Wolfgang Rautenberg

Berlin

Einführung in die Mathematische Logik

Ein Lehrbuch für Mathematiker und Informatiker

Dritte überarbeitete Auflage

Satz und Layout: Der Autor

Fassung 2008

Zum Geleit

von Lev Beklemishev, Utrecht

Das Gebiet der Mathematischen Logik – entstanden bei der Begriffsklärung von logischer Gültigkeit, Beweisbarkeit und Berechenbarkeit – wurde in der ersten Hälfte des vorigen Jahrhunderts von einer Reihe brillianter Mathematiker und Philosophen geschaffen, wie Frege, Hilbert, Gödel, Turing, Tarski, Mal'cev, Gentzen, und einigen anderen. Die Entwicklung dieser Disziplin wird als eine der größten Errungenschaften der Wissenschaft des 20. Jahrhunderts diskutiert: Sie dehnte die Mathematik in einen bislang unbekannten Bereich von Anwendungen aus, unterwarf logisches Schließen und Berechenbarkeit einer rigorosen Analyse, und führte schließlich zur Entwicklung des Computers.

Das Lehrbuch von Professor Wolfgang Rautenberg ist eine gut geschriebene Einführung in diesen schönen und zusammenhängenden Gegenstand. Es enthält klassisches Material wie logische Kalküle, die Anfänge der Modelltheorie und Gödels Unvollständigkeitssätze, ebenso wie einige von Anwendungen her motivierte Themen wie ein Kapitel über Logikprogrammierung. Der Autor hat große Sorgfalt darauf verwendet, die Darstellung lesbar und umfassend zu gestalten; jeder Abschnitt wird von einer guten Auswahl von Übungen begleitet.

Ein besonderes Lob ist dem Autor für die Darstellung des Zweiten Gödelschen Unvollständigkeitssatzes geschuldet, in welcher es dem Autor gelang, einen relativ einfachen Beweis der Ableitungsbedingungen und der beweisbaren Σ_1-Vollständigkeit zu geben; ein technisch diffiziler Punkt, der in Lehrbüchern vergleichbaren Niveaus gewöhnlich ausgelassen wird. Dieses Lehrbuch kann allen Studenten empfohlen werden, die die Grundlagen der Mathematischen Logik erlernen wollen.

Vorwort

zur 3. Auflage

Die dritte Auflage unterscheidet sich von der zweiten nicht nur in der Korrektur von Druckfehlern sondern in zahlreichen sachlichen und stilistischen Änderungen, verbesserten Beweisen und Übungen. Das Buch dürfte dadurch für den Anfänger noch leichter lesbar sein. Auch Stichwort- und Literaturverzeichnis wurden vollständig revidiert und eine historisch orientierte Einleitung wurde hinzugefügt.

Das Buch wendet sich an Studenten und Dozenten der Mathematik oder Informatik, und wegen der ausführlich diskutierten Gödelschen Unvollständigkeitssätze, die ja von hohem erkenntnistheoretischem Interesse sind, auch an Fachstudenten der Philosophischen Logik. Es enthält in den ersten drei Kapiteln den Stoff einer einsemestrigen Vorlesung über Mathematische Logik, die sowohl für den Masterstudiengang als auch den Bachelor-Studiengang geeignet ist. Das 1. Kapitel beginnt mit Elementen der Logik, wie sie für die Grundlagenphase des Bachelor-Studiums verlangt werden, und es enthält zu Beginn des 2. Kapitels das Wichtigste über algebraische und relationale Strukturen, Homomorphismen und Isomorphismen, was zur Aufbauphase eines wie auch immer gearteten Mathematikstudiums gehören sollte. Eine wie in **3.4** geführte Diskussion der Axiomatik der Mengenlehre ist zwar grundlagentheoretisch wichtig, hängt aber von den Zielen der Einführungsvorlesung ab.

Nicht alles über den Gödelschen Vollständigkeitssatz (Kapitel **3**) muss den Bachelor-Studenten vorbewiesen werden. Es genügt, den aussagenlogischen Kalkül zu behandeln und die nötigen Schritte einer Erweiterung auf die Prädikatenlogik nur zu beschreiben. Die letzten Abschnitte von Kapitel **3** befassen sich mit Anwendungen der Vollständigkeit und haben teilweise beschreibenden Charakter, mit Ausblicken auf aktuelle Themen wie z.B. die automatische Beweisverifikation.

Das Buch enthält auch das Basismaterial für eine Vorlesung *Logik für Informatiker*, über die weiter unten gesprochen wird, in Kapitel **5** das Material für eine die Logik fortsetzende Vorlesung *Modelltheorie* und in Kapitel **6** für eine Vorlesung *Rekursionstheorie* mit Anwendungen auf Entscheidungsprobleme.

Das Buch kann ganz unabhängig von Vorlesungen aber auch zum Selbststudium genutzt werden. Nicht zuletzt deshalb wurden Stichwort- und Symbolverzeichnis recht ausführlich verfasst und vor Beginn des Haupttextes ein Abschnitt *Notationen* eingefügt. Für den Großteil der Übungen gibt es Lösungshinweise in einem gesonderten Abschnitt am Ende des Buches. Außer einer hinreichenden Schulung im logischen Schließen sind spezielle Vorkenntnisse nicht erforderlich; lediglich für Teile von Kapitel **5** sind algebraische Grundkenntnisse nützlich, und für den letzten Abschnitt in Kapitel **7** gewisse Kenntnisse über Modelle der Mengenlehre.

Stil und Darstellung wurden in den ersten drei Kapiteln breit genug gehalten, so dass auch der Student noch vor dem Einstieg in eine Spezialdisziplin den Stoff durchaus selbstständig bewältigen kann. Ab Kapitel 4 steigen die Anforderungen allmählich, die man am sichersten durch selbstständiges Lösen der Übungen meistert. Auch verdichtet sich von dort an etwas die Darstellung, jedoch nicht auf Kosten sprachlicher Präzision. Klarheit und angemessener Umgang mit Notationen bleiben oberstes Gebot. Der Leser sollte Bleistift und Papier zum Nachrechnen stets parat halten.

Eine Besonderheit dieser Darstellung ist die eingehende Behandlung der Gödelschen Unvollständigkeitssätze. Diese beruhen auf der Repräsentierbarkeit rekursiver Prädikate in formalisierten Theorien, die in ihrer Urform den Hauptteil der Gödelschen Arbeit [Gö2] ausmacht. Dieser Linie folgend gewinnt wir in Kapitel 6 den ersten Unvollständigkeitssatz, die Unentscheidbarkeit des Tautologieproblems der Logik nach Church und die Resultate über Nichtdefinierbarkeit des Wahrheitsbegriffs von Tarski in einem Zuge. Das letzte Kapitel ist ausschließlich dem zweiten Unvollständigkeitssatz und seinem Umfeld gewidmet. Von besonderem Interesse ist dabei, dass Fragen über selbstbezügliche Aussagen aufgrund der Solovayschen und weiterführender Vollständigkeitssätze algorithmisch entscheidbar sind.

Die Klassifikation definierender Formeln für arithmetische Prädikate wird recht frühzeitig, schon bei der Repräsentation rekursiver Prädikate in 6.3 eingeführt. Denn sie trägt in besonderem Maße dazu bei, den engen Zusammenhang zwischen Logik und Rekursionstheorie sichtbar zu machen. Weitere Unentscheidbarkeitsresultate über formalisierte Theorien werden in den Abschnitten 6.5 und 6.6 behandelt, einschließlich einer Skizze über die Lösung des 10. Hilbertschen Problems.

In Kapitel 4 werden berechenbare Funktionen in natürlicher Weise durch PROLOG-Programme präzisiert. Dies ist für Studierende der Informatik interessant, heißt dies doch einerseits, PROLOG ist eine universelle Programmiersprache, in der prinzipiell alle Algorithmen beschrieben werden können. Andererseits werden durch den Unentscheidbarkeitnachweis des Existenzproblems erfolgreicher Resolutionen in 4.4 die prinzipiellen Schwierigkeiten erklärt, die mit der Problemlösung durch Anfragen an Logik-Programme zusammenhängen. Kapitel 4 muss in einer Vorlesung für Informatiker mit Abschnitt 6.1 über Grundbegriffe der traditionellen Rekursionstheorie natürlich in Zusammenhang gebracht werden.

Kapitel 5 behandelt die Grundlagen der erst um 1950 entstandenen und inzwischen weit gefächerten Modelltheorie. Hier werden in der mathematischen Logik entwickelte Techniken mit Konstruktionstechniken anderer Gebiete zum gegenseitigen Nutzen miteinander verbunden. Durch den Einsatz weitreichender Methoden gelingt es, klassische Resultate wie die Eliminierbarkeit der Quantoren in der Theorie des reellen und der des komplexen Zahlenkörpers recht schnell zu gewinnen.

Trotz seiner Themenvielfalt umfasst dieses Buch bei weitem nicht alles was die Mathematische Logik vorzuweisen hat. Lehrbücher mit enzyklopädischem Anspruch lassen sich heute selbst für deren Teilgebiete nicht mehr verfassen. Bei der Stoffauswahl können bestenfalls Akzente gesetzt werden. Das bezieht sich vor allem auf die über elementare Dinge hinausführenden Kapitel **4**, **5**, **6** und **7**. Die Auswahl orientiert sich durchweg an Grundergebnissen der Mathematischen Logik, die mit hoher Wahrscheinlichkeit von bleibendem Bestand sind.

Wo immer dies gelang, wurden in der Literatur vorliegende Beweise vereinfacht. Philosophische und grundlagentheoretische Probleme der Mathematik ebenso wie rein beweistheoretische Aspekte werden nicht systematisch behandelt, aber diesbezügliche Fragen werden an geeigneten Stellen im Text angeschnitten, vor allem im Zusammenhang mit den Gödelschen Sätzen. Wir haben uns dabei bemüht, einem Auseinanderdriften von Modell- und Beweistheorie entgegen zu wirken.

Es gibt in diesem Buche keine Formeltrennungen im fließenden Text. Dies kommt nicht nur dem Schriftbild zugute sondern auch einem unbehinderten Informationsfluß. Bemerkungen im Kleindruck enthalten in der Regel weiterführende Informationen oder verweisen auf das Literaturverzeichnis, das angesichts der Literaturfülle nur eine Auswahl repräsentieren kann. Die Einträge im Literaturverzeichnis sind alphabetisch nach ihren beim Zitieren verwendeten Kürzeln sortiert.

