

Tag 6 – Aufgaben fürs Tutorium



Lernziele

- L3 Ihr könnt *Summen* formal darstellen, umformen und vereinfachen.
- L5 Ihr könnt Aussagen über natürlichen Zahlen mit Hilfe der *vollständigen Induktion* beweisen.
- L6 Ihr kennt den Unterschied zwischen *rekursiven* und *expliziten* Formeln.
- L7 Ihr könnt *explizite Darstellungen* von rekursiven Formeln nachweisen.
- L8 Ihr kennt grundlegende Eigenschaften von *Funktionen*.
- L9 Ihr bestimmt *Faktorisierungen* von Polynomen.

1. Summ-Summ

Vereinfache den folgenden Term, sodass kein Summensymbol mehr auftritt:

$$\left(\sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{(i+1)(i+2)} \right) \cdot \left(\sum_{i=2}^{n+1} i(i-1) - \sum_{i=-2}^{n-3} (i+3)^2 \right)$$

Benutze sinnvolle Indexshifts, den Kleinen Gauß und die folgende Formel:

$$\sum_{i=1}^n \frac{1}{i(i+1)} = \frac{n}{n+1}$$

2. Vollständige Induktion

Beweise mit Hilfe der vollständigen Induktion für alle $n \in \mathbb{N}^+$:

$$\sum_{i=1}^n i \cdot 2^i = (n-1) \cdot 2^{n+1} + 2 \quad \text{und} \quad 6 \text{ ist ein Teiler von } 3^n - 3$$

Gelten die beiden Aussagen auch für $n = 0$?

3. Abbildungen

Welche der folgenden Zuordnungen sind Abbildungen? (Begründung!)

- a) Jedem Menschen werden alle seine Freunde zugeordnet.

- b) Jedem Menschen wird dessen Mutter zugeordnet.
- c) Jeder Mutter wird deren Mutter zugeordnet.
- d) Jedem Menschen wird der Wochentag seiner Geburt zugeordnet.

Definiere für die Abbildungen den Definitions- und Wertebereich (wählen dabei aus folgenden Alternativen: M_1 = Menge der Menschen, M_2 = Menge der Mütter und $M_3 = \{Mo, Di, Mi, Do, Fr, Sa, So\}$). Sind diese Abbildungen injektiv, surjektiv oder bijektiv? (Begründung!)

4. Polynomdivision

Faktorisier die beiden folgenden Polynome. Nutze die Polynomdivision als Hilfsmittel. Beide Polynome besitzen 3 und -1 als Nullstellen.

$$p(x) = 4x^4 - 8x^3 - 8x^2 - 8x - 12 \quad q(x) = -2x^4 + 4x^3 + 10x^2 - 8x - 12$$

5. Rekursion

Zeige, dass für $f(1) := 2$ und $f(n+1) := 2 - \frac{1}{f(n)}$ folgende Gleichung gilt: $f(n) = \frac{n+1}{n}$.

6. Russels Paradoxon

In einem Dorf gibt es einen Barbier, für den gilt: Der Barbier rasiert genau diejenigen, die sich nicht selbst rasieren.

Frage: Wer rasiert den Barbier?

Link zum Brückenkurs:

<https://page.mi.fu-berlin.de/willerma/brueckenkurs>
