Tag 3 – Aufgaben fürs Tutorium

Lernziele

L1 Ihr könnt *Wahrheitstafeln* zusammengesetzter Aussagen bestimmen und überprüfen, ob gegebene Aussageformen *äquivalent* sind.

L2 Ihr könnt *Mengen* in ZF-Notation beschreiben und Aussagen mit Hilfe von *Quantoren* formalisieren und negieren.

L3 Ihr könnt *Summen* formal darstellen, umformen und vereinfachen.

L4 Ihr kennt einfache *Summenformeln* und *-regeln* und könnt diese benennen.

1. **Terme vereinfachen**

   Vereinfache die folgenden Terme. *Benenne* die verwendeten Gesetze.

   $t_1 = \neg(\neg x \vee y) \vee ((x \wedge y) \wedge ((x \wedge y) \vee \neg z))$

   $t_2 = (y \vee \neg z) \wedge \neg(\neg y \wedge z \wedge (x \vee y))$

   Überprüfe bei t_2 dein Ergebnis mit einer Wahrheitstabelle.

2. **Quantoren**

   Negiere die folgenden Aussagen und *wandle* die Aussagen (sowohl die negierte als auch die nicht-negierte) in sprachliche Sätze *um*.

   a) $\forall z \in \mathbb{N}_0 \exists x \in \mathbb{N}_0 \exists y \in \mathbb{N}_0 : x \cdot y = z$

   b) $\forall z \in \mathbb{Z} \exists x \in \mathbb{Z} \forall y \in \mathbb{Z} : x \cdot y = z$

   Beschreibe die folgenden Aussagen mit jeweils einem Satz und begründe, ob die Aussage wahr ist.

   a) $\forall x \in \mathbb{Z} \exists y \in \mathbb{Z} : x \geq y$

   b) $\exists y \in \mathbb{Z} \forall x \in \mathbb{Z} : x \geq y$

   c) $\forall x \in \mathbb{Z} \forall y \in \mathbb{Z} : x \geq y$

   d) $\exists x \in \mathbb{Z} \exists y \in \mathbb{Z} : x \geq y$

   Was könnt ihr über das Vertauschen der Reihenfolge von Quantoren sagen? Wann dürfen wir das? Wann dürfen wir das nicht? Formuliert euch eine Merkregel.

3. **Mengen**

Gib vereinfachte Darstellungen folgender Mengen an.

$$M_1 = \{x \in \mathbb{R} \mid x \in \mathbb{N}_0 \wedge x \text{ ist Vielfaches von } 5 \wedge x < 42\}$$
$$M_2 = \mathbb{Z} \cap \{2 \cdot x \mid x \in \mathbb{R} \wedge \text{erste Nachkommastelle von } x \text{ ist } 0\}$$
$$M_3 = M_1 \setminus M_2$$
$$M_4 = \{q \in \mathbb{Q} | \exists m \in \mathbb{N}_0 \; \exists n \in \mathbb{N}_0 \; m \leq n \wedge q = m/n\}$$

4. **Summen vereinfachen**

Vereinfache die folgenden Summen und gib eine geschlossene Formel (d.h. ohne Summenzeichen) an. Nutze zuerst Indexshifts, damit alle Summen bei $i = 0$ beginnen und verwende anschließend das Partitionsgesetz. Testet danach eure geschlossene Formel jeweils mit $n = 3$. ;-)

$$T_1 = \sum_{i=4}^{n+4} 3(i-4) + 2 \cdot \sum_{i=1}^{n+1} (i-1)^3 - \sum_{i=-2}^{n-2} (i+2)^3 + \sum_{i=0}^{n} i(4-i^2)$$
$$T_2 = 3 \cdot \left(\sum_{i=5}^{n+4} 6 \cdot 2^{i-5} - \sum_{i=2}^{n+1} 3 \cdot 2^{i-2} - \sum_{i=-2}^{n-3} (i+2)^2 - \sum_{i=0}^{n-1} (2^i - i^2) \right)$$

5. **Domino-Schach**

Stellen wir uns ein 8x8-Schachbrett vor. Dieses Schachbrett wollen wir nun mit Dominosteinen abdecken, dabei deckt ein Dominostein jeweils genau zwei waagerecht oder senkrecht benachbarte Felder ab. *Skizziere* eine Möglichkeit, das Schachbrett vollständig mit Dominosteinen abzudecken. und begründe anschließend folgende Aussage: Wenn man zwei diagonal gegenüberliegende Eckfelder in einem Schachbrett ausschneidet, kann man das (restliche) Brett nicht mehr vollständig mit den Dominosteinen abdecken.

Link zum Brückenkurs:
`https://page.mi.fu-berlin.de/willerma/brueckenkurs`