Die sieben Kapitel des Buches sind in Abschnitte gegliedert. Eine Referenz wie z.B. **4.5** bedeutet Kapitel **4**, Abschnitt **5** und Satz 4.5 meint den Satz Nr. 5 in Abschnitt **4** eines gegebenen Kapitels. Bei Rückbezug auf diesen Satz in einem anderen Kapitel wird die Kapitelnummer hinzugefügt. So ist Satz 6.4.5 beispielsweise Satz 4.5 in Kapitel **6**.

Auf der Website `www.math.fu-berlin.de/~raut` finden sich weitere Informationen zu dem Buch und zu verwandten Themen, z.B. Mengenlehre. Für hilfreiche Kritik danke ich zahlreichen Kollegen und Studenten; die Namensliste ist zu lang, um sie hier anzugeben. Besonderer Dank gilt Lev Beklemishev (Utrecht), Wilfried Buchholz (München), Peter Agricola, Michael Knoop, sowie dem durch einen tragischen Unfall zu früh aus dem Leben geschiedenen Mathematiker und Informatiker Ullrich Fuchs. Dem Vieweg+Teubner Verlag bin ich für die gute Zusammenarbeit verbunden.

Berlin, Mai 2008,

Wolfgang Rautenberg

Inhaltsverzeichnis

Einleitung **xv**

Notationen **xix**

1 Aussagenlogik **1**

1.1 Boolesche Funktionen und Formeln 2

1.2 Semantische Äquivalenz und Normalformen 9

1.3 Tautologien und aussagenlogisches Folgern 14

1.4 Ein vollständiger aussagenlogischer Kalkül 18

1.5 Anwendungen des Kompaktheitssatzes 25

1.6 Hilbert-Kalküle 29

2 Prädikatenlogik **33**

2.1 Mathematische Strukturen 34

2.2 Syntax elementarer Sprachen 43

2.3 Semantik elementarer Sprachen 49

2.4 Allgemeingültigkeit und logische Äquivalenz 58

2.5 Logisches Folgern und der Theoriebegriff 62

2.6 Spracherweiterungen 67

3 Der Gödelsche Vollständigkeitssatz **71**

3.1 Ein Kalkül des natürlichen Schließens 72

3.2 Der Vollständigkeitsbeweis 76

3.3 Erste Anwendungen – Nichtstandardmodelle 81
3.4 ZFC und die Paradoxie von Skolem 87
3.5 Aufzählbarkeit und Entscheidbarkeit 92
3.6 Vollständige Hilbert-Kalküle 95
3.7 Fragmente der 1. Stufe und Erweiterungen 99

4 Grundlagen der Logikprogrammierung 105

4.1 Termmodelle und der Satz von Herbrand 106
4.2 Aussagenlogische Resolution 112
4.3 Unifikation 119
4.4 Logikprogrammierung 122
4.5 Der Beweis des Hauptsatzes 129

5 Elemente der Modelltheorie 131

5.1 Elementare Erweiterungen 132
5.2 Vollständige und κ-kategorische Theorien 137
5.3 Das Ehrenfeucht-Spiel 142
5.4 Einbettungs- und Charakterisierungssätze 145
5.5 Modellvollständigkeit 151
5.6 Quantorenelimination 157
5.7 Reduzierte Produkte und Ultraprodukte 163

6 Unvollständigkeit und Unentscheidbarkeit 167

6.1 Rekursive und primitiv-rekursive Funktionen 169
6.2 Gödelisierung 176
6.3 Repräsentierbarkeit arithmetischer Prädikate 182
6.4 Der Repräsentationssatz 189
6.5 Die Sätze von Gödel, Tarski, Church 194
6.6 Übertragung durch Interpretation 200
6.7 Die arithmetische Hierarchie 205

7 Zur Theorie der Selbstreferenz **209**

7.1 Die Ableitungsbedingungen . . . 210

7.2 Die Theoreme von Gödel und Löb . . . 217

7.3 Die Modallogik G . . . 221

7.4 Modale Behandlung der Selbstreferenz . . . 223

7.5 Eine bimodale Beweislogik für PA . . . 226

7.6 Modale Operatoren in ZFC . . . 228

Lösungshinweise zu den Übungen **231**

Literatur **241**

Stichwortverzeichnis **247**

Symbolverzeichnis **255**

Einleitung

Ein wichtiges Merkmal der modernen Logik ist die klare Unterscheidung zwischen Objektsprache und Metasprache. Erstere ist in der Regel formalisiert oder mindestens formalisierbar. Letztere ist eine Art Umgangssprache, die sich von Autor zu Autor unterscheidet und nicht unerheblich von der Zielgruppe des Autors abhängt. Sie ist oft mit halbformalen Elementen verwoben, von denen die meisten ihren Ursprung in der Mengenlehre haben. Das Ausmaß der involvierten Mengenlehre ist unterschiedlich. Semantik und Modelltheorie nutzen strengere mengentheoretische Werkzeuge als die Beweistheorie. Aber im Mittel wird wenig mehr vorausgesetzt als Kenntnisse der mengentheoretischen Terminologie und der elementaren Mengenalgebra, wie sie in jedem mathematischen Kurs für Anfänger präsentiert werden. Vieles davon ist im Grunde nur eine *façon de parler*.

Da dieses Buch die *mathematische* Logik betrifft, ist seine Sprache die gemeinsame Umgangssprache aller mathematischen Disziplinen. Doch gibt es einen wesentlichen Unterschied. In der Mathematik interagieren Objekt- und Metasprache tiefgehend miteinander. Erstere ist bestenfalls partiell formalisiert, was sich als erfolgreich erwiesen hat. Eine Trennung von Objekt- und Metasprache ist nur im speziellen Kontext relevant, zum Beispiel in der axiomatischen Mengenlehre, wo Formalisierung nötig ist um anzugeben wie gewisse Axiome aussehen. Strikt formale Sprachen werden häufiger in der Informatik angetroffen. Ähnlich wie in der Logik gehören formale linguistische Elemente zu den Untersuchungsobjekten, etwa bei der Analyse komplexer Software oder einer Programmiersprache.

Der Darstellungsrahmen formaler Sprachen und Theorien wird traditionell die *Metatheorie* genannt. Eine wichtige Aufgabe einer metatheoretischen Analyse ist es, Verfahren für logische Schlüsse mittels sogenannter logischer Kalküle anzugeben, welche rein syntaktisch operieren. Es gibt sehr unterschiedliche logische Kalküle. Die Wahl kann von der formalisierten Sprache, der logischen Basis und anderen Faktoren abhängen. Grundlegende metatheoretische Werkzeuge sind in jedem Falle die naiven natürlichen Zahlen und induktive Beweisverfahren. Diese werden auch Beweise durch Metainduktion genannt, insbesondere wenn formalisierte Theorien in Objektsprachen behandelt werden, die über natürliche Zahlen und Induktion selbst sprechen. Induktion kann auch über gewissen Wortmengen eines Alphabets, oder über dem Regelsystem eines logischen Kalküls ausgeführt werden.

Die logischen Hilfsmittel der Metatheorie dürfen sich von denen der Objektsprache unterscheiden. Mitunter wird dies sogar explizit gefordert. Aber in diesem Buche ist die Logik der Objektsprachen und die der Metasprache stets dieselbe, nämlich die klassische zweiwertige Logik. Es gibt gute Gründe dafür, Letztere als die Logik des gesunden Menschenverstandes anzusehen. Mathematiker, Informatiker, Physiker, Linguisten und andere verwenden sie als gemeinsame Kommunikations-Plattform.

Es sollte bemerkt werden, dass sich die in den Wissenschaften verwendete Logik erheblich von der Logik der Alltagssprache unterscheidet, wo diese mehr eine Kunst ist als ein ernsthafter Versuch zu sagen was denn woraus folgt. Im Alltagsleben hängt die Bedeutung fast jeder Äußerung vom Kontext ab. In den meisten Fällen sind logische Relationen nur angedeutet, selten explizit ausgedrückt. Oft fehlen grundlegende Voraussetzungen der zweiwertigen Logik, zum Beispiel eine kontextfreie Verwendung der logischen Verknüpfungen. Probleme dieser Art werden in diesem Buche nur am Rande behandelt. Bis zu einem gewissen Grad kann eine mehrwertige Logik oder eine Kripke-Semantik helfen die Situation zu klären, und manchmal müssen komplexe mathematische Methoden genutzt werden, um derartige Probleme zu analysieren. In diesem Buch dient die Kripke-Semantik einem anderen Zweck, nämlich der Analyse selbstbezüglicher Aussagen in Kapitel **7**.

Wir ergänzen die bisherigen allgemeinen Ausführungen durch einige historische Bemerkungen, welche der Anfänger vermutlich eher zu schätzen weiß, wenn er zuvor zumindest Teile dieses Buches gelesen hat.

Die traditionelle Logik ist als Teil der Philosophie eine der ältesten wissenschaftlichen Disziplinen und kann bis in die Antike zurückverfolgt werden [1)]. Sie ist eine der Wurzeln der heute so genannten Philosophischen Logik. Die Mathematische Logik ist hingegen eine relativ junge Disziplin, entstanden durch das Bemühen von Peano, Frege und Russell um 1900, Mathematik insgesamt auf die Logik zu reduzieren. Sie entwickelte sich während des 20. Jahrhunderts zu einer Disziplin mit mehreren Teilgebieten und zahlreichen Anwendungen in Mathematik, Informatik, Linguistik und Philosophie. Von den Glanzpunkten der relativ kurzen Entwicklungsperiode der Mathematischen Logik nennen wir nur die wichtigsten. Siehe hierzu auch [Hei].

