Kapitel 1

Aussagenlogik

Die Aussagenlogik, worunter hier die 2-wertige Aussagenlogik verstanden sei, entstand aus der Analyse von Verknüpfungen gegebener Aussagen A, B, wie z.B.

A und B, A oder B, nicht A, wenn A so B.

Dies sind Verknüpfungen, die sich mit 2-wertiger Logik näherungsweise beschreiben lassen. Es gibt andere Aussagenverknüpfungen mit temporalem oder lokalem Aspekt, wie etwa *erst A dann B*, oder *hier A dort B* sowie modale Verknüpfungen aller Art, deren Analyse den Rahmen einer 2-wertigen Logik übersteigt und die Gegenstand einer temporalen, modalen oder sonstigen Teildisziplin einer mehrwertigen oder nichtklassischen Logik sind. Auch die anfänglich erwähnten Verknüpfungen haben in anderen Auffassungen von Logik und auch in der natürlichen Sprache oft einen Sinn, der mit 2-wertiger Logik nur unvollständig zu erfassen ist.

Von diesen Phänomenen wird in der 2-wertigen Aussagenlogik abstrahiert. Das vereinfacht die Betrachtungen erheblich und hat überdies den Vorteil, dass sich viele Begriffe wie der des Folgerns, der Regelinduktion, der Resolution usw. auf einer einfachen und durchsichtigen Ebene präsentieren lassen. Dies spart viele Worte, wenn in Kapitel **2** die entsprechenden prädikatenlogischen Begriffe zur Debatte stehen.

Wir behandeln hier nicht alles, was im Rahmen 2-wertiger Aussagenlogik einer Behandlung zugänglich ist, etwa 2-wertige Fragmente und Probleme der Definierbarkeit und Interpolation. Der Leser sei diesbezüglich z.B. auf [KK] oder [Ra1] verwiesen. Dafür wird etwas mehr über aussagenlogische Kalküle gesagt.

Es gibt vielfältige Anwendungen der Aussagenlogik. Wir verzichten aber auf die Darstellung direkter technischer Anwendungen, etwa in der Synthese logischer Schaltungen und dazugehörigen Optimierungsproblemen, sondern beschreiben ausführlich einige nützliche Anwendungen des Kompaktheitssatzes.

1.1 Boolesche Funktionen und Formeln

Die 2-wertige Logik beruht auf zwei Grundprinzipien, dem *Zweiwertigkeitsprinzip*, welches nur zwei Wahrheitswerte in Betracht zieht, nämlich *wahr* und *falsch*, sowie dem *Extensionalitätsprinzip*. Danach hängt der Wahrheitswert einer zusammengesetzten Aussage nur von den Wahrheitswerten ihrer Bestandteile ab, nicht aber noch von deren Sinn. Es ist plausibel, dass durch diese beiden Prinzipien in der Regel nur eine Idealisierung tatsächlicher Verhältnisse formuliert wird.

Fragen nach Wahrheitsgraden oder dem Sinngehalt von Aussagen werden in der 2-wertigen Logik ignoriert. Dennoch oder gerade deswegen ist dies eine erfolgreiche wissenschaftliche Methode. Man muss nicht einmal wissen, was genau die beiden nachfolgend mit 1 und 0 bezeichneten Wahrheitswerte *wahr* und *falsch* eigentlich sind. Man darf sie, wie dies im Folgenden auch geschieht, getrost mit den beiden Symbolen 1 und 0 identifizieren, oder mit anderen gefälligen Symbolen, z.B. $\top$ und $\bot$, oder `t` und `f`. Das hat den Vorteil, dass alle denkbaren Interpretationen von *wahr* und *falsch* offengehalten werden, z.B. auch solche rein technischer Natur, etwa die beiden Zustände eines Schaltelements in einem logischen Schaltkreis.

Unter einer n-stelligen *Booleschen Funktion* oder *Wahrheitsfunktion* verstehe man eine beliebige Funktion $f\colon \{0,1\}^n \mapsto \{0,1\}$. Deren Gesamtheit sei mit $\boldsymbol{B}_n$ bezeichnet. $\boldsymbol{B}_0$ enthält nur die beiden Konstanten 0 und 1. Die *Negation* $\neg$ mit $\neg 1 = 0$ und $\neg 0 = 1$ ist eine der vier 1-stelligen Booleschen Funktionen. Weil es 2^n viele n-Tupel aus $0,1$ gibt, sieht man leicht, dass $\boldsymbol{B}_n$ genau 2^{2^n} viele Funktionen enthält.

Die Konjunktion A *und* B aus den beiden Aussagen A, B, die in formalisierten Sprachen meist mit $A \wedge B$ oder $A \,\&\, B$ bezeichnet wird, ist nach dem Wortsinn von *und* genau dann wahr, wenn A, B beide wahr sind, und sonst falsch. Der Konjunktion entspricht also eine 2-stellige Boolesche Funktion, die $\wedge$*-Funktion* oder *et-Funktion* und häufig kurz mit $\wedge$ bezeichnet. Diese ist durch ihre *Wertetabelle* oder *Wertematrix* $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ gegeben. Dabei bezeichne stets $\begin{pmatrix} 1\circ 1 & 1\circ 0 \\ 0\circ 1 & 0\circ 0 \end{pmatrix}$ die Wertematrix einer 2-stelligen Booleschen Funktion $\circ$, also $1 \wedge 1 = 1$, sowie $1 \wedge 0 = 0 \wedge 1 = 0 \wedge 0 = 0$.

Die Tabelle auf der nächsten Seite enthält in der ersten Spalte die gebräuchlichen 2-stelligen Aussagenverknüpfungen mit Beispielen ihrer sprachlichen Realisierung, in der zweiten Spalte ihre wichtigsten Symbole und in der dritten die Wertematrix der entsprechenden Wahrheitsfunktion. Die Disjunktion ist das *nichtausschließende oder*. Sie ist klar zu unterscheiden von der *Antivalenz* (dem *ausschließenden oder*). Letztere entspricht der Addition modulo 2, deswegen die Bezeichnung durch $+$. In schalttechnischen Systemen werden die Funktionen $+, \downarrow, \uparrow$ oft durch *xor*, *nor* und *nand* symbolisiert. Die letztgenannte heißt auch die *Sheffer-Funktion*.

Man muss eine Aussagenverknüpfung und die entsprechende Wahrheitsfunktion nicht gleichbezeichnen – z.B. könnte man $\wedge$ für die Konjunktion und *et* für die entsprechende Boolesche Funktion wählen – aber damit erschafft man nur neue Bezeichnungen, keine neuen Einsichten. Die Bedeutung eines Symbols wird stets aus dem Zusammenhang hervorgehen. Sind α, β Aussagen einer formalen Sprache, so bezeichnet z.B. $\alpha \wedge \beta$ deren Konjunktion; sind a, b hingegen Wahrheitswerte, bezeichnet $a \wedge b$ eben einen Wahrheitswert. Mitunter möchte man allerdings auch über die logischen Symbole $\wedge$, $\vee$, $\neg, \ldots$ selbst reden und ihre Bedeutungen vorübergehend in den Hintergrund drängen. Man spricht dann von den *Junktoren* $\wedge, \vee, \neg, \ldots$

Aussagenverknüpfung	**Symbol**	**Wertematrix**
Konjunktion *A und B;* *Sowohl A als auch B*	$\wedge$, &	$\begin{matrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{matrix}$
Disjunktion (Alternative) *A oder B*	$\vee$	$\begin{matrix}1 & 1\\ 1 & 0\end{matrix}$
Implikation (Subjunktion) *Wenn A so B; Aus A folgt B;* *A nur dann wenn B*	$\rightarrow$, $\Rightarrow$	$\begin{matrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{matrix}$
Äquivalenz (Bijunktion) *A genau dann wenn B;* *A dann und nur dann wenn B*	$\leftrightarrow$, $\Leftrightarrow$	$\begin{matrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{matrix}$
Antivalenz *Entweder A oder B*	$+$	$\begin{matrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{matrix}$
Nihilition *Weder A noch B*	$\downarrow$	$\begin{matrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{matrix}$
Unverträglichkeit *Nicht zugleich A und B*	$\uparrow$	$\begin{matrix}0 & 1\\ 1 & 1\end{matrix}$

Aussagen, die mit den in der Tabelle angegebenen oder weiteren Verknüpfungen zusammengesetzt sind, können in dem Sinne bedeutungsgleich oder logisch äquivalent sein, dass ihnen bei jeweils gegebenen Wahrheitswerten ihrer Bestandteile stets derselbe Wahrheitswert entspricht. Dies ist z.B. der Fall bei den Aussagen

$$A \textit{ sofern } B, \quad A \textit{ falls } B, \quad A \textit{ oder nicht } B.$$

Diese Verknüpfung wird gelegentlich auch mit $A \leftarrow B$ bezeichnet und heiße die *konverse Implikation*. Sie erschien deswegen nicht in der Tabelle, weil sie durch Vertauschen der Argumente A, B aus der Implikation hervorgeht. Diese und ähnliche

Gründe sind dafür verantwortlich, warum nur wenige der 16 zweistelligen Booleschen Funktionen einer Bezeichnung überhaupt bedürfen.

Um logische Äquivalenzen zu erkennen und zu beschreiben ist die Schaffung eines Formalismus oder einer formalen Sprache nützlich. Die Situation ist vergleichbar mit derjenigen in der Arithmetik, wo sich allgemeine Gesetzmäßigkeiten bequemer und klarer mittels gewisser Formeln zum Ausdruck bringen lassen.

Wir betrachten aussagenlogische Formeln genau wie arithmetische Terme als Zeichenfolgen, die in bestimmter Weise aus Grundsymbolen aufgebaut sind. Zu den Grundsymbolen zählen hier wie dort sogenannte Variablen, die im vorliegenden Falle *Aussagenvariablen* heißen und deren Gesamtheit mit *AV* bezeichnet sei. Meist wählt man hierfür einer Tradition entsprechend die Symbole $p_0, p_1, \ldots$ Die Variablennumerierung unten beginnt aber mit p_1, was einer bequemeren Darstellung Boolescher Funktionen dient. Zu den Grundsymbolen gehören ferner gewisse logische Zeichen wie $\wedge, \vee, \neg, \ldots$, die auf der arithmetischen Ebene den Zeichen $+, \cdot, \ldots$ entsprechen. Schließlich verwendet man meistens gewisse technische Hilfssymbole, nachfolgend nur die beiden Klammern (,).

