist

$$H(p_1, \ldots, p_k) = \sum_k p_k h_k,$$

    wobei die Summation über alle inneren Knoten k des Baumes läuft.

    Das Gewicht (die gewichtete mittlere Kodelänge) ist

$$E[l_i] = \sum_{i=1}^{n} p_i l_i = \sum_k p_k h_k,$$

    wobei die Summation über alle inneren Knoten k des Baumes läuft.

    Die *lokale Redundanz* in einem inneren Knoten k ist $r_k := p_k(1 - h_k)$.

$$E[l_i] - H(p_1, \ldots, p_k) = \sum_k r_k,$$

    Unter welchen Bedingungen ist dieser Ausdruck null?