Den Anfang bildeten verschiedene Axiomatisierungen der Geometrie, der Algebra, und insbesondere der Mengenlehre. Davon sind die wichtigsten diejenige von Zermelo, ergänzt durch Fraenkel und von Neumann, ZFC genannt, und die Typentheorie von Whitehead und Russell. Letztere ist das Überbleibsel des Fregeschen Versuchs einer Reduktion der Mathematik auf die Logik. Stattdessen stellte es sich heraus, dass die Mathematik gänzlich auf der Mengenlehre als einer Theorie erster Stufe aufgebaut werden kann. Tatsächlich wurde diese Einsicht erst allmählich gewonnen und auch erst nachdem um 1915 der Rest verborgener Annahmen aus der Mengen-

[1)] Insbesondere zu den Stoikern und zu Aristoteles. Die aristotelischen Syllogismen sind nützliche Beispiele für Schlüsse in einer Sprache erster Stufe mit einstelligen Prädikatensymbolen. Einer dieser Syllogismen dient als ein Beispiel im Abschnitt **4.4** über Logikprogrammierung.

lehre entfernt wurde. Zum Beispiel ist der Begriff des geordneten Paares in Wahrheit ein mengentheoretischer oder kann zumindest als ein solcher verstanden werden. Es handelt sich nicht um einen logischen Begriff.

Gleich nachdem diese Axiomatisierungen abgeschlossen waren, entdeckte Skolem, dass es abzählbare Modelle von ZFC gibt; ein Rückschlag für die Hoffnung auf eine axiomatische Definition des abstrakten Begriffs einer Menge. Näheres hierzu in den Ausführungen in Abschnitt **3.4**. Skolem wies damit erstmals auf Grenzen der bis dahin so erfolgreichen axiomatischen Methode hin.

Etwa um dieselbe Zeit betraten zwei herausragende Mathematiker, Hilbert und Brouwer, die Szene und begannen ihren berühmten Streit über die Grundlagen der Mathematik. Dieser ist in zahlreichen Darstellungen und besonders ausführlich in [Kl2, Chapter IV] beschrieben worden und wird daher hier nicht wiedergegeben.

Der nächste Glanzpunkt ist die von Gödel bewiesene Vollständigkeit der von Hilbert im ersten modernen Lehrbuch über Mathematische Logik ([HA]) präsentierten Regeln der Prädikatenlogik. Damit wurde ein Traum von Leibniz in gewissem Umfange Wirklichkeit, nämlich die Schaffung einer *ars inveniendi* (einer Kunst des Erfindens) mathematischer Wahrheiten in Gestalt eines formalen Kalküls. Siehe hierzu **3.5**.

Hilbert hatte inzwischen seine Ansichten über die Grundlagen der Mathematik zu einem Programm entwickelt. Dieses zielte darauf ab, die Konsistenz der Arithmetik und darüber hinaus der Gesamtheit der Mathematik einschließlich der nichtfiniten mengentheoretischen Methoden mit finiten Mitteln zu beweisen. Dieses Programm fand zuerst begeisterte Zustimmung. Aber bereits 1931 zeigte Gödel mit seinen Unvollständigkeitssätzen, dass Hilberts ursprüngliches Programm fehlschlagen muss oder zumindest einer sorgfältigen Revision bedarf.

Viele Logiker betrachten die Gödelschen Sätze als das Top-Ergebnis der Mathematischen Logik des 20. Jahrhunderts. Eine Konsequenz dieser Sätze ist die Existenz konsistenter Erweiterungen der Peano-Arithmetik, in welchen wahre und falsche Sätze in friedlicher Koexistenz miteinander leben (siehe Abschnitt **7.2**) und deshalb von uns auch „Traumtheorien“ genannt werden. Damit war auch Hilberts Ansatz gescheitert, Widerspruchsfreiheit als ein Wahrheitskriterium in der Mathematik zu betrachten. Selbst wenn ZFC widerspruchsfrei sein sollte, ist damit die Frage nicht geklärt, wie dieses oder ein erweitertes axiomatische System an der Realität zu messen ist. Ein integraler Bestandteil der Mengenlehre ist das Unendlichkeitsaxiom, und dieses überschreitet klar die Grenzen physikalischer Erfahrung.

Die von Gödel in [Gö2] entwickelten Methoden waren gleichermaßen bahnbrechend für die Entstehung der Rekursionstheorie um das Jahr 1936. Churchs Beweis der Unentscheidbarkeit des Tautologieproblems markiert einen weiteren herausragenden Erfolg. Nachdem Church hinreichende Belege durch eigene Forschungen sowie durch diejenigen von Turing, Kleene, und anderen gesammelt hatte, formulierte er 1936 seine berühmte These (Abschnitt **6.1**), obwohl zu der Zeit keine Computer im heutigen Sinne existierten, noch vorhersehbar war, dass Berechenbarkeit jemals die weitreichende Rolle spielen würde, die sie heute einnimmt.

Wie bereits erwähnt, musste Hilberts Programm revidiert werden. Von Gentzen wurde ein entscheidender Schritt unternommen, der als ein weiterer durchbrechender Erfolg der Mathematischen Logik und als Startpunkt der heutigen Beweistheorie angesehen wird. Die logischen Kalküle in **1.4** und **3.1** sind mit Gentzens Kalkülen des natürlichen Schließens verwandt. Eine Diskusssion der speziellen beweistheoretischen Ziele und Methoden liegt jedoch nicht im Rahmen dieses Buches.

Wir erwähnen ferner Gödels Entdeckung, dass es weder das Auswahlaxiom (AC) noch die Kontinuumshypothese (CH) sind, welche das Konsistenzproblem der Mengenlehre verursachen. Die Mengenlehre mit AC und CH ist konsistent, falls die Mengenlehre ohne AC und ohne CH dies ist. Dieses Grundresultat der Mathematischen Logik hätte ohne die Nutzung strikt formaler Methoden nicht gewonnen werden können. Das gilt auch für den 1963 von P. Cohen erbrachten Beweis der Unabhängigkeit von AC und CH von den Axiomen der Mengenlehre.

Das bisher Gesagte zeigt, dass die Mathematische Logik eng mit dem Ziel verbunden ist, der Mathematik eine solide Grundlage zu geben. Wir beschränken uns in dieser Hinsicht jedoch auf die Logik und ihr faszinierendes Wechselspiel mit der Mathematik. Die Geschichte lehrt, dass es unmöglich ist, eine programmatische Ansicht über die Grundlagen der Mathematik zu etablieren, welche die Gemeinschaft der Mathematiker als Ganzes zufriedenstellt. Die Mathematische Logik ist das richtige Werkzeug um die technischen Grundlagenprobleme der Mathematik zu behandeln, sie kann aber nicht deren epistemologische Fragen klären. Ungeachtet dessen ist die Mathematische Logik wegen ihrer zahlreichen Anwendungen und ihres übergreifenden Charakters zu einer der für die Mathematik und Informatik gleichermaßen bedeutsamen Disziplinen herangewachsen.

Notationen

Diese Notationen betreffen formale und terminologische Elemente der mathematischen Umgangssprache. Sie sind für Leser aufgelistet, die nicht regelmäßig mit Mathematik zu tun haben und müssen nicht in einem Zuge gelesen werden. Fast alle verwendeten Notationen sind Standard. $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ bezeichnen die Mengen der natürlichen Zahlen einschließlich 0, der ganzen, rationalen bzw. der reellen Zahlen. n, m, i, j, k bezeichnen immer natürliche Zahlen, solange nichts anderes gesagt wird. Daher werden Zusätze wie $n \in \mathbb{N}$ in der Regel unterlassen.

$M \cup N$, $M \cap N$ und $M \setminus N$ bezeichnen wie üblich *Vereinigung*, *Durchschnitt*, bzw. *Differenz* der Mengen M, N, und $\subseteq$ die *Inklusion*. $M \subset N$ steht für $M \subseteq N$ und $M \neq N$, wird aber nur benutzt, wenn der Umstand $M \neq N$ besonders betont werden soll. Ist M in einer Betrachtung fest und $N \subseteq M$, darf $M \setminus N$ auch mit $\setminus N$ (oder $\neg N$) bezeichnet werden. $\emptyset$ bezeichnet die *leere Menge*, $\mathfrak{P}M$ die *Potenzmenge* von M, die Menge aller ihrer Teilmengen. Will man hervorheben, dass die Elemente einer Menge F selbst Mengen sind, heißt F auch eine *Mengenfamilie*. $\bigcup F$ bezeichnet die Vereinigung einer Mengenfamilie F, d.h. die Menge der Elemente, die in wenigstens einem $M \in F$ liegen, und $\bigcap F$ für $F \neq \emptyset$ den Durchschnitt, d.h. die Menge der zu allen $M \in F$ gehörenden Elemente. Ist $F = \{M_i \mid i \in I\}$ indiziert (siehe unten), bezeichnet man $\bigcup F$ und $\bigcap F$ meistens mit $\bigcup_{i \in I} M_i$ bzw. $\bigcap_{i \in I} M_i$.

$M \times N$ bezeichnet die Menge aller geordneten Paare (a, b) mit $a \in M$ und $b \in N$. Eine *Relation* zwischen M und N ist eine Teilmenge von $M \times N$. Ist $f \subseteq M \times N$ und gibt es zu jedem $a \in M$ genau ein $b \in N$ mit $(a, b) \in f$, heißt f eine *Funktion* (*Abbildung*) *von* M *nach* N. Das durch a eindeutig bestimmte Element b mit $(a, b) \in f$ wird mit $f(a)$ oder fa (die von uns bevorzugte Schreibweise) oder a^f bezeichnet. Man nennt fa den *Wert von* f *bei* a sowie $\mathit{ran}\, f = \{fx \mid x \in M\}$ das *Bild* (range) von f, während $\mathit{dom}\, f = M$ der *Definitionsbereich* (domain) von f heißt. Man schreibt $f\colon M \to N$ für 'f ist Funktion mit $\mathit{dom}\, f = M$ und $\mathit{ran}\, f \subseteq N$' [1)]. Oft wird aber auch f selbst durch $f\colon M \to N$ zitiert. Ist $f(x) = t(x)$ für einen Term t, wird f auch mit $f\colon x \mapsto t$ oder $x \mapsto t$ bezeichnet. Terme werden in **2.2** erklärt.

$f\colon M \to N$ heißt *injektiv*, wenn $fx = fy \;\Rightarrow\; x = y$, für alle $x, y \in M$, *surjektiv*, wenn $\mathit{ran}\, f$ ganz N ausfüllt, und *bijektiv*, wenn f injektiv und surjektiv ist. Für $M = N$ ist die *identische Abbildung* $\mathit{id}_M\colon x \mapsto x$ Beispiel einer Bijektion. Sind f, g Abbildungen mit $\mathit{ran}\, g \subseteq \mathit{dom}\, f$, heißt die Funktion $h\colon x \mapsto f(g(x))$ auch deren *Produkt* (oder deren *Komposition*), oft notiert als $h = f \circ g$.