Jedesmal, wenn von einer aussagenlogischen Sprache die Rede ist, muss die Menge *AV* ihrer Variablen und die Menge der logischen Symbole, ihre *logische Signatur*, vorgegeben sein. So ist für Anwendungen der Aussagenlogik wie z.B. in Abschnitt **1.5** wichtig, dass *AV* eine beliebige Menge sein kann und nicht wie oben angedeutet abzählbar sein muss. Um konkret zu sein definieren wir ausgehend von den Symbolen $(\, , \,)\, , \wedge\, , \vee\, , \neg\, , p_1, p_2, \ldots$ eine aussagenlogische Sprache $\mathcal{F}$ wie folgt:

Rekursive Formelbestimmung

(F1) Die Variablen $p_1, p_2, \ldots$ sind Formeln, auch *Primformeln* genannt.

(F2) Sind α, β Formeln, so auch die Zeichenfolgen $(\alpha \wedge \beta)$, $(\alpha \vee \beta)$ und $\neg\alpha$.

Diese Erklärung ist so zu verstehen, dass nur die nach (F1) und (F2) bestimmten Zeichenfolgen in diesem Zusammenhang Formeln sind. Mit anderen Worten, $\mathcal{F}$ ist die kleinste (d.h. der Durchschnitt) aller Mengen Z von Zeichenfolgen aus obigen Symbolen mit den Eigenschaften

$$\text{(f1)}\ p_1, p_2, \dots \in Z, \quad \text{(f2)}\ \alpha, \beta \in Z \ \Rightarrow\ (\alpha \wedge \beta), (\alpha \vee \beta), \neg\alpha \in Z.$$

Beispiel. $(p_1 \wedge (p_2 \vee \neg p_1))$ ist eine Formel. Deren Anfang $(p_1 \wedge (p_2 \vee \neg p_1)$ hingegen nicht, weil eine schließende Klammer fehlt. Denn es ist anschaulich klar und wird weiter unten streng bewiesen, dass die Anzahl der in einer Formel vorkommenden Linksklammern identisch ist mit der Anzahl der dort vorkommenden Rechtsklammern. Jeder echte Anfang der obigen Formel verletzt offenbar diese Bedingung.

Die so definierten Formeln bezeichnen wir etwas genauer als *Boolesche Formeln*, weil sie mit der *Booleschen Signatur* $\{\wedge, \vee, \neg\}$ erzeugt wurden. Wenn weitere Junktoren zur logischen Signatur gehören sollen wie etwa $\rightarrow$ oder $\leftrightarrow$, muss (F2) entsprechend erweitert werden. Solange aber nichts anderes gesagt wird, sind $(\alpha \rightarrow \beta)$ und $(\alpha \leftrightarrow \beta)$ nur Abkürzungen: $(\alpha \rightarrow \beta) := \neg(\alpha \wedge \neg\beta)$ und $(\alpha \leftrightarrow \beta) := ((\alpha \rightarrow \beta) \wedge (\beta \rightarrow \alpha))$. Einem solchen Vorgehen liegen natürlich entsprechende logische Äquivalenzen zugrunde. Gelegentlich ist es nützlich, Symbole für das stets Falsche und das stets Wahre in der logischen Signatur zu haben, etwa $\bot$ und $\top$, *Falsum* und *Verum* genannt und auch mit 0 und 1 bezeichnet. Diese sind als zusätzliche Primformeln zu verstehen, und Klausel (F1) ist entsprechend zu erweitern. In der Booleschen Signatur lassen sich $\bot$ und $\top$ etwa durch $\bot := (p_1 \wedge \neg p_1)$ und $\top := \neg\bot$ definieren.

Vorerst sei $\mathcal{F}$ die Menge aller Booleschen Formeln. Doch gilt alles, was nachfolgend über $\mathcal{F}$ gesagt wird, sinngemäß auch für Formeln einer beliebigen aussagenlogischen Sprache. Aussagenvariablen werden im Folgenden mit den Buchstaben $p, q, \ldots$ bezeichnet, Formeln mit $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varphi, \ldots$, Primformeln auch mit π, und Formelmengen mit X, Y, Z, wobei diese Buchstaben auch indiziert sein können.

Zwecks Klammerersparnis bei der Niederschrift von Formeln verabreden wir gewisse Regeln, die in ähnlicher Form auch bei der Niederschrift arithmetischer Terme verwendet werden. Hierin bezeichnet $\circ$ einen beliebigen 2-stelligen Junktor.

1. Außenklammern in Formeln der Gestalt $(\alpha \circ \beta)$ dürfen weggelassen werden. Es darf also z.B. $\neg p_1 \vee (p_2 \wedge p_1)$ für $(\neg p_1 \vee (p_2 \wedge p_1))$ geschrieben werden;

2. In der Reihenfolge $\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$ trennt jeder Junktor stärker als alle vorangehenden. Man darf z.B. $\neg p_1 \vee p_2 \wedge p_1$ statt $(\neg p_1 \vee (p_2 \wedge p_1))$ schreiben;

3. Bei mehrfacher Zusammensetzung mit demselben Junktor wird Rechtsklammerung [1)] verwendet. So steht $\alpha_0 \rightarrow \alpha_1 \rightarrow \alpha_2$ für $\alpha_0 \rightarrow (\alpha_1 \rightarrow \alpha_2)$. Anstelle von $\alpha_0 \wedge \ldots \wedge \alpha_n$ und $\alpha_0 \vee \ldots \vee \alpha_n$ wird auch $\bigwedge_{i \leqslant n} \alpha_i$ bzw. $\bigvee_{i \leqslant n} \alpha_i$ geschrieben.

Solche Verabredungen beruhen auf einer verlässlichen Syntax, in deren Rahmen auch anschaulich klare Tatsachen – z.B. die Übereinstimmung der Anzahlen der Links- und Rechtsklammern in einer Formel – streng beweisbar sind. Derartige Beweise führt man in der Regel induktiv über den Formelaufbau. Um dies zu verdeutlichen, notieren wir das Zutreffen einer Eigenschaft $\mathcal{E}$ auf eine Zeichenfolge φ einfach durch $\mathcal{E}\varphi$. Zum Beispiel bedeute $\mathcal{E}$ 'In φ kommen gleichviele Rechts- wie Linksklammern vor'. Dann gilt $\mathcal{E}$ trivialerweise für Primformeln, und gelten $\mathcal{E}\alpha, \mathcal{E}\beta$, so offenbar auch $\mathcal{E}(\alpha \wedge \beta), \mathcal{E}(\alpha \vee \beta)$ und $\mathcal{E}\neg\alpha$. Daraus darf man schließen, dass $\mathcal{E}$ auf alle Formeln zutrifft. Denn dies ist ein besonders einfacher Anwendungsfall von folgendem

[1)] Diese hat gegenüber Linksklammerung Vorteile bei der Niederschrift von Tautologien in $\rightarrow$, siehe **1.3**.

Beweisprinzip durch Formelinduktion. *Es sei $\mathcal{E}$ eine Eigenschaft von Zeichenfolgen derart, dass*

(o) $\mathcal{E}\pi$ *für alle Primformeln* π,

(s) $\mathcal{E}\alpha, \mathcal{E}\beta \Rightarrow \mathcal{E}(\alpha \wedge \beta), \mathcal{E}(\alpha \vee \beta), \mathcal{E}\neg\alpha$, *für alle* $\alpha, \beta \in \mathcal{F}$.

Dann gilt $\mathcal{E}\varphi$ für alle Formeln φ.

Die Rechtfertigung dieses Prinzips ist einfach: Die Menge Z aller Zeichenfolgen mit der Eigenschaft $\mathcal{E}$ genügt wegen (o) und (s) den Bedingungen (f1) und (f2) Seite 4. Nun ist $\mathcal{F}$ aber die kleinste Menge dieser Art. Also $\mathcal{F} \subseteq Z$, d.h. $\mathcal{E}\varphi$ gilt für alle φ.

Man bestätigt induktiv leicht den anschaulich klaren Sachverhalt, dass eine zusammengesetzte Formel $\varphi \in \mathcal{F}$ (d.h. φ ist keine Primformel) entweder von der Gestalt $\neg\alpha$ oder $(\alpha \circ \beta)$ mit $\alpha, \beta \in \mathcal{F}$ und $\circ \in \{\wedge, \vee\}$ ist. Weniger einfach ist der Nachweis, dass eine derartige Zerlegung eindeutig ist, auch die *eindeutige Rekonstruktionseigenschaft* genannt. Zum Beispiel hat $(\alpha \wedge \beta)$ keine Zerlegung $(\alpha' \vee \beta')$ mit anderen Formeln α', β'. Um aber den Fluss der Dinge nicht aufzuhalten, behandeln wir diese Sachverhalte mit ausreichenden Hinweisen in den Übungen,

Bemerkung 1. Klammern werden für die eindeutige Rekonstruktionseigenschaft nicht wirklich benötigt. Vielmehr lassen sich aussagenlogische Formeln, ebenso wie z.B. auch arithmetische Terme, klammerfrei notieren, und zwar in *polnischer Notation*, oder auch in umgekehrter polnischer Notation, die in einigen Programmiersprachen Verwendung findet. Die Idee besteht darin, (F2) wie folgt zu verändern: Mit α, β sind auch die Zeichenfolgen $\wedge\alpha\beta$, $\vee\alpha\beta$, $\neg\alpha$ Formeln. Die umgekehrte polnische Notation unterscheidet sich von der angegebenen nur dadurch, dass die Junktoren den Argumenten nachgestellt werden. Die Entzifferung dieser Notationen ist für ungeübte Leser etwas mühsam, denn sie haben eine sehr hohe Informationsdichte. Dafür können Computer sie besonders schnell lesen und verarbeiten. Die Klammernotation hat gegenüber den klammerfreien im Grunde nur den Vorteil, dass sie die optische Entzifferung durch „Informationsverdünnung“ erleichtert. Obwohl die eindeutige Rekonstruktion für die Polnische Notation nicht unmittelbar evident ist, ist der Beweis nicht schwieriger als für die Klammernotation. Ganz einfach wird dieser Nachweis übrigens dann, wenn man eine Boolesche Formel nicht als Zeichenfolge, sondern als ein spezielles Tupel von Zeichenfolgen definiert, das die Entstehungsgeschichte der Formel kodiert. Es gibt demnach durchaus mehrere Präzisionsmöglichkeiten des Begriffs einer aussagenlogischen Formel.

