Mathematik für (Bio-)Informatik

Formelsammlung

Max Willert

Brüche

Seien a, b, c, d reell oder komplex, $b \neq 0$, $d \neq 0$.

$$\frac{a}{b} \pm \frac{c}{d} = \frac{ad \pm bc}{bd} \qquad \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd} \qquad \frac{\frac{a}{b}}{\frac{d}{c}} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d} \qquad \frac{d \cdot a}{d \cdot b} = \frac{a}{b}$$

Lösung quadratischer Gleichungen

Seien a, b, c, p, q reell oder complex, $a \neq 0$.

$$ax^2 + bx + c = 0 \qquad x^2 + px + q = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \qquad x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$$

Betragsungleichungen

Seien x, y reell.

$$|x| \geq y \iff x \leq -y \vee y \leq x$$
$$|x| > y \iff x < -y \vee y < x$$
$$|x| \leq y \iff -y \leq x \wedge x \leq y$$
$$|x| < y \iff -y < x \wedge x < y$$

Potenzgesetze

Seien a, b reell und positiv, x, y reell oder komplex.

$$a^{x+y} = a^x \cdot a^y \qquad a^{x-y} = \frac{a^x}{a^y} \qquad a^{x \cdot y} = (a^x)^y \qquad a^{\frac{x}{y}} = \sqrt[y]{a^x} \qquad a^{-x} = \frac{1}{a^x}$$

$$(a \cdot b)^x = a^x \cdot b^x \qquad \left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{a^x}{b^x} \qquad \sqrt[y]{a} \cdot \sqrt[y]{b} = \sqrt[y]{a \cdot b} \qquad \frac{\sqrt[y]{a}}{\sqrt[y]{b}} = \sqrt[y]{\frac{a}{b}} \qquad a^0 = 1$$

Logarithmengesetze

Seien a, b, c reell und positiv, x reell.

$$\log_c(a \cdot b) = \log_c(a) + \log_c(b) \qquad \log_c\left(\frac{a}{b}\right) = \log_c(a) - \log_c(b) \qquad \log_c(a^x) = x \cdot \log_c(a)$$

$$\log_c(1/a) = -\log_c(a) \qquad \log_c(a) = \frac{\log_b(a)}{\log_b(c)} \qquad \log_c(c^x) = x$$

$$a = c^{\log_c(a)} \qquad \log_c(c) = 1 \qquad \log_c(1) = 0$$

Summengesetze

Seien n, m, s ganzzahlig, a_k, b_k, c, q, a_{ij} reell oder komplex.

$$\sum_{k=m}^{n} a_k = 0 \text{ für } m > n \qquad \sum_{k=m}^{n} 1 = n - m + 1$$

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n \cdot (n+1)}{2} \qquad \sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{q^{n+1} - 1}{q - 1} \text{ für } q \neq 1$$

$$\sum_{k=m}^{n} (c \cdot a_k) = c \cdot \sum_{k=m}^{n} a_k \qquad \sum_{k=m}^{n} (a_k + b_k) = \sum_{k=m}^{n} a_k + \sum_{k=m}^{n} b_k$$

$$\sum_{k=m}^{n} a_k = \sum_{k=m}^{n} a_{n+m-k} \qquad \sum_{k=m-s}^{n-s} a_{k+s} = \sum_{k=m}^{n} a_k = \sum_{k=m+s}^{n+s} a_{k-s}$$

$$\sum_{k=m}^{n} a_k = \sum_{k=m}^{s} a_k + \sum_{k=s+1}^{n} a_k \qquad \sum_{k=m}^{n} (a_{k+1} - a_k) = a_{n+1} - a_m$$

$$\sum_{i=k}^{n} \sum_{j=\ell}^{m} a_{ij} = \sum_{j=\ell}^{m} \sum_{i=k}^{n} a_{ij} \qquad \left(\sum_{i=k}^{n} a_i\right) \cdot \left(\sum_{j=\ell}^{m} b_j\right) = \sum_{i=k}^{n} \sum_{j=\ell}^{m} a_i b_j$$

Binomialkoeffizient

Seien n, k natürliche Zahlen.

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n \qquad 0! = 1 \qquad \binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1 \qquad \binom{n}{1} = n \qquad \binom{n}{k} = 0 \text{ für } k > n$$

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} \qquad \binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1} \qquad \binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

Binomische Formeln und Binomischer Satz

Seien n natürliche Zahl, a, b reell oder komplex.