[1)] Hochkommata dienen hier wie überall in diesem Buch der Abgrenzung gewisser Sprachpartikel, wie z.B. in Worten formulierter Prädikate, vom umgebenden Text.

Seien I, M beliebige Mengen, wobei I, ziemlich willkürlich, die *Indexmenge* genannt werde. M^I bezeichne die Menge aller $f\colon I \to M$. Oft wird eine Funktion $f \in M^I$ mit $i \mapsto a_i$ durch $(a_i)_{i\in I}$ bezeichnet und heißt je nach Zusammenhang eine indizierte *Familie*, ein *I-Tupel* oder eine *Folge*. Diese heißt *endlich* oder *unendlich*, je nachdem ob I endlich oder unendlich ist. Falls, wie in der Mengenlehre üblich, 0 mit $\emptyset$, und $n > 0$ mit $\{0, 1, \dots, n-1\}$ identifiziert wird, lässt M^n sich verstehen als die Menge der Folgen oder n-Tupel $(a_i)_{i<n}$ aus Elementen von M *der Länge* n. Einziges Element von M^0 $(= M^\emptyset)$ ist $\emptyset$, auch die *leere Folge* genannt. Diese hat die Länge 0. Gleichwertige Schreibweisen für $(a_i)_{i<n}$ bzw. $(a_i)_{i\leqslant n}$ sind $(a_0, \dots, a_{n-1})$ und $(a_0, \dots, a_n)$. Das Aneinanderfügen endlicher Folgen heißt auch deren *Verkettung*. So ist (a_0, a_1, a_2) verkettet mit (b_0, b_1) die Folge $(a_0, a_1, a_2, b_0, b_1)$.

Für $k \leqslant n$ heißt $(a_i)_{i\leqslant k}$ ein *Anfang* von $(a_i)_{i\leqslant n}$, und zwar ein *echter* Anfang, falls $k < n$. Häufig betrachten wir auch Folgen der Gestalt $(a_1, \dots, a_n)$, im Text durchweg mit $\vec{a}$ bezeichnet. Hier ist für $n = 0$ die leere Folge gemeint, genau wie $\{a_1, \dots, a_n\}$ für $n = 0$ grundsätzlich die leere Menge bedeutet.

Ist A ein *Alphabet*, d.h. sind die Elemente von A *Symbole* oder werden sie als solche bezeichnet, wird $(a_1, \dots, a_n)$ meistens in der Weise $a_1 \cdots a_n$ geschrieben und heißt ein *Wort* oder eine *Zeichenfolge* über A. Die leere Folge wird dann konsequenterweise das *leere Wort* genannt. Ein Anfang einer Zeichenfolge ξ heißt auch ein *Anfangswort* von ξ. Die Verkettung zweier Worte ξ und η werde mit $\xi\eta$ bezeichnet. Falls $\xi = \xi_1\eta\,\xi_2$ für gewisse Worte ξ_1, ξ_2 und $\eta \neq \emptyset$, heißt η auch ein *Teilwort* von ξ.

Teilmengen $P, Q, R, \ldots \subseteq M^n$ heißen *n-stellige Prädikate* oder *Relationen* von M, $n \geqslant 1$. Einstellige Prädikate werden mit den entsprechenden Teilmengen von M identifiziert, z.B. das Primzahlprädikat mit der Menge aller Primzahlen. Statt $\vec{a} \in P$ schreiben wir $P\vec{a}$, statt $\vec{a} \notin P$ auch $\neg P\vec{a}$. Falls $P \subseteq M^2$ und P ein Symbol ist wie z.B. $\lhd$, $<$, $\leqslant$, $\in$, wird aPb statt Pab geschrieben, also $a \lhd b$ statt $\lhd\, ab$ usw. Für $P \subseteq M^n$ heiße die durch

$$\chi_P\vec{a} = \begin{cases} 1 & \text{falls } P\vec{a}, \\ 0 & \text{falls } \neg P\vec{a} \end{cases}$$

definierte n-stellige Funktion χ_P die *charakteristische Funktion* von P. Dabei ist unerheblich, ob man die Werte $0, 1$ als Wahrheitswerte oder als natürliche Zahlen versteht wie dies in Kaptitel **6** geschieht, oder ob 0 und 1 in der Definition gar vertauscht werden. Wichtig ist nur, dass P durch χ_P eindeutig bestimmt ist.

Jedes $f\colon M^n \to M$ heißt eine n-stellige *Operation von M*. Meistens schreiben wir $f\vec{a}$ für $f(a_1, \dots, a_n)$. Eine 0-stellige Operation von M hat wegen $A^0 = \{\emptyset\}$ die Gestalt $\{(\emptyset, c)\}$ mit $c \in M$; diese wird kurz mit c bezeichnet und heißt eine *Konstante*. Jede n-stellige Operation von f von M wird durch

$$graph\, f := \{(a_1, \ldots, a_{n+1}) \in M^{n+1} \mid f(a_1, \ldots, a_n) = a_{n+1}\}$$

eindeutig beschrieben. Es handelt sich hier um eine $(n + 1)$-stellige Relation, welche der *Graph von* f genannt wird. f und $graph\, f$ sind dasselbe, wenn – wie dies gelegentlich geschieht – M^{n+1} mit $M^n \times M$ identifiziert wird.

Am häufigsten werden 2-stellige Operationen angetroffen. Bei diesen wird das entsprechende Operationssymbol in der Regel zwischen die Argumente gesetzt. Eine derartige, hier mit $\circ$ bezeichnete Operation $\circ : M^2 \to M$ heißt

kommutativ	wenn $a \circ b = b \circ a$ für alle $a, b \in M$,
assoziativ	wenn $a \circ (b \circ c) = (a \circ b) \circ c$ für alle $a, b, c \in M$,
idempotent	wenn $a \circ a = a$ für alle $a \in M$,
invertierbar	wenn zu allen $a, b \in M$ Elemente $x, y \in M$ existieren mit $x \circ a = b$ und $a \circ y = b$.

Als Verallgemeinerung von $M_1 \times M_2$ lässt sich das *direkte Produkt* $N = \prod_{i \in I} M_i$ einer Mengenfamilie $(M_i)_{i \in I}$ verstehen. Jedes $a \in N$ ist eine auf I erklärte Funktion $a = (a_i)_{i \in I}$ mit $a_i \in M_i$ (eine *Auswahlfunktion*). a_i heißt auch die *i-te Komponente* von a. Falls $M_i = M$ für alle $i \in I$, ist $\prod_{i \in I} M_i$ offenbar mit M^I identisch. Dies gilt auch für $I = \emptyset$, weil $\prod_{i \in I} M_i = \{\emptyset\}$ und auch $M^I = \{\emptyset\}$.

Bezeichnen A, B metasprachliche Ausdrücke, stehen $A \Leftrightarrow B$, $A \Rightarrow B$, $A \,\&\, B$ und $A \vee B$ für *A genau dann wenn B*, *wenn A so B*, *A und B* bzw. *A oder B*. Dabei sollen die Symbole $\Rightarrow, \Leftrightarrow, \ldots$ stärker trennen als sprachliche Bindungspartikel. Deshalb darf in einem Textteil wie z.B. '$T \vDash \alpha \;\Leftrightarrow\; \alpha \in T$, für alle $\alpha \in \mathcal{L}^0$' (Seite 64) das Komma nicht fehlen, weil '$\alpha \in T$ für alle $\alpha \in \mathcal{L}^0$' fälschlicherweise gelesen werden könnte als 'T ist inkonsistent'.

$s := t$ bedeutet, dass s durch den Term t definiert wird, oder wenn s eine Variable ist, auch die Zuweisung des Wertes von t zu s. Für Terme s, t sei $s > t$ grundsätzlich nur eine andere Schreibweise für $t < s$. Dieselbe Bemerkung bezieht sich auch auf andere unsymmetrische Relationssymbole wie $\leqslant$, $\subseteq$ usw.

In der mathematischen Umgangssprache werden Formeln oft direkt in den Text integriert und man bedient sich dabei auch gewisser verkürzender Schreibweisen. So wie man z.B. '$a < b$ und $b < c$' häufig zu '$a < b < c$', oder '$a < b$ und $b \in M$' zu '$a < b \in M$' verkürzt, darf '$X \vdash \alpha \equiv \beta$' für '$X \vdash \alpha$ und $\alpha \equiv \beta$' geschrieben werden ('aus der Formelmenge X ist die Formel α beweisbar und α ist äquivalent zu β'). Das Symbol $\equiv$ wird in diesem Buch nur metasprachlich verwendet, kommt also in keiner der behandelten formalen Sprachen vor.

Literatur

[As] G. Asser, *Einführung in die mathematische Logik, Teil III*, Teubner 1981.

[Ba] J. Barwise (Hrsg.), *Handbook of Mathematical Logic*, North-Holland 1977.

[BD] A. Berarducci, P. D'Aquino, *Δ_0-complexity of the relation $y = \prod_{i \leqslant n} F(i)$*, Ann. Pure Appl. Logic 75 (1995), 49–56.

[Be1] L. D. Beklemishev, *On the classification of propositional provability logics*, Math. USSR – Izvestiya 35 (1990), 247–275.

[Be2] ———, *Iterated local reflection versus iterated consistency*, Ann. Pure Appl. Logic 75 (1995), 25–48.

[Be3] ———, *Bimodal logics for extensions of arithmetical theories*, J. Symb. Logic 61 (1996), 91–124.

[BF] J. Barwise, S. Feferman (Hrsg.), *Model-Theoretic Logics*, Springer 1985.

[BGG] E. Börger, E. Grädel, Y. Gurevich, *The Classical Decision Problem*, Springer 1997.

[Bi] G. Birkhoff, *On the structure of abstract algebras*, Proceedings of the Cambridge Philosophical Society 31 (1935), 433–454.

[BJ] G. Boolos, R. Jeffrey, *Computability and Logic*, 3. Aufl. Cambridge Univ. Press 1989.

[BM] J. Bell, M. Machover, *A Course in Mathematical Logic*, North-Holland 1977.

[Boo] G. Boolos, *The Logic of Provability*, Cambridge Univ. Press 1993.