Anschaulich ist klar, was eine *Subformel* (oder *Teilformel*) einer Formel φ ist. Zum Beispiel ist $(p_2 \wedge p_1)$ eine Subformel von $(\neg p_1 \vee (p_2 \wedge p_1))$. Auch sollte jede Formel Subformel von sich selbst sein. Für manche Zwecke ist es jedoch bequemer, die Menge $\mathit{Sf}\varphi$ aller Subformeln von φ wie folgt zu kennzeichnen:

$$\mathit{Sf}\pi = \{\pi\} \text{ für Primformeln } \pi \quad ; \quad \mathit{Sf}\neg\alpha = \mathit{Sf}\alpha \cup \{\neg\alpha\},$$

$$\mathit{Sf}(\alpha \circ \beta) = \mathit{Sf}\alpha \cup \mathit{Sf}\beta \cup \{(\alpha \circ \beta)\} \text{ für einen 2-stelligen Junktor } \circ.$$

Hier liegt eine rekursive (oder induktive) Definition über den Formelaufbau vor. Ähnlich erklärt man z.B. auch den mit $\operatorname{rg}\varphi$ bezeichneten *Rang* von φ, der ein mitunter bequemeres Komplexitätsmaß für φ darstellt als die Länge von φ als Zeichenfolge. Sei $\operatorname{rg}\pi = 0$ für Primformeln π, und wenn $\operatorname{rg}\alpha$ und $\operatorname{rg}\beta$ schon definiert sind, sei

$$\operatorname{rg}\neg\alpha = \operatorname{rg}\alpha + 1, \quad \operatorname{rg}(\alpha \wedge \beta) = \operatorname{rg}(\alpha \vee \beta) = \max\{\operatorname{rg}\alpha, \operatorname{rg}\beta\} + 1.$$

Wir verzichten auf eine allgemeine Formulierung dieses Definitionsverfahrens, weil es sehr anschaulich ist und durch die obigen und noch folgenden Beispiele ausreichend verdeutlicht wird. Seine Rechtfertigung beruht, wie man sich denken kann, wesentlich auf der eindeutigen Rekonstruktionseigenschaft. Ist eine Eigenschaft durch Formelinduktion über den Aufbau von φ zu beweisen, wird dies oft schlagwortartig als *Beweis durch Induktion über* φ angekündigt. Analog wird die rekursive Definition einer auf $\mathcal{F}$ erklärten Funktion f oft kurz durch die Redewendung *wir definieren f rekursiv* (nicht ganz treffend auch *induktiv*) *über* φ angekündigt.

Da die Wahrheitswerte zusammengesetzter Aussagen nur abhängen von den Wahrheitswerten ihrer aussagenlogischen Bestandteile, dürfen wir den Aussagenvariablen in Formeln φ statt Aussagen auch Wahrheitswerte zuordnen, oder wie man zu sagen pflegt, diese mit Wahrheitswerten *belegen*. Für jede solche Belegung lässt φ sich auswerten, also ein Wahrheitswert errechnen. Ähnlich wird in der reellen Arithmetik ein Term ausgewertet, nur ist dessen Wert dann eine reelle Zahl. Ein arithmetischer Term t in den Variablen $x_1, \dots, x_n$ beschreibt eine n-stellige reelle Funktion, eine Formel φ in den Variablen $p_1, \dots, p_n$ hingegen eine n-stellige Boolesche Funktion. Dabei müssen nicht alle Variablen $p_1, \dots, p_n$ in φ wirklich vorkommen.

Um das Gesagte kurz zu formulieren, heiße eine Abbildung $w\colon AV \to \{0,1\}$ eine aussagenlogische *Belegung*, auch (aussagenlogisches) *Modell* genannt. w lässt sich rekursiv über den Formelaufbau eindeutig zu einer ebenfalls mit w bezeichneten Abbildung von ganz $\mathcal{F}$ nach $\{0,1\}$ fortsetzen: Es sei einfach $w(\alpha \wedge \beta) = w\alpha \wedge w\beta$, $w(\alpha \vee \beta) = w\alpha \vee w\beta$ und $w\neg\alpha = \neg w\alpha$. Dabei bezeichnen $\wedge$, $\vee$, $\neg$ auf der rechten Seite dieser Gleichungen natürlich die entsprechenden Booleschen Funktionen. Wenn vom *Wert $w\alpha$ einer Formel α bei der Belegung w der Variablen* die Rede ist, meint man den sich gemäß dieser Fortsetzung ergebenden Wert. Man könnte die erweiterte Abbildung z.B. auch mit $\hat{w}$ bezeichnen, doch ist eine Bezeichnungs-Unterscheidung dieser Abbildung von $w\colon AV \to \{0,1\}$ nicht zwingend.

Enthält die logische Signatur auch andere Junktoren, ist die Wertbestimmung entsprechend zu ergänzen, z.B. durch $w(\alpha \to \beta) = w\alpha \to w\beta$. Ist $\alpha \to \beta$ hingegen definiert wie bei uns, muss diese Gleichung beweisbar sein. In der Tat, sie ist es, denn $w(\alpha \to \beta) = w\neg(\alpha \wedge \neg\beta) = \neg w(\alpha \wedge \neg\beta) = \neg(w\alpha \wedge \neg w\beta) = w\alpha \to w\beta$. Auch $\bot$ und $\top$ wurden so definiert, dass stets $w\bot = 0$ und $w\top = 1$.

Es bezeichne $\mathcal{F}_n$ die Menge der Formeln von $\mathcal{F}$ in höchstens den Variablen $p_1, \ldots, p_n$, $n > 0$. Dann ist plausibel, dass $w\alpha$ für $\alpha \in \mathcal{F}_n$ lediglich abhängt von den Werten der $p_1, \ldots, p_n$. Also $(*): w\alpha = w'\alpha$, wenn $wp_i = w'p_i$ für $i = 1, \ldots, n$. Der einfache Beweis erfolgt durch Induktion über den Aufbau der Formeln aus $\mathcal{F}_n$: $(*)$ ist richtig für $p \in \mathcal{F}_n$, und gilt $(*)$ für $\alpha, \beta \in \mathcal{F}_n$, so offenbar auch für $\neg\alpha, \alpha \wedge \beta$ und $\alpha \vee \beta$.

Definition. Die Formel $\alpha \in \mathcal{F}_n$ *repräsentiert* die n-stellige Boolesche Funktion f, falls $w\alpha = fw\vec{p}$ für alle Belegungen w; dabei sei $w\vec{p} := (wp_1, \ldots, wp_n)$.

Weil $w\alpha$ für $\alpha \in \mathcal{F}_n$ durch $wp_1, \ldots, wp_n$ schon eindeutig festgelegt ist, repräsentiert α nur genau eine Funktion $f \in \boldsymbol{B}_n$, die gelegentlich auch mit $\alpha^{(n)}$ bezeichnet wird. So repräsentieren $p_1 \wedge p_2$ und $\neg(\neg p_1 \vee \neg p_2)$ beide die $\wedge$-Funktion, wie man sich anhand einer Tabelle leicht klarmacht. $\neg p_1 \vee p_2$ und $\neg(p_1 \wedge \neg p_2)$ repräsentieren beide die $\rightarrow$-Funktion, und $p_1 \vee p_2$, $\neg(\neg p_1 \wedge \neg p_2)$ und $(p_1 \rightarrow p_2) \rightarrow p_2$ allesamt die $\vee$-Funktion. Die *oder*-Verknüpfung ist demnach allein durch die Implikation ausdrückbar.

Man beachte hierbei: Da z.B. $\alpha := p_1 \vee p_2$ nicht nur zu $\mathcal{F}_2$, sondern auch zu $\mathcal{F}_3$ gehört, wird auch die Boolesche Funktion $f\colon (x_1, x_2, x_3) \mapsto x_1 \vee x_2$ durch α repräsentiert. Das dritte Argument ist allerdings nur ein „fiktives", oder anders formuliert, f ist „nicht wesentlich" 3-stellig, ebensowenig wie $(x_1, x_2, x_3) \mapsto x_1 \vee x_3$.

Bemerkung 2. Allgemein heißt eine Operation $f\colon M^n \to M$ *wesentlich n-stellig*, wenn f keine fiktiven Argumente hat. Dabei heißt das i-te Argument von f ein *fiktives*, wenn

$$f(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_n) = f(x_1, \ldots, x_i', \ldots, x_n), \text{ für alle } x_1, \ldots, x_n, x_i' \in M.$$

Die identische und die $\neg$-Funktion sind die wesentlich einstelligen Booleschen Funktionen, und von den 16 zweistelligen Funktionen sind nur 10 wesentlich zweistellig. Ist v_n die Anzahl aller und w_n die Anzahl aller wesentlich n-stelligen Booleschen Funktionen, beweist man unschwer $v_n = \sum_{i \leqslant n} \binom{n}{i} w_i$. Auflösung nach w_n ergibt $w_n = \sum_{i \leqslant n} (-1)^{n-i} \binom{n}{i} v_i$.

Übungen

1. $f \in \boldsymbol{B}_n$ heißt *linear*, wenn $f(x_1, \ldots, x_n) = a_0 + a_1 x_1 + \cdots + a_n x_n$ für gewisse $a_0, \ldots, a_n \in \{0, 1\}$. Dabei bezeichne $+$ die Addition modulo 2 (exklusive Disjunktion) und es sei $a_i x_i = x_i$ für $a_i = 1$ und $a_i x_i = 0$ sonst. Man bestimme für jedes n die Anzahl der n-stelligen linearen Booleschen Funktionen.

2. Man beweise: ein echter Anfang ξ einer Formel α ist keine Formel.

3. Man beweise mit Hilfe von Übung 2 die eindeutige Rekonstruktionseigenschaft für $\mathcal{F}$: $(\alpha \circ \beta) = (\alpha' \circ' \beta')$ impliziert $\alpha = \alpha'$, $\circ = \circ'$ und $\beta = \beta'$.

4. Sei ξ eine Zeichenfolge. Man zeige, mit $\neg\xi$ ist auch ξ eine Formel. Ähnlich zeigt man $\alpha, (\alpha \wedge \xi) \in \mathcal{F} \Rightarrow \xi \in \mathcal{F}$ und $\alpha, (\alpha \rightarrow \xi) \in \mathcal{F} \Rightarrow \xi \in \mathcal{F}$.

1.2 Semantische Äquivalenz und Normalformen

Der Buchstabe w bezeichnet bis zum Ende dieses Kapitels immer eine aussagenlogische Belegung oder ihre Fortsetzung auf ganz $\mathcal{F}$. Formeln α, β heißen (logisch oder semantisch) *äquivalent*, auch *wertverlaufsgleich*, symbolisch $\alpha \equiv \beta$, wenn $w\alpha = w\beta$ für alle w. So ist z.B. $\alpha \equiv \neg\neg\alpha$. Offenbar gilt $\alpha \equiv \beta$ genau dann, wenn für ein beliebiges n mit $\alpha, \beta \in \mathcal{F}_n$ beide Formeln dieselbe n-stellige Boolesche Funktion repräsentieren. Daher können höchstens 2^{2^n} viele Formeln aus $\mathcal{F}_n$ paarweise nicht äquivalent sein, denn es gibt nicht mehr als 2^{2^n} viele Funktionen $f \in \boldsymbol{B}_n$.