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \qquad (a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2 \qquad (a+b)(a-b) = a^2 - b^2$$

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

Symmetrien und Phasenverschiebungen

Sei x reell.

$$\begin{aligned}
\sin(x) &= -\sin(-x) = -\sin(x+\pi) = \sin(x+2\pi)\\
\cos(x) &= \cos(-x) = -\cos(x+\pi) = \cos(x+2\pi)\\
\tan(x) &= -\tan(-x) = \tan(x+\pi)\\
\cot(x) &= -\cot(-x) = \cot(x+\pi)\\
\sin(x) &= \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) \qquad \cos(x) = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)\\
\tan(x) &= -\cot\left(x - \frac{\pi}{2}\right) \qquad \cot(x) = -\tan\left(x - \frac{\pi}{2}\right)
\end{aligned}$$

Additionstheoreme

Seien x, y reell.

$$\sin(x \pm y) = \sin x \cos y \pm \cos x \sin y \qquad \cos(x \pm y) = \cos x \cos y \mp \sin x \sin y$$

$$\sin(2x) = 2 \sin x \cos x \qquad \cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x$$

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

Komplexe Zahlen

Seien n natürliche Zahl, a, b, x, r reell, $r \geq 0$, $-\pi < \varphi \leq \pi$ und i die imaginäre Einheit.

$$\mathrm{i}^2 = -1 \qquad \mathrm{e}^{\mathrm{i}\cdot x} = \cos x + \mathrm{i} \cdot \sin x \qquad \sqrt[n]{r \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}} = \left\{ \sqrt[n]{r} \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\varphi + 2k\pi}{n}} \mid k = 0 \ldots n-1 \right\}$$

Für die Umwandlung der Darstellungen $a + ib = r \cdot \mathrm{e}^{i\varphi}$ gilt:

$$a = r \cos\varphi \qquad b = r \sin\varphi \qquad r = \sqrt{a^2 + b^2} \qquad \varphi = \begin{cases} \arccos \frac{a}{r} & b \geq 0 \\ -\arccos \frac{a}{r} & \text{sonst} \end{cases}$$

Boolesche Terme

Seien s, t und r Boolesche Terme.

Assoziativität:	$(s \wedge t) \wedge r$	$\equiv$	$s \wedge (t \wedge r)$
	$(s \vee t) \vee r$	$\equiv$	$s \vee (t \vee r)$
Kommutativität:	$s \wedge t$	$\equiv$	$t \wedge s$
	$s \vee t$	$\equiv$	$t \vee s$
Distributivität:	$s \wedge (t \vee r)$	$\equiv$	$(s \wedge t) \vee (s \wedge r)$
	$s \vee (t \wedge r)$	$\equiv$	$(s \vee t) \wedge (s \vee r)$
Idempotenz:	$s \wedge s$	$\equiv$	s
	$s \vee s$	$\equiv$	s
Dominanz:	$s \wedge 0$	$\equiv$	0
	$s \vee 1$	$\equiv$	1
Neutralität:	$s \wedge 1$	$\equiv$	s
	$s \vee 0$	$\equiv$	s
Absorption:	$s \wedge (s \vee t)$	$\equiv$	s
	$s \vee (s \wedge t)$	$\equiv$	s
deMorgansche Regel:	$\neg(s \wedge t)$	$\equiv$	$\neg s \vee \neg t$
	$\neg(s \vee t)$	$\equiv$	$\neg s \wedge \neg t$
Komplementierung:	$s \wedge \neg s$	$\equiv$	0
	$s \vee \neg s$	$\equiv$	1
Involution	$\neg\neg s$	$\equiv$	s
Implikationsregel	$s \to t$	$\equiv$	$\neg s \vee t$
Kontraposition	$s \to t$	$\equiv$	$\neg t \to \neg s$
Äquivalenzregel	$s \leftrightarrow t$	$\equiv$	$(s \to t) \wedge (t \to s)$
Antivalenzregel	$s \dot{\vee} t$	$\equiv$	$\neg(s \leftrightarrow t)$

Matrizen

Seien A, B Matrizen mit jeweils passenden Dimensionen, n, i, j, p, q natürliche Zahlen, E_n Einheitsmatrix.

$$(A+B)^T = A^T + B^T \qquad (AB)^T = B^T A^T \qquad (A^T)^T = A \qquad (AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$$

$$A^0 = E_n \qquad A^{-q} = (A^{-1})^q \qquad A^{p+q} = A^p A^q \qquad \det(AB) = \det(A)\det(B) \qquad \det(E_n) = 1$$

$$\det(A) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det(A_{ij}) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det(A_{ij}) \qquad \det(A^T) = \det(A)$$

Wichtige Grenzwerte

Seien x, q reell oder komplex.

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1 \qquad \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \qquad e^x = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \qquad \lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \qquad \sin(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!} \qquad \cos(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{1}{1-q} \quad \text{für } -1 < q < 1 \qquad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = \infty$$