[BP] P. Benacerraf, H. Putnam (Hrsg.), *Philosophy of Mathematics, Selected Readings*, (Englewood Cliffs NJ 1964) 2. Aufl. Cambridge Univ. Press 1997.

[Bu] S. R. Buss (Hrsg.), *Handbook of Proof Theory*, Elsevier 1998.

[Bue] S. Buechler, *Essential Stability Theory*, Springer 1996.

[Ca] G. Cantor, *Gesammelte Abhandlungen*, (Berlin 1932) Springer 1980.

[Ch] A. Church, *A note on the Entscheidungsproblem*, J. Symb. Logic 1 (1936), 40–41.

[CK] C. C. Chang, H. J. Keisler, *Model Theory*, (Amsterdam 1973) 3. Aufl. North-Holland 1990.

[CZ] A. Chagrov, M. Zakharyashev, *Modal Logic*, Clarendon Press 1997.

[Da] D. van Dalen, *Logic and Structure*, (Berlin 1980) 4. Aufl. Springer 2004.

[Dav] M. Davis (Hrsg.), *The Undecidable*, Raven Press 1965.

[De1] O. Deiser, *Einführung in die Mengenlehre*, (Berlin 2002) 2. Aufl. Springer 2004.

[De2] ———, *Axiomatische Mengenlehre*, voraussichtlich Springer 2009.

[Do] K. Doets, *From Logic to Logic Programming*, MIT Press 1994.

[EFT] H.-D. Ebbinghaus, J. Flum, W. Thomas, *Einführung in die Mathematische Logik*, (Darmstadt 1978) 5. Aufl. Spectrum Akad. Verlag 2007.

[En] H. Enderton, *A Mathematical Introduction to Logic*, (New York 1972) 2. Aufl. Academic Press 2001.

[Fe1] W. Felscher, *Berechenbarkeit*, Springer 1993.

[Fe2] ———, *Lectures on Mathematical Logic*, Vol. 1–3, Gordon & Breach 2000.

[Fef] S. Feferman, *In the Light of Logic*, Oxford Univ. Press 1998.

[Fr] G. Frege, *Begriffsschrift, eine der arithmetischen nachgebildete Formelsprache des reinen Denkens*, (Halle 1879) G. Olms Verlag 1971, oder in [Hei, 1–82].

[Ge] G. Gentzen, *Untersuchungen über das logische Schließen*, Mathematische Zeitschrift 39 (1935), 176–210, 405–431.

[GH] H.-J. Goltz, H. Herre, *Grundlagen der logischen Programmierung*, Akademie-Verlag 1990.

[GJ] M. Garey, D. Johnson, *Computers and Intractability, A Guide to the Theory of NP-Completeness*, Freeman 1979.

[Gö1] K. Gödel, *Die Vollständigkeit der Axiome des logischen Funktionenkalküls*, Monatshefte für Mathematik und Physik 37 (1930), 349–360, oder *Collected Works I*.

[Gö2] ———, *Über formal unentscheidbare Sätze der Principia Mathematica und verwandter Systeme I*, Monatshefte für Mathematik und Physik 38 (1931), 173–198.

[Gö3] ———, *Collected Works*, Vol. I–V, Oxford Univ. Press, Vol. I 1986, Vol. II 1990, Vol. III 1995, Vol. IV, V 2003.

[Gor] S. N. Goryachev, *On the interpretability of some extensions of arithmetic*, Mathematical Notes 40 (1986), 561–572.

[Gr] G. Grätzer, *Universal Algebra*, (New York 1968) 2. Aufl. Springer 1979.

[HA] D. Hilbert, W. Ackermann, *Grundzüge der theoretischen Logik*, (Berlin 1928) 6. Aufl. Springer 1972.

[HB] D. Hilbert, P. Bernays, *Grundlagen der Mathematik*, Bd. I, II, (Berlin 1934, 1939) 2. Aufl. Springer, Band I 1968, Band II 1970.

[He] L. Henkin, *The completeness of the first-order functional calculus*, J. Symb. Logic 14 (1949), 159–166.

[Hei] J. van Heijenoort (Hrsg.), *From Frege to Gödel*, Harvard Univ. Press 1967.

[Her] J. Herbrand, *Recherches sur la théorie de la démonstration*, C. R. Soc. Sci. Lett. Varsovie, Cl. III (1930), oder in [Hei, 525–581].

[Hi] P. Hinman, *Fundamentals of Mathematical Logic*, A. K. Peters 2005.

[Ho] W. Hodges, *Model Theory*, Cambridge Univ. Press 1993.

[HP] P. Hájek, P. Pudlák, *Metamathematics of First-Order Arithmetic*, Springer 1993.

[HR] H. Herre, W. Rautenberg, *Das Basistheorem und einige Anwendungen in der Modelltheorie*, Wiss. Z. Humboldt-Univ., Math. Nat. R. 19 (1970), 579–583.

[Id] P. Idziak, *A characterization of finitely decidable congruence modular varieties*, Trans. Amer. Math. Soc. 349 (1997), 903–934.

[Ig] K. Ignatiev, *On strong provability predicates and the associated modal logics*, J. Symb. Logic 58 (1993), 249–290.

[Ih] T. Ihringer, *Allgemeine Algebra*, (Stuttgart 1988) 2. Aufl. Heldermann 2003.

[JK] R. Jensen, C. Karp, *Primitive recursive set functions*, in *Axiomatic Set Theory, Vol. I* (Hrsg. D. Scott), Proc. Symp. Pure Math. 13, I, AMS 1971, 143–167.

[Ka] R. Kaye, *Models of Peano Arithmetic*, Clarendon Press 1991.

[Ke] H. J. Keisler, *Logic with the quantifier "there exist uncountably many"*, Annals of Mathematical Logic 1 (1970), 1–93.

[KK] G. Kreisel, J.-L. Krivine, *Modelltheorie*, Springer 1972.

[Kl1] S. Kleene, *Introduction to Metamathematics*, (Amsterdam 1952) 2. Aufl. Wolters-Noordhoff 1988.

[Kl2] ———, *Mathematical Logic*, Wiley & Sons 1967.

[KR] I. Korec, W. Rautenberg, *Model interpretability into trees and applications*, Arch. math. Logik 17 (1976), 97–104.

[Kr] M. Kracht, *Tools and Techniques in Modal Logic*, Elsevier 1999.

[Kra] J. Krajíček, *Bounded Arithmetic, Propositional Logic, and Complexity Theory*, Cambridge Univ. Press 1995.

[Ku] K. Kunen, *Set Theory*, *An Introduction to Independence Proofs*, North-Holland 1980.

[Li] P. Lindström, *On extensions of elementary logic*, Theoria 35 (1969), 1–11.

[Ll] J. W. Lloyd, *Foundations of Logic Programming*, (Berlin 1984) 2. Aufl. Springer 1987.

[Lö] M. Löb, *Solution of a problem of Leon Henkin*, J. Symb. Logic 20 (1955), 115–118.

[Ma] A. I. Mal'cev, *The Metamathematics of Algebraic Systems*, North-Holland 1971.

[Mal] J. Malitz, *Introduction to Mathematical Logic*, Springer 1979.

[Mat] Y. Matiyasevich, *Hilbert's Tenth Problem*, MIT Press 1993.

[Me] E. Mendelson, *Introduction to Mathematical Logic*, (Princeton 1964) 4. Aufl. Chapman & Hall 1997.

[ML] G. Müller, W. Lenski (Hrsg.), *The Ω-Bibliography of Mathematical Logic*, Springer 1987.

[Mo] D. Monk, *Mathematical Logic*, Springer 1976.

[MV] R. McKenzie, M. Valeriote, *The Structure of Decidable Locally Finite Varieties*, Progress in Mathematics 79, Birkhäuser 1989.

[Ob] A. Oberschelp, *Rekursionstheorie*, BI-Wiss.-Verlag 1993.

[Po] W. Pohlers, *Proof Theory*, *An Introduction*, Lecture Notes in Mathematics 1407, Springer 1989.

[Pr] A. Prestel, *Einführung in die Mathematische Logik und Modelltheorie*, Vieweg 1986.

[Pre] M. Presburger, *Über die Vollständigkeit eines gewissen Systems der Arithmetik ganzer Zahlen, in welchem die Addition als einzige Operation hervortritt*, Congrès des Mathématiciens des Pays Slaves 1 (1930), 92–101.

[Ra1] W. Rautenberg, *Klassische und Nichtklassische Aussagenlogik*, Vieweg 1979.

[Ra2] ———, *A Concise Introduction to Mathematical Logic*, Springer 2006.

[Ra3] ———, *Messen und Zählen, Eine einfache Konstruktion der reellen Zahlen*, Heldermann 2007.

[Ri] M. Richter, *Logikkalküle*, Teubner 1978.

[Ro1] A. Robinson, *Introduction to Model Theory and to the Metamathematics of Algebra*, (Amsterdam 1963) 2. Aufl. North-Holland 1974.

[Ro2] ———, *Non-Standard Analysis*, (Amsterdam 1966) 3. Aufl. North-Holland 1974.

[Rob] J. Robinson, *A machine-oriented logic based on the resolution principle*, Journal of the ACM 12 (1965), 23–41.

[Rog] H. Rogers, *Theory of Recursive Functions and Effective Computability*, 2. Aufl. MIT Press 1988.

[Ros] J. B. Rosser, *Extensions of some theorems of Gödel and Church*, J. Symb. Logic 1 (1936), 87–91.

[Rot] P. Rothmaler, *Einführung in die Modelltheorie*, Spectrum Akad. Verlag 1995.

[RS] H. Rasiowa, R. Sikorski, *The Mathematics of Metamathematics*, (Warschau 1963) 3. Aufl. Polish Scientific Publ. 1970.

[RZ] W. Rautenberg, M. Ziegler, *Recursive inseparability in graph theory*, Notices Amer. Math. Soc. 22 (1975), A–523.

[Sa] G. Sacks, *Saturated Model Theory*, W. A. Benjamin 1972.

[Sam] G. Sambin, *An effective fixed point theorem in intuitionistic diagonalizable algebras*, Studia Logica 35 (1976), 345–361.

[Schö] U. Schöning, *Logik für Informatiker*, (Mannheim 1987) 5. Aufl. Spectrum Akad. Verlag 2000.

[Se] A. Selman, *Completeness of calculi for axiomatically defined classes of algebras*, Algebra Universalis 2 (1972), 20–32.