In der Arithmetik schreibt man oft einfach $s = t$ um auszudrücken, dass die Terme s, t dieselbe Funktion repräsentieren; z.B. soll $(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$ die Wertverlaufsgleichheit des linken und rechten Terms zum Ausdruck bringen. Das kann man sich erlauben, weil die Termsyntax in der Arithmetik eine untergeordnete Rolle spielt. In der formalen Logik, wie immer dann, wenn syntaktische Betrachtungen im Vordergrund stehen, benutzt man das Gleichheitszeichen in $\alpha = \beta$ nur für die syntaktische Übereinstimmung der Zeichenfolgen α und β. Die Wertverlaufsgleichheit musste daher anders bezeichnet werden. Offenbar gelten für alle α, β, γ

$$
\begin{array}{rlrll}
(\alpha\wedge\beta)\wedge\gamma \equiv & \alpha\wedge\beta\wedge\gamma, & (\alpha \vee \beta) \vee \gamma \equiv & \alpha \vee \beta \vee \gamma & \text{(Assoziativität);}\\
\alpha\wedge\beta \equiv & \beta\wedge\alpha, & \alpha \vee \beta \equiv & \beta \vee \alpha & \text{(Kommutativität);}\\
\alpha\wedge\alpha \equiv & \alpha, & \alpha \vee \alpha \equiv & \alpha & \text{(Idempotenz);}\\
\alpha\wedge(\alpha\vee\beta) \equiv & \alpha, & \alpha \vee \alpha\wedge\beta \equiv & \alpha & \text{(Absorption);}\\
\alpha\wedge(\beta\vee\gamma) \equiv & \alpha\wedge\beta \vee \alpha\wedge\gamma, & \alpha \vee \beta\wedge\gamma \equiv & (\alpha\vee\beta)\wedge(\alpha\vee\gamma) & \text{(Distributivität);}\\
\neg(\alpha\wedge\beta) \equiv & \neg\alpha \vee \neg\beta, & \neg(\alpha \vee \beta) \equiv & \neg\alpha\wedge\neg\beta & \text{(DeMorgansche Regeln).}
\end{array}
$$

Ferner ist $\alpha \vee \neg\alpha \equiv \top$, $\alpha\wedge\neg\alpha \equiv \bot$ und $\alpha\wedge\top \equiv \alpha \vee \bot \equiv \alpha$. Es ist nützlich, auch gewisse Äquivalenzen für Formeln aufzulisten, die $\to$ enthalten, zum Beispiel

$$\alpha \to \beta \equiv \neg\alpha \vee \beta \equiv \neg\alpha \vee \alpha\wedge\beta; \quad \alpha \to \beta \to \gamma \equiv \alpha\wedge\beta \to \gamma \equiv \beta \to \alpha \to \gamma.$$

Eine Verallgemeinerung ist $\alpha_1 \to \ldots \to \alpha_n \equiv \alpha_1 \wedge \ldots \wedge \alpha_{n-1} \to \alpha_n$. Ferner sei die „Linksdistributivität" von $\to$ bezüglich $\wedge$ und $\vee$ erwähnt, d.h.

$$\alpha \to \beta\wedge\gamma \equiv (\alpha \to \beta)\wedge(\alpha \to \gamma) \quad ; \quad \alpha \to \beta \vee \gamma \equiv (\alpha \to \beta) \vee (\alpha \to \gamma).$$

Steht das Symbol $\to$ hingegen rechts, so gelten

$$\alpha\wedge\beta \to \gamma \equiv (\alpha \to \gamma) \vee (\beta \to \gamma) \quad ; \quad \alpha \vee \beta \to \gamma \equiv (\alpha \to \gamma)\wedge(\beta \to \gamma).$$

Bemerkung 1. Diese beiden letzten Äquivalenzen sind verantwortlich für ein kurioses Phänomen in der Alltagssprache. Zum Beispiel haben die beiden Aussagen

A: *Studenten und Rentner zahlen die Hälfte*, B: *Studenten oder Rentner zahlen die Hälfte*

offenbar denselben Sinn. Wie lässt sich dies erklären? Seien die Sprachpartikel *Student*, *Rentner*, *die Hälfte zahlen* durch S, R bzw. H abgekürzt. Dann drücken

$$\alpha : (S \to H) \wedge (R \to H), \qquad \beta : (S \vee R) \to H$$

die Sachverhalte A bzw. B etwas präziser aus. Nun sind α und β aber logisch äquivalent. Die umgangssprachlichen Formulierungen A, B von α bzw. β verschleiern den strukturellen Unterschied von α und β durch einen scheinbar synonymen Gebrauch von *und, oder*.

Offenbar ist $\equiv$ eine Äquivalenzrelation, d.h. es gelten

$$\begin{array}{rl} \alpha \equiv \alpha & \text{(Reflexivität)}, \\ \alpha \equiv \beta \;\Rightarrow\; \beta \equiv \alpha & \text{(Symmetrie)}, \\ \alpha \equiv \beta, \beta \equiv \gamma \;\Rightarrow\; \alpha \equiv \gamma & \text{(Transitivität)}. \end{array}$$

Darüber hinaus ist $\equiv$ eine *Kongruenz* [2)] auf $\mathcal{F}$, d.h. für alle $\alpha, \alpha', \beta, \beta'$ gilt

$$\alpha \equiv \alpha', \beta \equiv \beta' \;\Rightarrow\; \alpha \circ \beta \equiv \alpha' \circ \beta', \neg\alpha \equiv \neg\alpha' \qquad (\circ \in \{\wedge, \vee\}).$$

Deshalb gilt das sogenannte *Ersetzungstheorem*: $\alpha \equiv \alpha' \;\Rightarrow\; \varphi \equiv \varphi'$, wobei φ' aus φ dadurch hervorgeht, dass man die in φ eventuell vorkommende Subformel α an einer oder mehreren Stellen ihres Vorkommens durch α' ersetzt. So ergibt sich etwa aus $\varphi = (\neg p \vee \neg q) \wedge (p \vee q)$ durch Ersetzen der Subformel $\neg p \vee \neg q$ durch die äquivalente Formel $\neg(p \wedge q)$ die zu φ äquivalente Formel $\varphi' = \neg(p \wedge q) \wedge (p \vee q)$.

Ein ähnliches Ersetzungstheorem gilt übrigens auch für arithmetische Terme und wird bei Termumformungen ständig verwendet. Dies fällt deswegen nicht auf, weil $=$ statt $\equiv$ geschrieben wird und mit der Ersetzung meist richtig umgegangen wird. Der sehr einfache Beweis des Ersetzungstheorems wird in **2.4** in einem etwas erweiterten Rahmen ausgeführt. Ausgerüstet mit den Äquivalenzen $\neg(\alpha \wedge \beta) \equiv \neg\alpha \vee \neg\beta$, $\neg(\alpha \vee \beta) \equiv \neg\alpha \wedge \neg\beta$ und $\neg\neg\alpha \equiv \alpha$ konstruiert man mit dem Ersetzungstheorem zu jeder Formel φ leicht eine äquivalente Formel, in der das Negationszeichen nur noch unmittelbar vor Variablen steht. Zum Beispiel ergibt sich auf diese Weise $\neg(p \wedge q \vee r) \equiv \neg(p \wedge q) \wedge \neg r \equiv (\neg p \vee \neg q) \wedge \neg r$. Solche Umformungen führen auch syntaktisch zu den unten betrachteten konjunktiven und disjunktiven Normalformen.

Für den Lernenden ist immer eine gewisse Überraschung, dass *jede* Boolesche Funktion durch eine Boolesche Formel repräsentierbar ist. Es gibt dafür unterschiedliche Beweise. Wir wollen bei dieser Gelegenheit jedoch gewisse Normalformen kennenlernen und beginnen daher mit der folgenden

Definition. Primformeln und deren Verneinungen heißen *Literale*. Eine Disjunktion $\alpha_1 \vee \ldots \vee \alpha_n$, wobei jedes α_i eine Konjunktion von Literalen ist, heiße eine *disjunktive Normalform*, kurz eine DNF. Eine Konjunktion $\beta_1 \wedge \ldots \wedge \beta_n$, wobei jedes β_i eine Disjunktion von Literalen ist, heiße eine *konjunktive Normalform*, kurz eine KNF.

[2)] Dieser ursprünglich aus der Geometrie stammende Begriff ist in jeder algebraischen Struktur sinnvoll definiert und gehört zu den wichtigsten mathematischen Begriffen, siehe hierzu **2.1**.

Beispiele. $p \vee (q \wedge \neg p)$ ist eine DNF. Die Formel $p \vee q$ ist zugleich eine DNF und eine KNF, während $p \vee \neg(q \wedge \neg p)$ weder eine DNF noch eine KNF darstellt.

Satz 2.1 besagt, dass jede Boolesche Funktion durch eine Boolesche Formel repräsentiert wird, sogar durch eine DNF, und auch durch eine KNF. Dazu genügt z.B. der recht einfache Nachweis, dass es zu vorgegebenem n mindestens 2^{2^n} viele paarweise nichtäquivalente DNFs (bzw. KNFs) gibt. Doch führen wir den Beweis konstruktiv. Zu einer durch eine Wertetabelle gegebenen Booleschen Funktion wird eine sie repräsentierende DNF (bzw. KNF) explizit angegeben.