[Sh] S. Shelah, *Classification Theory and the Number of Nonisomorphic Models*, (Amsterdam 1978) 2. Aufl. North-Holland 1990.

[Shoe] J. R. Shoenfield, *Mathematical Logic*, (Reading Mass. 1967) A. K. Peters 2001.

[Si] W. Sieg, *Herbrand analyses*, Arch. Math. Logic 30 (1991), 409–441.

[Sm] R. Smullyan, *Diagonalization and Self-Reference*, Clarendon Press 1994.

[So] R. Solovay, *Provability interpretation of modal logic*, Israel Journal of Mathematics 25 (1976), 287–304.

[Sz] W. Szmielew, *Elementary properties of abelian groups*, Fund. Math. 41 (1954), 203–271.

[Ta1] A. Tarski, *Der Wahrheitsbegriff in den formalisierten Sprachen*, Studia Philosophica 1 (1936), 261–405, oder in [Ta3, 152-278].

[Ta2] ———, *A Decision Method for Elementary Algebra and Geometry*, (Santa Monica 1948, Berkeley 1951) Paris 1967.

[Ta3] ———, *Logic, Semantics, Metamathematics*, (Oxford 1956) 2. Aufl. Hackett 1983.

[TMR] A. Tarski, A. Mostowski, R. M. Robinson, *Undecidable Theories*, North-Holland 1953.

[Tu] A. Turing, *On computable numbers, with an application to the Entscheidungsproblem*, Proc. London Math. Soc., 2^{nd} Ser. 42 (1937), 230–265, oder in [Dav].

[TW] H.-P. Tuschik, H. Wolter, *Mathematische Logik – kurzgefaßt*, (Mannheim 1994) 2. Aufl. Spectrum Akad. Verlag 2002.

[Vi] A. Visser, *An overview of interpretability logic*, in *Advances in Modal Logic, Vol. 1* (Hrsg. M. Kracht et al.), CSLI Lecture Notes 87 (1998), 307–359.

[Wae] B. L. van der Waerden, *Algebra I*, (Berlin 1930) 4. Aufl. Springer 1955.

[Wag] F. Wagner, *Simple Theories*, Kluwer 2000.

[Wi] A. Wilkie, *Model completeness results for expansions of the ordered field of real numbers . . .*, Journal Amer. Math. Soc. 9 (1996), 1051–1094.

[WP] A. Wilkie, J. Paris, *On the scheme of induction for bounded arithmetic formulas*, Ann. Pure Appl. Logic 35 (1987), 261–302.

[WR] A. Whitehead, B. Russell, *Principia Mathematica*, I–III, (Cambridge 1910, 1912, 1913) 2. Aufl. Cambridge Univ. Press, Vol. I 1925, Vol. II, III 1927.

[Zi] M. Ziegler, *Model theory of modules*, Ann. Pure Appl. Logic 26 (1984), 149–213.

Stichwortverzeichnis

a.a. (algebraisch abgeschlossen), 38
∀-Formel, ∀-Aussage, 54
∀-Theorie, 66
∀∃-Aussage, ∀∃-Theorie, 148
Abbildung (Funktion), xix
  bijektive, xix
  identische, xix
  injektive, surjektive, xix
abelsche Gruppe, 38
  dividierbare, 81
  torsionsfreie, 82
ableitbar, 18, 29
Ableitungsbedingungen, 210
Abschlußaxiome, 200
Abschluss (eines Modells in T), 152
Absorptionsgesetze, 39
Ackermann-Funktion, 175
Algebra, 34
algebraisch, 38
allgemeingültig, 14, 51
allgemeingültigkeitsgleich, 61
Alphabet, xx
Anfang, xx, 37
Anfangssequenz, 18
Anfrage, 122
Anordnung, 37
Antivalenz, 2
äquivalent, 9, 51
  in (oder modulo) T, 66
  in einer Struktur, 59
Äquivalenz, 3
Äquivalenzklasse, 41
Äquivalenzrelation, 36
arithmetisch, 184
arithmetische Hierarchie, 205
arithmetisierbar, 177, 194
Artin, 153
assoziativ, xxi
aufzählbar, 92, 175
Aussage, 47
Aussagenvariable, 4
  modalisierte, 224
Auswahlaxiom, 90
Auswahlfunktion, xxi
Automorphismus, 40
axiomatisierbar, 81
  endlich, rekursiv, 81
Axiomensystem, 65
  logisches, 29, 95

$\boldsymbol{\beta}$-Funktion, 189
Basisregeln, 18, 72
Basissatz, 140, 161
Baum, 26
Belegung, 7, 49, 221
benachbart, 25
berechenbar, 127, 169
beschränkt, 37
Beweis (formaler), 29, 96
beweisbar, 19, 29
beweisbar rekursiv, 212
Beweislogik, 224
Bild, xix
Birkhoffsche Regeln, 99
Blatt, 113
Boolesche Algebra, 39
Boolesche Basis, 140, 160
Boolesche Funktion, 2
  duale, selbstduale, 12

lineare, 8
monotone, 13
Boolesche Kombination, 45
Boolesche Matrix, 40
Boolesche Signatur, 5

Charakteristik eines Körpers, 39
Chinesischer Restsatz, 189
Church, 92
Churchsche These, 171
Cohen, xviii

δ-Funktion, 170
Δ_0-Formel, Δ_0-Prädikat, 185
Δ_0-Induktion, 206
Davis, 199
Deduktionstheorem, 16, 31
deduktiv abgeschlossen, 16, 64
definierbar
(elementar) in einer Struktur, 54
Δ_0-definierbar, 212
explizit, implizit, 69
in Theorien, 211
mit Parametern, 85
Σ_1-definierbar, 212
Definitionsbereich, xix
DeJongh, 225
Diagramm, 132
elementares, 133
universales, 149
direkte Potenz, 42
Disjunktion, 2
Distributivgesetze, 39
Durchschnitt, xix

$\exists$-abgeschlossen, 155
$\exists$-Formel, 54
einfache, 158
Ehrenfeucht-Spiel, 142
Einbettung, 40
elementare, 136
Einschränkung, 35
Einselement, 38
Einsetzung, 58, 223
elementar-äquivalent, 55
elementarer Typ, 139
Enderweiterung, 84
endliche Modelleigenschaft, 98
Endlichkeitssatz, 21, 24, 74, 81
entscheidbar, 81, 169
erfüllbar, 14, 51, 65, 112
erfüllbarkeitsgleich, 69
Erfüllungsrelation, 14, 49
Ersetzungstheorem, 10, 59
Erweiterung, 36, 62, 64
definitorische, 69
elementare, 133
endliche, 65
konservative, 53, 67
transzendente, 153
unmittelbare, 153
existentiell abgeschlossen, 149, 155
Expansion, 36, 62
explizite Definition, 67, 68
Extensionalitätsprinzip, 2

f-abgeschlossen, 35
Faktorstruktur, 41
Falsum, 5
fast alle, 48, 163
Fermatsche Vermutung, 199
Fibonacci-Folge, 174
fiktives Argument, 8
Filter, 28
Fixpunktlemma, 194
Folge, xx
Folgerungsrelation
aussagenlogische, 15
globale, lokale, 63
prädikatenlogische, 51
Formel, 4, 45
arithmetische, 185, 212
atomare, 45
Boolesche, 5
definierende, 67

duale, 12
geschlossene, 47
pränexe, 61
quantorenfreie (= offene), 45
repräsentierende, 8, 184, 187
universale, 54
Formelalgebra, 34
Formelinduktion, 6, 46
Frege, 60
Funktion, xix
charakteristische, xx
n-stellige, xx
primitiv-rekursive, 169
rekursive (= μ-rekursive), 169
funktional vollständig, 12
Funktionsterm, 44

G-Struktur, 221
Generalisierte, 51
Generalisierung, 62
Gentzen-Kalkül, 18
geordnetes Paar, 89
gleichheitsfrei, 80
gleichmächtig, 87
Gleichung, 45
diophantische, 185, 198
Gödel, xvii, 71, 189, 225
gödelisierbar, 177, 194
Gödelterm, 191
Gödelzahl, 173
einer Zeichenfolge, 176
eines Beweises, 177
Graph, 37
einfacher, 25
k-chromatischer, 25
einer Operation, xxi
planarer, 26
Größenbereich, 38
Grundinstanz, 107, 123
Grundterm, 44
Gruppe, Gruppoid, 38
geordnete, 38
Halbgruppe, 38
Halbordnung, 37
Halbring, 38
Halbverband, 39
Harrington, 219
Hauptpolynom, 82
Henkin-Menge, 77
Herbrand-Modell, 108
minimales, 110
Herbrand-Struktur, 108
Herleitung, herleitbar, 19
Hilbert, xvii
Hilbert-Kalkül, 29, 95
Hilberts Programm, xvii, 168
Homomorphismus, 40
natürlicher, 41
strenger, 40
Horn-Resolution (H-Resolution), 116
Hornformel, 109
Basis-Hornformel, 109
positive, negative, 109
universale, 109
Hornklausel, 116
Horntheorie, 109
nichttriviale, 110
universale, 110
Hyperexponentiation, 186

i.a. (im Allgemeinen), 42
I-Tupel, xx
idempotent, xxi
Identität, 99
Implikation, 3
konverse, 3
Individuenvariable, 43
Induktion
über φ, 7, 46
über t, 44
$<$-Induktion, 86
Induktionsaxiom, 84
Induktionsschema, 83
Induktionsschritt, 83

Infimum, 39
Infinitesimalzahl, 86
informell, 63
inkonsistent, 17, 21, 75
Instanz, 107, 123
Integritätsbereich, 38
Interpretation, 49
(relativ) interpretierbar, 200
Invarianzsatz, 55
invertierbar, xxi
Isomorphismus, 40
  partieller, 138

ι-Term, 68
Jeroslow, 225
Junktor, 3

κ-kategorisch, 137
Kardinalzahl, 135
Kern (einer pränexen Formel), 61
Kette, 37
  von Strukturen, 148
  elementare, 148
  von Theorien, 80
Kettenschluß, 14
  Fregescher, 14
Klammerersparnis, 5, 46
Klasse
  elementare, Δ-elementare, 139
  von $\mathcal{L}$-Strukturen, 98
Klausel, 112, 118
  definite, positive, negative, 112
Kleene, 169, 205
koendlich, 28
Koinzidenzsatz, 52
kollisionsfrei, 56
kommutativ, xxi
Kompaktheitssatz, 24, 82
Komposition, xix, 169
Kongruenz(relation), 41, 58
Königscher Graphensatz, 26
Konjunktion, 2
Konsequenzrelation
  aussagenlogische, 17
  finitäre, 17
  maximale, 24
konsistent, 21, 65, 75, 123
Konsistenzerweiterung, 220
Konstante, xx
Konstantenexpansion, 76
Konstantenquantifizierung, 76
Kontinuumshypothese, 135
Kontradiktion, 14
Kontrapositionsregel, 17
Körper, 38
  algebraisch abgeschlossener, 82
  der algebraischen Zahlen, 134
  geordneter, 39
  reell abgeschlossener, 153
Korrektheit, 21, 73
Kreisel, 225
Kripke-Struktur, 221

$\mathcal{L}$-Formel, 45
$\mathcal{L}$-Modell, 49
$\mathcal{L}$-Struktur (= L-Struktur), 35
legitim, 68
Lemma von Euklid, 193
Lemma von Zorn, 37
Lindenbaum, 23
Literal, 10, 45
Löbsches Axiom, 221
Löbsches Theorem, 218, 225
Logikprogramm, 122
logisch gültig, 14, 51
logische Matrix, 40
Lösung, 123
Lücke, 37

μ-Operation, 169
  beschränkte, 172
Mächtigkeit, 135
Matiyasevich, 199
maximal konsistent, 21
maximales Element, 37
Menge

abzählbare, überabzählbare, 87
dicht geordnete, 137
diskret geordnete, 142
endliche, 87
geordnete, 37
stetig geordnete, 37
wohlgeordnete, 37
Mengenalgebra, 40
Mengenfamilie, xix
Metainduktion, xv, 182
Metatheorie, xv
Minimalmodell, 117
Modell
aussagenlogisches, 7
einer Theorie, 64
freies, 110
prädikatenlogisches, 49
transitives, 229
Modellbegleiter, 157
modellinterpretierbar, 202
modellverträglich, 150
Modellvervollständigung, 155
modellvollständig, 151
Modus Ponens, 15, 29
Monotonieregel, 18
Mostowski, 168, 189, 225
MP-abgeschlossen, 30

n-Tupel, xx
Nachfolgerfunktion, 83
Negation, 2
Nichtrepräsentierbarkeitslemma, 194
Nichtstandard-Analysis, 85
Nichtstandardmodell, 83
Nichtstandardzahl, 84
Normalform
disjunktive, 10
kanonische, 12
konjunktive, 10, 58
pränexe, 61
Skolemsche, 70

ω-konsistent, 195
ω-Regel, 226
ω-Term, 90
ω-unvollständig, 196
Objektsprache, xv
Operation, xx
wesentlich n-stellige, 8
Ordnung, 37
dichte, 137
diskrete, 142
lineare, partielle, 37

p.r. (primitiv rekursiv), 169
Π_1-Formel, Π_1-Prädikat, 185
Paarkodierung, 172
Paarmenge, 89
Paradoxie von Skolem, 91
parameterdefinierbar, 85
Paris, 219
Partikularisierung, 62
Peano-Arithmetik, 83
Peirce-Axiom, 14
persistent, 147
Potenzmenge, xix
Potenzmengenaxiom, 89
Prädikat, xx
arithmetisches, 184
diophantisches, 185
(primitiv) rekursives, 169
rekursiv aufzählbares, 175
Präfix, 45
Prämisse, 18
Presburger, 159
Primformel, 4, 45
primitive Rekursion, 169
Primkörper, 39
Primmodell, 133
Primterm, 44
Produkt, xxi
direktes, 42
reduziertes, 163
von Abbildungen, xix
Programmiersprache, 103

Projektionsfunktion, 169
PROLOG, 122
Putnam, 199

Quantifizierung
    beschränkte, 172, 185
Quantor, 33
Quantorenelimination, 157
Quantorenkompression, 188
Quantorenrang, 46
Quasiidentität, Quasivarietät, 100
Quotientenkörper, 146

r.a. (rekursiv aufzählbar), 175
Rabin, 200
Rang (einer Formel), 7, 46
reductio ad absurdum, 19
Redukt, 36, 62
Redukt-Theorie, 66
Reduzierte (einer Formel), 67, 68
reduziertes Produkt, 163
Reflektionsprinzip, 220
Regel, 18
    der Hornresolution, 116
    korrekte, 20, 72
    vom Gentzen-Typ, 20
    vom Hilbert-Typ, 95
Regelinduktion, 21, 73
Rekursionsgleichungen, 169
rekursive (=induktive) Definition, 7
Relation, xix, xx
    antisymmetrische, 36
    konnexe, 36
    reflexive, irreflexive, 36
    symmetrische, 36
    transitive, 36
Relationalstruktur, 34
(P-)Relativierte, 200
repräsentantenunabhängig, 41
Repräsentationssatz, 190
    Stonescher, 40
Repräsentierbarkeit
    einer Booleschen Funktion, 8
    einer Funktion, 187
    eines Prädikates, 184
Resolution, erfolgreiche, 114
Resolutionsbaum, 113
Resolutionshülle, 113
Resolutionskalkül, 113
Resolutionsregel, 113
Resolutionssatz, 115
Resolvente, 113
Ring, 38
Abraham Robinson, 85
Julia Robinson, 199, 201
Rogers, 225

S-invariant, 145
Σ_1-Formel, 185
    spezielle, 208
Σ_1-Prädikat, 185
Σ_1-Vollständigkeit, 186
    beweisbare, 215
Sambin, 225
Satz
    von Cantor, 87
    von Cantor-Bernstein, 135
    von Dzhaparidze, 227
    von Goodstein, 219
    von Goryachev, 228
    von Herbrand, 108
    von Lagrange, 198
    von Lindenbaum, 22
    von Lindström, 101
    von Łoś, 164
    von Löwenheim-Skolem, 87, 135, 136
    von Morley, 139
    von Rosser, 196
    von Steinitz, 153
    von Trachtenbrot, 98
    von Visser, 224
Schnittregel, 20, 100
Separator, 121
Sequenz, 18
Sheffer-Funktion, 2

Signatur, 34
  algebraische, 45
  logische, 4
  nichtlogische, 34
Skolem-Funktionen, 69
SLD-Resolution, 126
SP-invariant, 146
Sprache
  der 1. Stufe (= elementare), 43
  der 2. Stufe, 102
Spracherweiterung, 62
Stetigkeitsschema, 86
Struktur, 34
  algebraische, 34
Subformel, 6, 46
Substitution, 16, 47
  aussagenlogische, 16
  einfache, simultane, 47
  globale, 47
  identische, 48
Substitutionsfunktion, 193
Substitutionssatz, 56
Substruktur, 36
  (endlich) erzeugte, 36
  elementare, 133
substrukturvollständig, 161
Subterm, 44
Subtheorie, 64
Supremum, 39
Symbol, xx
  (explizit) definiertes, 67, 68
  logisches, 3, 43
  von T, 64

T-Modell, 64
Tarski, 17, 131, 168
Tarski-Fragment, 202
Tautologie, 14, 51
teilbar, 185
teilerfremd, 185
Teilwort, xx
Term, 44
termäquivalent, 12
Termalgebra, 44
Termfunktion, 53
Terminduktion, 44
Termmodell, 78, 106
tertium non datur, 51
Theorie
  (endlich) axiomatisierbare, 81
  abzählbare, 87
  elementare (oder 1. Stufe), 64
  entscheidbare, 93, 177
  erblich unentscheidbare, 197
  gödelisierbare, 194
  induktive, 148
  konsistente (erfüllbare), 65
  streng unentscheidbare, 197
  unentscheidbare, 93
  universale, 66
  vollständige, 83
  wesentlich unentscheidbare, 204
Träger, 34
transzendent, 38
Turing-Maschine, 171

U-Resolution, U-Resolvente, 125
UH-Resolution, 126
Ultrafilter, Ultrafiltersatz, 28
Ultraprodukt, Ultrapotenz, 164
Umbenennung, 60, 119
  freie, gebundene, 60
unabhängig, 65, 75
Unendlichkeitsaxiom, 90
unentscheidbar, 81, 93
Unifikationsalgorithmus, 119
Unifikator, 119
  generischer (= allgemeinster), 119
unifizierbar, 119
universaler Teil, 145
Universum, 89
unmittelbarer Nachfolger, 37
Unvollständigkeitssatz
  erster, 195

zweiter, 217
Urelement, 88

Variable, 43
freie, gebundene, 46
Variablenkollision, 55
Varietät, 99
Vaught, 139
Verband, 39
Vereinigung, xix
einer Kette von Strukturen, 148
Verkettung, xx
arithmetische, 174
verträglich, 65
Verum, 5
Vervollständigung, 94
induktive, 150
Vierfarbensatz, 26
Vollständigkeitssatz, 80, 96, 97, 222
aussagenlogischer, 23
Birkhoffscher, 100
Gödelscher, 80
Solovayscher, 223
Vorgängerfunktion, 83

wahr (in einer Struktur), 196
Wahrheitsfunktion, 2
Wahrheitswerte, 2
Wertematrix, 2
wertverlaufsgleich, 9, 66
Wertverlaufsrekursion, 174
widerlegbar, 65
Wirkungsbereich, 46
Wohlordnung, 37
Wort (über A), xx
Worthalbgruppe, 38