In der Formulierung von Satz 2.1 verwenden wir vorübergehend folgende Notation. Für Variablen p sei $p^1 = p$ und $p^0 = \neg p$. Wie man sich induktiv über n ($\geqslant 1$) leicht klarmacht, gilt für alle $x_1, \ldots, x_n \in \{0, 1\}$

$$(*) \qquad w(p_1^{x_1} \wedge \cdots \wedge p_n^{x_n}) = 1 \;\Leftrightarrow\; w\vec{p} = \vec{x} \quad (\text{d.h. } wp_1 = x_1, \ldots, wp_n = x_n).$$

Satz 2.1. *Jede Boolesche Funktion f, sagen wir $f \in \boldsymbol{B}_n$, ist repräsentierbar durch eine* DNF, *und zwar durch*

$$\alpha := \bigvee_{f(x_1,\ldots,x_n)=1} p_1^{x_1} \wedge \cdots \wedge p_n^{x_n}.$$ [3)]

f ist zugleich repräsentierbar durch die KNF

$$\beta := \bigwedge_{f(x_1,\ldots,x_n)=0} p_1^{\neg x_1} \vee \cdots \vee p_n^{\neg x_n}.$$

Beweis. Unter Beachtung der Definition von α gilt für eine beliebige Belegung w

$$\begin{aligned} w\alpha = 1 \quad &\Leftrightarrow \quad \text{es gibt ein } \vec{x} \text{ mit } w(p_1^{x_1} \wedge \cdots \wedge p_n^{x_n}) = 1 \text{ und } f\vec{x} = 1 \\ &\Leftrightarrow \quad \text{es gibt ein } \vec{x} \text{ mit } w\vec{p} = \vec{x} \text{ und } f\vec{x} = 1 \quad \big(\text{nach } (*)\,\big) \\ &\Leftrightarrow \quad fw\vec{p} = 1. \end{aligned}$$

Aus $w\alpha = 1 \;\Leftrightarrow\; fw\vec{p} = 1$ folgt wegen der Zweiwertigkeit sofort $w\alpha = fw\vec{p}$. Analog beweist man die Repräsentierbarkeit von f durch β, oder man benutzt Satz 2.3. ❑

Beispiel. Für die *entweder-oder*-Funktion $+$ liefert das Konstruktionsverfahren von Satz 2.1 die repräsentierende DNF $p_1 \wedge \neg p_2 \vee \neg p_1 \wedge p_2$. Denn $(1, 0)$, $(0, 1)$ sind die beiden Tupel, für die $+$ den Wert 1 hat. Die durch den Satz gelieferte KNF hingegen lautet $(p_1 \vee p_2) \wedge (\neg p_1 \vee \neg p_2)$. Die äquivalente Formel $(p_1 \vee p_2) \wedge \neg(p_1 \wedge p_2)$ gibt den Sinn der exklusiven oder-Verknüpfung besonders anschaulich wieder.

[3)] Die Disjunktionsglieder der Formel α seien z.B. gemäß lexikographischer Anordnung der n-Tupel $(x_1, \ldots, x_n) \in \{0, 1\}^n$ angeordnet. Falls die Disjunktion leer ist, also f den Wert 1 nicht annimmt, sei α die Formel $\bot$ $(= p_1 \wedge \neg p_1)$. Analog sei $\top$ $(= \neg\bot)$ die leere Konjunktion. Dies entspricht den Konventionen, wonach die leere Summe hat den Wert 0, das leere Produkt den Wert 1 hat.

Die durch Satz 2.1 gegebene DNF für $\to$, nämlich $p_1 \wedge p_2 \vee \neg p_1 \wedge p_2 \vee \neg p_1 \wedge \neg p_2$, ist länger als die $\to$ ebenfalls repräsentierende DNF $\neg p_1 \vee p_2$. Die erstere ist aber dadurch ausgezeichnet, dass jede ihrer Disjunktionen jede der beiden vorkommenden Variablen genau einmal enthält. Eine DNF in n Variablen mit der analogen Eigenschaft heißt *kanonisch*. Satz 2.1 liefert die Repräsentierbarkeit durch kanonische Normalformen, wobei der Begriff der kanonischen KNF entsprechend erklärt sei. So wird z.B. $\leftrightarrow$ durch die kanonische KNF $(\neg p_1 \vee p_2) \wedge (p_1 \vee \neg p_2)$ repräsentiert.

Eine logische Signatur (eigentlich das ihr entsprechende System Boolescher Funktionen) heißt *funktional vollständig*, genauer *term-funktional vollständig*, wenn jede Boolesche Funktion durch eine Formel dieser Signatur repräsentierbar ist. Nach Satz 2.1 ist $\{\neg, \wedge, \vee\}$ funktional vollständig. Wegen $p_1 \vee p_2 \equiv \neg(\neg p_1 \wedge \neg p_2)$ und $p_1 \wedge p_2 \equiv \neg(\neg p_1 \vee \neg p_2)$ kann auf $\vee$ oder aber auf $\wedge$ auch noch verzichtet werden. Man erhält damit das

Korollar 2.2. $\{\neg, \wedge\}$ *und* $\{\neg, \vee\}$ *sind funktional vollständig.*

Um eine logische Signatur L als funktional vollständig nachzuweisen, genügt es daher, $\neg, \wedge$ oder $\neg, \vee$ durch Formeln in L zu repräsentieren. Weil z.B. $\neg p \equiv p \to 0$ und $p \wedge q \equiv \neg(p \to \neg q)$, ist $\{\to, 0\}$ funktional vollständig, ebenso wie z.B. $\{\to, \neg\}$. Dagegen ist z.B. $\{\to, \wedge, \vee\}$ und erst recht $\{\to\}$ funktional unvollständig. Denn induktiv über den Aufbau von Formeln α in $\to, \wedge, \vee$ folgt leicht $w\alpha = 1$ für jedes w mit $wp = 1$ für alle p. Daher gibt es kein derartiges α mit $\alpha \equiv \neg p$.

Bemerkenswerterweise ist die lediglich $\downarrow$ enthaltende Signatur bereits funktional vollständig. Denn $\neg p \equiv p \downarrow p$, sowie $p \wedge q \equiv \neg p \downarrow \neg q$ nach der Wertetafel für $\downarrow$. Analoges gilt auch für $\{\uparrow\}$, denn $\neg p \equiv p \uparrow p$ und $p \vee q \equiv \neg p \uparrow \neg q$. Dass mit $\{\downarrow\}$ auch $\{\uparrow\}$ funktional vollständig ist, entnimmt man auch dem Dualitätssatz unten.

Es gibt bis auf Termäquivalenz immer noch unendlich viele Signaturen. Dabei heißen Signaturen *termäquivalent*, wenn deren Formeln jeweils die gleichen Booleschen Funktionen repräsentieren wie z.B. die in Übung 2 genannten Signaturen.

Wir erklären eine Abbildung $\delta : \mathcal{F} \to \mathcal{F}$ rekursiv über die Formeln von $\mathcal{F}$ durch

$$p^\delta = p, \quad (\neg\alpha)^\delta = \neg\alpha^\delta, \qquad (\alpha \wedge \beta)^\delta = \alpha^\delta \vee \beta^\delta, \quad (a \vee \beta)^\delta = \alpha^\delta \wedge \beta^\delta.$$

α^δ heißt die zu α *duale Formel*. Sie entsteht aus α dadurch, dass $\wedge$ und $\vee$ miteinander vertauscht werden. Für eine DNF α ist α^δ offenbar eine KNF und umgekehrt. Die zu $f \in \boldsymbol{B}_n$ *duale Funktion* sei definiert durch $f^\delta(x_1, \ldots, x_n) = \neg f(\neg x_1, \ldots, \neg x_n)$. Offenbar gilt $(f^\delta)^\delta = f$. So ist $\wedge^\delta = \vee$, $\vee^\delta = \wedge$, $\leftrightarrow^\delta = +$, $\downarrow^\delta = \uparrow$, aber $\neg^\delta = \neg$. Mit anderen Worten, $\neg$ ist *selbstdual*. Auch $d_3\colon (x_1, x_2, x_3) \mapsto x_1 \wedge x_2 \vee x_1 \wedge x_3 \vee x_2 \wedge x_3$ ist ein oft zitiertes Beispiel. Wesentlich 2-stellige selbstduale Funktionen gibt es nicht, wie ein Blick auf die Wertetafeln zeigt. Die Dualisierungsbegriffe verbindet

Satz 2.3 (Dualitätssatz der 2-wertigen Logik). *Repräsentiert α die Funktion f, so repräsentiert die duale Formel α^δ die duale Funktion f^δ.*

Der recht einfache Beweis des Satzes, der sich kurz durch $(\alpha^{(n)})^\delta = (\alpha^\delta)^{(n)}$ wiedergeben lässt, sei hier übergangen. Statt dessen seien einige Anwendungen vorgestellt. $\leftrightarrow$ wird z.B. durch $p \wedge q \vee \neg p \wedge \neg q$ repräsentiert, die duale Funktion $+ = \leftrightarrow^\delta$ also durch die duale Formel $(p \vee q) \wedge (\neg p \vee \neg q)$. Die erste ist eine DNF, die letzte eine KNF. Allgemeiner: wird $f \in \boldsymbol{B}_n$ durch eine DNF α repräsentiert, so f^δ nach Satz 2.3 durch eine KNF, nämlich α^δ, und diese ist kanonisch falls α kanonisch ist wie im vorliegenden Beispiel. Falls wir nur wissen, dass jedes $f \in \boldsymbol{B}_n$ durch eine DNF repräsentierbar ist, so notwendigerweise auch durch eine KNF; denn die Abbildung $f \mapsto f^\delta$ ist wegen $\delta^2 = id_{\boldsymbol{B}_n}$ eine Bijektion von $\boldsymbol{B}_n$ auf sich.

Bemerkung 2. $\{\wedge, \vee, 0, 1\}$ ist *maximal funktional unvollständig*, d.h. ist eine Boolesche Funktion f nicht durch eine Formel in $\wedge, \vee, 0, 1$ repräsentierbar, so ist $\{\wedge, \vee, 0, 1, f\}$ bereits funktional vollständig, Übung 4. Es gibt bis auf Termäquivalenz nur fünf maximal unvollständige Signaturen wie E. Post 1920 bewies, außer der angegebenen nur $\{\rightarrow, \wedge\}$ und deren duale, sowie $\{\leftrightarrow, \neg\}$ und $\{d_3, \neg\}$. Die Formeln der letztgenannten Signatur repräsentieren genau alle selbstdualen Booleschen Funktionen. Schreibt man vorübergehend $\cdot$ statt $\wedge$, so ist wegen $\neg p \equiv 1 + p$ auch $\{0, 1, +, \cdot\}$ funktional vollständig. Das hat einen tieferen Grund: es ist dies zugleich die Signatur der Körper (siehe hierzu **2.1**) und in jedem endlichen Körper sind alle Funktionen seines Trägers als Polynome darstellbar. Für endliche Gruppen ist dies in der Regel falsch. Ferner gibt es für jede endliche Menge E eine verallgemeinerte 2-stellige Sheffer-Funktion, durch welche man jede Operation über E in einem analogen Sinne wie im 2-wertigen Falle erhält. Die Beweise dieser Behauptungen haben mehr mit Algebra als mit Logik zu tun. Wir verweisen daher z.B. auf [Ih].

Übungen

1. Man verifiziere die Äquivalenzen $(p \rightarrow q_1) \wedge (\neg p \rightarrow q_2) \equiv p \wedge q_1 \vee \neg p \wedge q_2$ und $p_1 \wedge q_1 \rightarrow p_2 \vee q_2 \equiv (p_1 \rightarrow p_2) \vee (q_1 \rightarrow q_2)$.

2. Man zeige, die Signaturen $\{+, 1\}$, $\{+, \neg\}$ und $\{\leftrightarrow, \neg\}$ sind termäquivalent. Deren Formeln repräsentieren genau die linearen Booleschen Funktionen.