$\mathbb{Z}$-Gruppe, 159
Zeichenfolge, xx
Zielklausel, 123

Symbolverzeichnis

$\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ xvii
$\cup$, $\cap$, $\setminus$, $\subseteq$, $\subset$ xvii
$\emptyset$, $\mathfrak{P}M$ xvii
$\bigcup F$, $\bigcap F$ xvii
(a,b), $M \times N$ xvii
$f(a)$, fa, a^f xvii
$\mathrm{dom}\, f$, $\mathrm{ran}\, f$ xvii
$f\colon M \to N$ xvii
$x \mapsto t$, id_M xvii
M^I, M^n xviii
$P\vec{a}$, $\neg P\vec{a}$, χ_P xviii
$f\vec{a}$ xviii
$\mathrm{graph}\, f$ xix
$\prod_{i\in I} M_i$ xix
$\Leftrightarrow$, $\Rightarrow$, &, $\vee$ xix
$:=$ xix
$\boldsymbol{B}_n$ 2
$\wedge$, $\vee$, $\neg$ 3
$\mathcal{F}$, AV 4
$\to$, $\leftrightarrow$, $\top$, $\bot$ 5
$Sf\alpha$ 6
$w\alpha$ 7
$\mathcal{F}_n$, $\alpha^{(n)}$ 8
$\alpha \equiv \beta$ 9
DNF, KNF 10
$w \vDash \alpha$, $\vDash \alpha$ 14
$X \vDash \alpha$, $X \vDash Y$ 15
$\vdash$, $\nvdash$ 18
$\mathtt{C}^+$, $\mathtt{C}^-$ 22
$\mid\!\sim$, MP 29
$r^{\mathcal{A}}$, $f^{\mathcal{A}}$, $c^{\mathcal{A}}$ 35
$\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$ 36
$\mathit{2}$ 39
$\mathcal{A} \simeq \mathcal{B}$ 40
lh 40
$\approx$, $a/{\approx}$, $\mathcal{A}/{\approx}$ 41
$\prod_{i\in I} \mathcal{A}_i$, $\mathcal{A}^I$ 42
$\forall$, $=$ 43
$\mathcal{S}_{\mathcal{L}}$ 43
$\mathcal{T}$ $(= \mathcal{T}_L)$ 44
$\mathrm{var}\,\xi$, $\mathrm{var}\, X$ 44
$\exists$, $\neq$ 45
$\mathcal{L}$, $\mathcal{L}_{\in}$, $\mathcal{L}_{=}$ 45
$\mathrm{rg}\,\alpha$, $\mathrm{qr}\,\alpha$ 46
$\mathrm{frei}\,\varphi$, $\mathrm{gbd}\,\varphi$ 46
$\mathcal{L}^0$, $\mathcal{L}^1$, ... 47
$\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ 47
$\varphi(\vec{x})$, $t(\vec{x})$ 47
$f\vec{t}$, $r\vec{t}$ 47
$\varphi\,\frac{t}{x}$, $\varphi\frac{\vec{t}}{\vec{x}}$, $\varphi_{\vec{x}}(\vec{t})$ 47
ι 47
$\mathcal{M} = (\mathcal{A}, w)$ 49
$r^{\mathcal{M}}$, $f^{\mathcal{M}}$, $c^{\mathcal{M}}$ 49
t^w, $t^{\mathcal{M}}$, $\vec{t}^{\mathcal{M}}$, $t^{\mathcal{A}}$ 49
$\mathcal{M} \vDash \varphi$, $\mathcal{A} \vDash \varphi[w]$ 49
$\mathcal{M}^a_x$, $\mathcal{M}^{\vec{a}}_{\vec{x}}$, $\mathcal{M}^t_x$ 50
$\forall\vec{x}\varphi$ 50
$\vDash \varphi$, $\alpha \equiv \beta$ 51
$\mathcal{A} \vDash \varphi$, $\mathcal{A} \vDash X$ 51
$X \vDash \varphi$ 51
$\varphi^{\forall}$, $X^{\forall}$ 51
T_G, $T_G^{=}$ 52
$\mathcal{A} \vDash \varphi\,[\vec{a}]$ 53
$(\mathcal{A}, \vec{a}) \vDash \varphi$ 53
$t^{\mathcal{A}}(\vec{a})$ 53
$\varphi^{\mathcal{A}}$ 54
$\exists_n$, $\exists_{=n}$, $\top$, $\bot$ 54
$\mathcal{A} \equiv \mathcal{B}$ 55
$\mathcal{M}^{\sigma}$, $\mathcal{M}^{\vec{t}}_{\vec{x}}$ 56
$\exists!$ 57
$\equiv_{\mathcal{A}}$, $\equiv_{\boldsymbol{K}}$ 59
PNF 61
$(\forall x \triangleleft t)$, $(\exists x \triangleleft t)$ 61
$\mid$ (teilt) 63
$\overset{\forall}{\vDash}$ 63
T, $\mathrm{Md}\, T$ 64
Taut 65
$T + \alpha$, $T + S$ 65
$Th\,\mathcal{A}$, $Th\,\boldsymbol{K}$ 66
$\boldsymbol{K} \vDash \alpha$ 66
$\equiv_T$ 66
$\mathcal{L}[r]$, φ^{rd} 67
SNF 70
$\vdash$ 72
Mon, *End* 74
$\mathcal{L}c$, $\mathcal{L}C$ 76
$\vdash_T$, $X \vdash_T \alpha$ 80
ACF 82
$\mathcal{N}$, $\mathtt{S}$, $\mathtt{R}$ 83
$\mathcal{L}_{ar}$ 83
PA, IS 83
$\underline{n}$ $(= \mathtt{S}^n 0)$ 83
$M \sim N$ 87
ZF, ZFC 88
$\{z \in x \mid \varphi\}$ 89
ω 90

255

AI, AF, AC	90
$\vdash$, MP, MQ	95
Λ, $\Lambda1$–$\Lambda10$	95
Tautfin	97
$\overset{B}{\vdash}$	99
$\mathcal{L}_{II}$, $\mathcal{L}_{\mho}$	102
$\mathcal{F}$, $\mathcal{F}X$	106
$\mathcal{L}^k$, Var_k, $\mathcal{T}_k$	107
$\mathcal{F}_k$, $\mathcal{F}_kX$	107
GI(X)	107
$\mathcal{L}_\infty$, $\mathcal{T}_\infty$, $\mathcal{F}_\infty$	108
$\mathcal{C}_U$, $\mathcal{C}_T$	110
$\Box$	112
$\mathcal{K} \vDash H$	112
K, λ	113
$\bar\lambda$, $\bar K$	113
RR, $\overset{RR}{\vdash}$, Rh	113
HR, $\overset{HR}{\vdash}$, $\mathcal{P}$, N	116
$V_{\mathcal{P}}$, $w_{\mathcal{P}}$, $e_{\mathcal{P}}$	117
$\mathfrak{U}$	119
:–	122
GI($\mathcal{K}$)	123
UR, $\overset{UR}{\vdash}$	125
UHR, $\overset{UHR}{\vdash}$	125
$U_\omega R$, $U_\omega HR$	125
$\mathcal{A}_A$, $\mathcal{B}_A$	132
$D\mathcal{A}$	132
$D_{el}\mathcal{A}$	133
$\mathcal{A} \preccurlyeq \mathcal{B}$	133
$\lvert M\rvert$	134
$\aleph_0$, $\aleph_1$, $2^{\aleph_0}$	135
CH	135
DO, DO_{00}, ...	137
L, R	138
ACF_p	138
$\langle X\rangle$, $\equiv_X$	140
SO, SO_{00}, ...	142
$\Gamma_k(\mathcal{A},\mathcal{B})$, $\sim_k$	142
$\mathcal{A}\equiv_k\mathcal{B}$	143
$T_\forall$	145
$\mathcal{A}\subseteq_{ec}\mathcal{B}$	149
$D_\forall\mathcal{A}$	149
RCF	153
ZG, ZG_0	159
$\approx_F$, $\prod_{i\in I}^F \mathcal{A}_i$	163
$\mathcal{A}^I/F$	164
$\mathbf{F}_n$	169
$h[g_1,\ldots,g_m]$	169
$P[g_1,\ldots,g_m]$	169
$\boldsymbol{Oc}$, $\boldsymbol{Op}$, $\boldsymbol{O\mu}$	169
$f=\boldsymbol{Op}(g,h)$	169
I^n_ν	169
K^n_c, $\dot-$, δ	170
sg, prim, rest	171
$\mu k[P(\vec a,k)]$	172
$\mu k\leqslant m[P(\vec a,k)]$	172
$\wp$	172
$\mathrm{kgV}\{a_\nu \mid \nu\leqslant n\}$	172
$\langle a_1,\ldots,a_n\rangle$	173
Gz, ℓ	173
$(a)_i$, $(a)_{last}$	174
$*$, $\boldsymbol{Oq}$, $\bar f$	174
bz^m_n	175
$\dot\xi$, $\dot\varphi$	176
$\dot W$, $\dot P$, $\dot X$, ...	177
bew_T, bwb_T	178
$\tilde\neg$, $\tilde\wedge$, $\tilde\rightarrow$	178
$\tilde{=}$, $\tilde\forall$, $\tilde{\mathsf{S}}$, $\tilde+$, $\tilde\cdot$	178
$\mathcal{T}_{prim}$, $\mathcal{L}_{prim}$	179
$[m]^k_i$	180
$\leqslant$, $<$	182
Q, N	182
Δ_0, Σ_1, Π_1, Δ_1	185
$\perp$ (teilerfremd)	185
$I\Delta_0$	186
$\boldsymbol\beta$, `beta`	189
$\ulcorner\varphi\urcorner$, $\ulcorner t\urcorner$, $\ulcorner\Phi\urcorner$	191
$\mathtt{bew}_T$, $\mathtt{bwb}_T$	191
$\underline{\dot a}$, zf, $\dot\alpha_{\vec x}(\underline{\vec a})$	193
sb_x, $\mathrm{sb}_{\vec x}$, $\mathrm{sb}_\emptyset$	193
`prov`	196
$\alpha^{\mathsf P}$, $X^{\mathsf P}$	200
T^Δ, $\mathcal{B}_\Delta$	200
TF, $\mathsf{ZFC}_{\text{fin}}$	202
Σ_n, Π_n, Δ_n	205
$\Box(x)$, $\Box\alpha$, $\Diamond\alpha$	210
$\mathtt{Con}_T$	210
$D0$–$D3$	210
$d0$, $d1$, ...	210
$D1^*$	211
$\Box[\varphi]$	214
$\mathsf{PA}^\perp$	218
$D4$, $D4^\circ$	218
T^n, T^ω	220
$\Box^n\alpha$	220
$\Box$, $\Box^n$, $\Diamond$	221
$\mathfrak{F}_\Box$, MN	221
G, $\vdash_{\mathsf G}$	221
$P\Vdash H$	221
$\vDash_{\mathsf G}$, $\equiv_{\mathsf G}$	221
$H^\imath$	223
$\mathsf G_n$, GS	224
$\boxed{1}$, $\Diamond$	226
GD	227
$Rf_{\mathrm T}$	228
Gi, Gj	229