3. Man beweise, die Formeln in $\{\wedge, \vee, 0, 1\}$ repräsentieren genau die *monotonen* Booleschen Funktionen, d.h. die Konstanten aus $\boldsymbol{B}_0$ und die $f \in \boldsymbol{B}_n$ mit
$$f(\dots, x_{i-1}, 0, x_{i+1}, \dots) \leqslant f(\dots, x_{i-1}, 1, x_{i+1}, \dots) \quad (i = 1, \dots, n)$$
für alle $x_1, \dots, x_n \in \{0, 1\}$.

4. Man zeige, die Signatur $\{\wedge, \vee, 0, 1\}$ ist maximal funktional unvollständig.

1.3 Tautologien und aussagenlogisches Folgern

Statt $w\alpha = 1$ schreibt man auch $w \vDash \alpha$ und sagt w *erfüllt* α. Wir werden dieser Schreibweise in der Regel den Vorzug geben. Ferner schreibt man $w \vDash X$, wenn $w \vDash \alpha$ für alle $\alpha \in X$, und nennt dann w ein *Modell für die Formelmenge* X. Falls es ein w mit $w \vDash \alpha$ bzw. mit $w \vDash X$ gibt, heißen α bzw. X auch *erfüllbar*. Die Relation $\vDash$, auch die *Erfüllungsrelation* genannt, hat offenbar die folgenden Eigenschaften:

$$\begin{array}{lllll} w \vDash p & \Leftrightarrow \; wp = 1 \quad (p \in AV); & \quad w \vDash \neg\alpha & \Leftrightarrow \; w \nvDash \alpha; \\ w \vDash \alpha \wedge \beta & \Leftrightarrow \; w \vDash \alpha \text{ und } w \vDash \beta; & \quad w \vDash \alpha \vee \beta & \Leftrightarrow \; w \vDash \alpha \text{ oder } w \vDash \beta. \end{array}$$

Im Hinblick auf die Erweiterungen der Erfüllungsbedingungen in **2.3** ist wichtig, dass die Erfüllungsrelation $w \vDash \alpha$ für vorgegebenes $w\colon AV \to \{0,1\}$ auch direkt definiert werden kann, und zwar rekursiv über α, entsprechend den soeben niedergeschriebenen Klauseln. w ist offenbar eindeutig durch eine Vorgabe darüber festgelegt, für welche Variablen $w \vDash p$ gelten soll. Auch ist die Notation $w \vDash \alpha$ für $\alpha \in \mathcal{F}_n$ bereits dann sinnvoll, wenn w nur für $p_1, \ldots, p_n$ erklärt wurde. Ein solches w kann man sich, wenn gewünscht, zu einer globalen Belegung fortgesetzt denken, indem man wp für die in α nicht vorkommenden Variablen z.B. identisch 0 setzt.

Falls die Formeln auch andere Junktoren enthalten, sind für diese die Erfüllungsbedingungen sinngemäß zu formulieren. Zum Beispiel erwarten wir

$$w \vDash \alpha \to \beta \quad \Leftrightarrow \quad \text{wenn } w \vDash \alpha, \text{ so } w \vDash \beta.$$

Ist $\to$ ein eigenständiger Junktor, wird dies gefordert. Wir haben $\to$ hingegen durch andere Junktoren so definiert, dass diese Erfüllungsklausel beweisbar ist.

Definition. α heißt *allgemeingültig* oder *logisch gültig*, auch eine 2-wertige *Tautologie* genannt, wenn $w \vDash \alpha$ (gleichwertig $w\alpha = 1$) für alle w. Wir schreiben dann $\vDash \alpha$. Eine nicht erfüllbare Formel heißt auch eine *Kontradiktion*.

Beispiele. Alle Formeln der Gestalt $\alpha \vee \neg\alpha$ sind Tautologien. $\bot$, $\alpha \wedge \neg\alpha$ und $\alpha \leftrightarrow \neg\alpha$ sind hingegen Kontradiktionen. So wird die Russellsche Antinomie auf Seite 58 so gewonnen, dass für die „Russellsche Menge“ u die Kontradiktion $u \in u \leftrightarrow u \notin u$ gefolgert wird. In der aussagenlogischen Literatur oft zitiert werden die Tautologien

$$\begin{array}{ll} p \to p & \text{(Selbstimplikation)}, \\ p \to q \to p & \text{(Prämissenbelastung)}, \\ (p \to q \to r) \to (q \to p \to r) & \text{(Prämissenvertauschung)}, \\ (p \to q) \to (q \to r) \to (p \to r) & \text{(gewöhnlicher Kettenschluß)}, \\ (p \to q \to r) \to (p \to q) \to (p \to r) & \text{(Fregescher Kettenschluß)}, \\ ((p \to q) \to p) \to p & \text{(Formel von Peirce)}. \end{array}$$

Es ist offenbar entscheidbar, ob eine Formel α eine Tautologie ist oder nicht, indem man z.B. alle Belegungen der Variablen von α durchprobiert. Leider gibt es bis heute keine wesentlich effizienteren Verfahren. Diese gibt es nur für Formeln in gewisser Gestalt, siehe hierzu **4.2**. Auch das Prüfen einer Äquivalenz kann auf das Tautologieproblem reduziert werden. Denn offenbar gilt $\alpha \equiv \beta \ \Leftrightarrow \vDash \alpha \leftrightarrow \beta$.

Definition. Aus X *folgt* α *im aussagenlogischen Sinne*, symbolisch $X \vDash \alpha$, wenn $w \vDash \alpha$ für jedes Modell w von X.

Wir benutzen hier $\vDash$ zugleich als Zeichen für das Folgern als einer Relation zwischen Formelmengen X und Formeln α. Der Kontext wird stets klar erkennen lassen, was gemeint ist. Offensichtlich ist α allgemeingültig genau dann, wenn $\emptyset \vDash \alpha$, so dass die Notation $\vDash \alpha$ auch als verkürzte Schreibweise für $\emptyset \vDash \alpha$ verstanden werden kann.

$X \vDash \alpha, \beta$ meine in diesem Buch stets $X \vDash \alpha$ und $X \vDash \beta$, sowie $X \vDash Y$ stets $X \vDash \beta$ für alle $\beta \in Y$. Ferner schreiben wir meistens $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \vDash \beta$ anstelle von $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\} \vDash \beta$, und ebenso $X, \alpha \vDash \beta$ anstelle von $X \cup \{\alpha\} \vDash \beta$.

Bevor wir Beispiele angeben, notieren wir die offensichtlichen Eigenschaften

$$
\begin{array}{lll}
\text{(R)} & \alpha \in X \Rightarrow X \vDash \alpha & (\textit{Reflexivität}), \\
\text{(M)} & X \vDash \alpha \ \&\ X \subseteq X' \ \Rightarrow\ X' \vDash \alpha & (\textit{Monotonie}), \\
\text{(T)} & X \vDash Y \ \&\ Y \vDash \alpha \ \Rightarrow\ X \vDash \alpha & (\textit{Transitivität}).
\end{array}
$$

Beispiele für Folgerungsbeziehungen. (a) $\alpha, \beta \vDash \alpha \wedge \beta$ und $\alpha \wedge \beta \vDash \alpha, \beta$. Dies ist klar gemäß Wertematrix für $\wedge$. Angesichts der Transitivität (T) lässt (a) sich auch in der Weise $X \vDash \alpha, \beta \ \Leftrightarrow\ X \vDash \alpha \wedge \beta$ formulieren. (b) $\alpha, \alpha \to \beta \vDash \beta$. Denn $1 \to x = 1$ impliziert $x = 1$ nach der Wertetabelle für $\to$. (c) $X \vDash \bot \ \Rightarrow\ X \vDash \alpha$ für alle α. Denn $X \vDash \bot$ $(= p_1 \wedge \neg p_1)$ kann nur dann gelten wenn X unerfüllbar ist, d.h. kein Modell hat, wie etwa $X = \{p, \neg p\}$. Das hat offenbar $X \vDash \alpha$ für beliebiges α zur Folge. (d) $X, \alpha \vDash \beta$ und $X, \neg\alpha \vDash \beta$ impliziert $X \vDash \beta$. Denn sei $w \vDash X$. Falls $w \vDash \alpha$, ergibt $X, \alpha \vDash \beta$ auch $w \vDash \beta$; falls aber $w \vDash \neg\alpha$, folgt $w \vDash \beta$ aus $X, \neg\alpha \vDash \beta$.

Eigenschaft (b) wird auch der *Modus Ponens* genannt, wenn man (b) als Regel formuliert. Siehe hierzu auch **1.6**. Durch (d) wird das häufig verwendete Beweisverfahren durch Fallunterscheidung wiedergegeben. Um eine Aussage β aus einer Prämissenmenge X zu erschließen, genügt es, diese unter einer Zusatzannahme α und ebenso auch unter der Annahme $\neg\alpha$ herzuleiten.

Für viele Zwecke nützlich ist die Abgeschlossenheit des Folgerns unter Substitutionen. Sie verallgemeinert die Beobachtung, dass z.B. aus $p \vee \neg p$ alle Tautologien der Gestalt $\alpha \vee \neg\alpha$ durch Substitution von α für p entstehen.

Definition. Eine *(aussagenlogische) Substitution* ist eine Abbildung $\sigma : AV \to \mathcal{F}$, die sich wie folgt in natürlicher Weise zu einer Abbildung $\sigma : \mathcal{F} \to \mathcal{F}$ erweitern lässt:

$$(\alpha \wedge \beta)^\sigma = \alpha^\sigma \wedge \beta^\sigma, \quad (\alpha \vee \beta)^\sigma = \alpha^\sigma \vee \beta^\sigma, \quad (\neg\alpha)^\sigma = \neg\alpha^\sigma.$$

Genau wie Belegungen lassen sich daher auch Substitutionen als auf ganz $\mathcal{F}$ erklärte Abbildungen auffassen, die durch ihre Einschränkungen auf AV eindeutig bestimmt sind. Ist z.B. $p^\sigma = \alpha$ für ein p und $q^\sigma = q$ sonst, so entsteht φ^σ aus φ durch Ersetzung von p durch α an allen Stellen des Vorkommens von p in φ. Dass mit φ auch φ^σ eine Tautologie ist, ist der Sonderfall $X = \emptyset$ der allgemeinen *Substitutionsinvarianz*

(S) $\quad X \vDash \alpha \;\Rightarrow\; X^\sigma \vDash \alpha^\sigma \qquad (X^\sigma := \{\varphi^\sigma \mid \varphi \in X\})$.

Beweis. Sei w eine Belegung und sei w^σ erklärt durch $w^\sigma p = wp^\sigma$. Wir zeigen

$$(*) \quad w \vDash \alpha^\sigma \;\Leftrightarrow\; w^\sigma \vDash \alpha$$

induktiv über α. Für Primformeln ist dies klar und die Induktionsannahme ergibt

$$w \vDash (\alpha \wedge \beta)^\sigma \Leftrightarrow w \vDash \alpha^\sigma \wedge \beta^\sigma \Leftrightarrow w \vDash \alpha^\sigma, \beta^\sigma \Leftrightarrow w^\sigma \vDash \alpha, \beta \Leftrightarrow w^\sigma \vDash \alpha \wedge \beta.$$

Das Analoge beweist man für $\vee$ und $\neg$. Damit gilt $(*)$. Zum Nachweis von (S) sei $X \vDash \alpha$, sowie $w \vDash X^\sigma$. Wegen $(*)$ ist $w^\sigma \vDash X$. Also $w^\sigma \vDash \alpha$, und damit $w \vDash \alpha^\sigma$. ❑

Die Folgerungsrelation hat eine weitere, insbesondere auch für mathematische Anwendungen bedeutsame Eigenschaft, die im nächsten Abschnitt bewiesen wird:

(F) $\quad X \vDash \alpha \;\Rightarrow\; X_0 \vDash \alpha$ für eine endliche Teilmenge $X_0 \subseteq X$.

Eine weitere wichtige und leicht beweisbare Folgerungseigenschaft ist ferner

(D) $\quad X, \alpha \vDash \beta \;\Rightarrow\; X \vDash \alpha \to \beta$.

Denn sei $X, \alpha \vDash \beta$ und w Modell für X. Wenn $w \vDash \alpha$, ist wegen $X, \alpha \vDash \beta$ auch $w \vDash \beta$. Damit ist $X \vDash \alpha \to \beta$ schon gezeigt. (D) heißt auch das (semantische) *Deduktionstheorem*. Auch die Umkehrung von (D) ist richtig, wie man leicht sieht, d.h. man darf $\Rightarrow$ in (D) durch $\Leftrightarrow$ ersetzen. Wiederholte Anwendung hiervon liefert

$$\alpha_1, \ldots, \alpha_n \vDash \beta \quad\Leftrightarrow\quad \vDash \alpha_1 \to \alpha_2 \to \ldots \to \alpha_n \to \beta \quad\Leftrightarrow\quad \vDash \alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \ldots \wedge \alpha_n \to \beta.$$

Damit wird das Folgern von β aus einer endlichen Prämissenmenge gänzlich auf die Allgemeingültigkeit einer geeigneten Formel zurückgeführt.

Mit (D) lassen sich bequem Tautologien gewinnen. Um etwa $\vDash p \to q \to p$ zu beweisen, genügt nach (D) der Nachweis von $p \vDash q \to p$; dazu genügt, wiederum nach (D), der Nachweis von $p, q \vDash p$, und dies ist trivial. Durch einfache Anwendung von (D) erhält man leicht auch die beiden in Übung 1 genannten Kettenschlußformeln.

$X \subseteq \mathcal{F}$ heißt X *deduktiv abgeschlossen*, wenn $X \vDash \alpha \Rightarrow \alpha \in X$ für alle $\alpha \in \mathcal{F}$. Wegen (R) kann diese Bedingung gleichwertig durch $X \vDash \alpha \;\Leftrightarrow\; \alpha \in X$ ersetzt werden.

Beispiele sind die Menge aller Tautologien und ganz $\mathcal{F}$. Der Durchschnitt deduktiv abgeschlossener Mengen ist wieder deduktiv abgeschlossen. Daher ist jedes $X \subseteq \mathcal{F}$ Teilmenge einer kleinsten deduktiv abgeschlossenen Obermenge von X.

Bemerkung. Die Eigenschaften (R), (M), (T) und (S) teilt $\vDash$ mit fast allen nichtklassischen (mehrwertigen oder sonstigen) logischen Systemen. Eine Relation $\vdash$ zwischen Formelmengen und Formeln einer vorgegebenen aussagenlogischen Sprache $\mathcal{F}$ mit den für $\vdash$ sinngemäß formulierten Eigenschaften (R), (M), (T) und (S) heiße eine (aussagenlogische) *Konsequenzrelation*. Diese sind das Ausgangsmaterial für eine von Tarski begründete, sehr allgemeine und tragfähige Theorie logischer Systeme, der sich fast alle in der Literatur betrachteten logischen Systeme unterordnen. Alle in diesem Buch vorgestellten Logik-Kalküle haben z.B. diese Eigenschaften. Begriffe wie Tautologie, konsistent, deduktiv abgeschlossen usw. beziehen sich auf eine gegebene Konsequenzrelation $\vdash$. Eine Formelmenge X heißt z.B. *inkonsistent*, wenn $X \vdash \alpha$ für alle α, und anderenfalls konsistent. $\vdash$ selbst heißt inkonsistent, wenn $\vdash \alpha$ für alle α. Erfüllt $\vdash$ die oben für $\vDash$ formulierte, noch nicht bewiesene und im allgemeinen Falle auch nicht vorausgesetzte Eigenschaft (F), so heißt $\vdash$ *finitär*. (F) gilt für das Folgern über einer beliebigen endlichen logischen Matrix. Dies wird in Übung 3 in **5.7** als Beispiel einer Anwendung des Ultraproduktsatzes bewiesen und zugleich wesentlich verallgemeinert.

Übungen

1. Man beweise mit Hilfe des Deduktionstheorems
$$\vDash (p \to q \to r) \to (p \to q) \to (p \to r) \text{ und } \vDash (p \to q) \to (q \to r) \to (p \to r).$$

2. Man bestätige die Korrektheit der *Regel der disjunktiven Fallunterscheidung*: Wenn $X, \alpha \vDash \gamma$ und $X, \beta \vDash \gamma$, so $X, \alpha \vee \beta \vDash \gamma$. In suggestiver Schreibweise
$$\frac{X, \alpha \vDash \gamma \,\big|\, X, \beta \vDash \gamma}{X, \alpha \vee \beta \vDash \gamma}.$$

3. Man verifiziere die Korrektheit der folgenden *Kontrapositionsregeln*:
$$\frac{X, \alpha \vDash \beta}{X, \neg\beta \vDash \neg\alpha} \quad ; \quad \frac{X, \neg\beta \vDash \neg\alpha}{X, \alpha \vDash \beta}.$$

4. Sei $\vdash$ eine beliebige Konsequenzrelation in $\mathcal{F}$ und $X^{\vdash} := \{\alpha \in \mathcal{F} \mid X \vdash \alpha\}$. Man zeige, $X^{\vdash}$ ist die kleinste deduktiv abgeschlossene Obermenge von X.

5. Sei $\vdash$ eine Konsequenzrelation in $\mathcal{F}$ und für beliebiges $X \subseteq \mathcal{F}$ erkläre man $X \vdash_0 \alpha :\Leftrightarrow X_0 \vdash \alpha$ für ein endliches $X_0 \subseteq X$. Man zeige, $\vdash_0$ ist eine finitäre Konsequenzrelation und $\vdash_0 \subseteq \vdash$.

1.4 Ein vollständiger aussagenlogischer Kalkül

Wir werden nun vermittels eines Regelkalküls eine Ableitungsrelation $\vdash$ definieren, die sich als identisch mit der Folgerungsrelation $\vDash$ erweist. Dieser Kalkül ist vom Typus der sogenannten Gentzen-Kalküle. Seine Regeln beziehen sich auf Paare (X, α) von Formelmengen X und Formeln α, wobei X – anders als in [Ge] – hier nicht endlich sein muss, da die von uns verfolgten Ziele dies nicht erfordern. In Anlehnung an [Ge] heißen die Paare (X, α) auch *Sequenzen*. Trifft $\vdash$ auf die Sequenz (X, α) zu, schreibt man $X \vdash \alpha$ (sprich X *ableitbar* α) und andernfalls $X \nvdash \alpha$.

Der Kalkül wird für $\wedge$ und $\neg$ formuliert und umfasst die umrahmten *Basisregeln* unten. Jede dieser Regel hat oberhalb des Trennstrichs gewisse *Prämissen* und darunter eine *Konklusion*. Nur (AR) hat keine Prämissen und erlaubt die Herleitung der Sequenzen $\alpha \vdash \alpha$, den *Anfangssequenzen*. Die Wahl der Signatur $\{\wedge, \neg\}$ ist eine Sache der Bequemlichkeit und gerechtfertigt durch ihre funktionale Vollständigkeit. Weitere Junktoren werden fortan gemäß den Definitionen

$$\alpha \vee \beta := \neg(\neg\alpha \wedge \neg\beta), \quad \alpha \to \beta := \neg(\alpha \wedge \neg\beta), \quad \alpha \leftrightarrow \beta := (\alpha \to \beta) \wedge (\beta \to \alpha).$$

verwendet. Man kann auch eine andere funktional vollständige Signatur wählen, muss aber in Kauf nehmen, dass die Formulierung eines Logik-Kalküls länger wird, weil dieser wesentlich von der gewählten Signatur abhängt. So muss ein vollständiger Kalkül etwa in $\{\neg, \wedge, \vee, \to\}$ auch auf $\vee$ und $\to$ bezogene Basisregeln enthalten.

$$\text{(AR)}\ \frac{}{\alpha \vdash \alpha}\ \text{(Anfangsregel)} \qquad \text{(MR)}\ \frac{X \vdash \alpha}{X' \vdash \alpha}\ (X' \supseteq X, \quad \text{Monotonieregel})$$

$$(\wedge 1)\ \frac{X \vdash \alpha, \beta}{X \vdash \alpha \wedge \beta} \qquad (\wedge 2)\ \frac{X \vdash \alpha \wedge \beta}{X \vdash \alpha, \beta}$$

$$(\neg 1)\ \frac{X \vdash \alpha, \neg\alpha}{X \vdash \beta} \qquad (\neg 2)\ \frac{X, \alpha \vdash \beta \;\big|\; X, \neg\alpha \vdash \beta}{X \vdash \beta}$$

Dabei meint $X \vdash \alpha, \beta$ hier und im Folgenden immer $X \vdash \alpha$ und $X \vdash \beta$. Diese Verabredung ist wichtig, denn $X \vdash \alpha, \beta$ hat einen anderen Sinn in Gentzen-Kalkülen, die sich auf Paare von Formelmengen beziehen und die für beweistheoretische Untersuchungen wichtig sind. Die Regeln $(\wedge 1)$ und $(\neg 1)$ haben eigentlich zwei Prämissen, genau wie $(\neg 2)$. Nur lässt $(\neg 2)$ sich nicht in derselben Weise abgekürzt notieren. Man beachte ferner, dass $(\wedge 2)$ eigentlich aus zwei Teilregeln besteht, entsprechend den Konklusionen $X \vdash \alpha$ und $X \vdash \beta$. In $(\neg 2)$ steht X, α für $X \cup \{\alpha\}$. Diese verkürzende Schreibweise wird immer dann verwendet, wenn Missverständnisse ausgeschlossen sind. Auch wird $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \vdash \beta$ für $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\} \vdash \beta$ geschrieben, und $\vdash \alpha$ für $\emptyset \vdash \alpha$, analog wie für $\vDash$. Die Regel (MR) wird beweisbar, wenn *alle* Sequenzen (X,α) mit $\alpha \in X$ als Anfangssequenzen angesehen werden. Mit anderen Worten, wenn (AR) verschärft wird zu $X \vdash \alpha$ für beliebige $\alpha \in X$.

$X \vdash \alpha$ bedeutet genauer, dass die Sequenz (X,α) durch schrittweises Anwenden der Basisregeln gewonnen werden kann. Die Redeweise vom schrittweisen Anwenden der Basisregeln kann streng formal wie folgt präzisiert werden. Eine *Herleitung* sei eine endliche Folge $(S_0;\ldots;S_n)$ von Sequenzen S_i derart, dass jedes Folgenglied eine Anfangssequenz ist oder aus vorangehenden Folgengliedern durch Anwendung einer der Basisregeln gewonnen wurde. *Aus* X *ist* α *ableitbar* oder *beweisbar*, $X \vdash \alpha$, wenn es eine Herleitung $(S_0;\ldots;S_n)$ gibt mit $S_n = (X,\alpha)$. Dies ist eine der möglichen Definitionen der Relation $\vdash$. Einfaches Beispiel einer Herleitung mit der Endsequenz $\alpha,\beta \vdash \alpha\wedge\beta$ ist $(\alpha\vdash\alpha\ ;\ \alpha,\beta\vdash\alpha\ ;\ \beta\vdash\beta\ ;\ \alpha,\beta\vdash\beta\ ;\ \alpha,\beta\vdash\alpha\wedge\beta)$.

Interessanter noch ist das Ableiten von Regeln. Wir erläutern dies anhand nachfolgender Beispiele. Das zweite, eine Verallgemeinerung des ersten, gibt das oft verwendete Beweisverfahren der *reductio ad absurdum* wieder: α wird aus X bewiesen, indem die Annahme $\neg\alpha$ zum Widerspruch geführt wird. Die weiteren Beispiele beziehen sich auf den definierten Junktor $\to$. Weil dieser durch $\wedge,\neg$ wie angegeben *definiert* wurde, lautet beispielsweise die unten erwähnte $\to$-Elimination in der Originalsprache $\dfrac{X\vdash\neg(\alpha\wedge\neg\beta)}{X,\alpha\vdash\beta}$.

Beispiele beweisbarer Regeln

		Beweis	*angewendet*
$\dfrac{X,\neg\alpha\vdash\alpha}{X\vdash\alpha}$ ($\neg$-Elimination)	1	$X,\alpha\vdash\alpha$	(AR), (MR)
	2	$X,\neg\alpha\vdash\alpha$	Annahme
	3	$X\vdash\alpha$	($\neg$2)
$\dfrac{X,\neg\alpha\vdash\beta,\neg\beta}{X\vdash\alpha}$ (reductio ad absurdum)	1	$X,\neg\alpha\vdash\beta,\neg\beta$	Annahme
	2	$X,\neg\alpha\vdash\alpha$	($\neg$1)
	3	$X\vdash\alpha$	$\neg$-Elimination
$\dfrac{X\vdash\alpha\to\beta}{X,\alpha\vdash\beta}$ ($\to$-Elimination)	1	$X,\alpha,\neg\beta\vdash\alpha,\neg\beta$	(AR), (MR)
	2	$X,\alpha,\neg\beta\vdash\alpha\wedge\neg\beta$	($\wedge$1)
	3	$X\vdash\neg(\alpha\wedge\neg\beta)\ (=\alpha\to\beta)$	Annahme
	4	$X,\alpha,\neg\beta\vdash\neg(\alpha\wedge\neg\beta)$	(MR)
	5	$X,\alpha,\neg\beta\vdash\beta$	($\neg$1) auf 2 und 4
	6	$X,\alpha\vdash\beta$	$\neg$-Elimination

$$\frac{X \vdash \alpha \mid X, \alpha \vdash \beta}{X \vdash \beta}$$

(Schnittregel)

	Beweis	*angewendet*
1	$X, \neg\alpha \vdash \alpha$	Annahme, (MR)
2	$X, \neg\alpha \vdash \neg\alpha$	(AR), (MR)
3	$X, \neg\alpha \vdash \beta$	$(\neg 1)$
4	$X, \alpha \vdash \beta$	Annahme
5	$X \vdash \beta$	$(\neg 2)$ auf 4 und 3

$$\frac{X, \alpha \vdash \beta}{X \vdash \alpha \rightarrow \beta}$$

($\rightarrow$-Einführung)

1	$X, \alpha \wedge \neg\beta, \alpha \vdash \beta$	Annahme, (MR)
2	$X, \alpha \wedge \neg\beta \vdash \alpha$	(AR), (MR), $(\wedge 2)$
3	$X, \alpha \wedge \neg\beta \vdash \beta$	Schnittregel
4	$X, \alpha \wedge \neg\beta \vdash \neg\beta$	(AR), (MR), $(\wedge 2)$
5	$X, \alpha \wedge \neg\beta \vdash \alpha \rightarrow \beta$	$(\neg 1)$
6	$X, \neg(\alpha \wedge \neg\beta) \vdash \alpha \rightarrow \beta$	(AR), (MR)
7	$X \vdash \alpha \rightarrow \beta$	$(\neg 2)$ auf 5 und 6

Die $\rightarrow$-Einführung ist nichts anderes als die syntaktische Form des in **1.3** semantisch formulierten Deduktionstheorems. Eine einfache Folge der $\rightarrow$-Elimination und der Schnittregel ist die *Abtrennungsregel*

$$\frac{X \vdash \alpha, \alpha \rightarrow \beta}{X \vdash \beta}.$$

Denn $X \vdash \alpha \rightarrow \beta$ liefert $X, \alpha \vdash \beta$ ($\rightarrow$-Elimination). Mit $X \vdash \alpha$ folgt daher $X \vdash \beta$ (Schnittregel). Angewendet mit $X = \{\alpha, \alpha \rightarrow \beta\}$ erhält man so $\alpha, \alpha \rightarrow \beta \vdash \beta$. Diese Schar von Sequenzen heißt auch der *Modus Ponens*. Mehr hierüber in **1.6**.

Viele Eigenschaften von $\vdash$ beweist man durch Regelinduktion. Zwecks bequemer Formulierung erklären wir zuerst einige Redeweisen. Eine Eigenschaft $\mathcal{E}$ von Sequenzen identifizieren wir mit der Menge aller Paare (X, α), auf die $\mathcal{E}$ zutrifft. In diesem Sinne ist z.B. die Folgerungsrelation $\vDash$ auch eine Eigenschaft, bestehend aus allen Paaren (X, α) mit $X \vDash \alpha$. Die hier betrachteten Regeln haben die Gestalt

$$R: \ \frac{X_1 \vdash \alpha_1 \mid \cdots \mid X_n \vdash \alpha_n}{X \vdash \alpha}$$

und seien als *Gentzen-Stil-Regeln* bezeichnet. Wir sagen, $\mathcal{E}$ sei *abgeschlossen unter* R, wenn $\mathcal{E}(X_1, \alpha_1), \ldots, \mathcal{E}(X_n, \alpha_n) \Rightarrow \mathcal{E}(X, \alpha)$. Für eine Regel ohne Prämissen, also für $n = 0$, heißt dies einfach nur $\mathcal{E}(X, \alpha)$. So sind z.B. alle Regeln unseres Kalküls (semantisch) *korrekt*, was heißen soll, die Folgerungseigenschaft '$X \vDash \alpha$' ist unter allen Basisregeln abgeschlossen. Im Einzelnen bedeutet dies

$$\alpha \vDash \alpha, \quad X \vDash \alpha \Rightarrow X' \vDash \alpha \text{ für } X' \supseteq X, \quad X \vDash \alpha, \beta \Rightarrow X \vDash \alpha \wedge \beta, \quad \text{usw.}$$

Damit formulieren wir das sehr einfach zu rechtfertigende

Beweisprinzip durch Regelinduktion. *Ist eine Eigenschaft* $\mathcal{E}$ $(\subseteq \mathfrak{PF} \times \mathcal{F})$ *abgeschlossen unter allen Basisregeln von* $\vdash$*, so gilt* $\mathcal{E}(X, \alpha)$ *immer wenn* $X \vdash \alpha$*.*

Dies ergibt sich leicht durch Induktion über die Länge einer Herleitung der Sequenz $S = (X, \alpha)$. Ist 1 diese Länge, ist alles klar, weil S dann Anfangssequenz ist. Nun sei $(S_0; \ldots; S_n)$ eine Herleitung von $S = S_n$, und nach Induktionsannahme sei $\mathcal{E}S_i$ für alle $i < n$. Ist S Anfangssequenz, so gilt $\mathcal{E}S$ gemäß Voraussetzung; andernfalls wurde S durch Anwendung einer Basisregel auf gewisse der S_i für $i < n$ gewonnen. Damit gilt aber auch $\mathcal{E}S$, denn $\mathcal{E}$ ist unter allen Basisregeln abgeschlossen.

Es gibt mehrere gleichwertige Definitionen von $\vdash$, darunter rein mengentheoretische. Die Gleichwertigkeitsbeweise solcher Definitionen sind ziemlich wortreich, aber nicht besonders inhaltsreich. Daher verzichten wir auf weitere Ausführungen hierüber, zumal im weiteren Verlauf der Ausführungen nur noch die Regelinduktion verwendet wird, nicht mehr die Definition von $\vdash$.

Wie bereits erwähnt, sind alle Basisregeln korrekt, d.h. die Folgerungseigenschaft ist unter allen Basisregeln abgeschlossen. Daher ergibt Regelinduktion sofort die *Korrektheit* des Kalküls $\vdash\, \subseteq\, \vDash$, oder ausführlich

$$X \vdash \alpha \;\Rightarrow\; X \vDash \alpha, \text{ für alle } X, \alpha.$$

Mit Regelinduktion beweist man z.B. auch $X \vdash \alpha \Rightarrow X^\sigma \vdash \alpha^\sigma$, und speziell den

Satz 4.1 (Endlichkeitssatz für $\vdash$). *Ist* $X \vdash \alpha$*, so ist bereits* $X_0 \vdash \alpha$ *für eine endliche Teilmenge* $X_0 \subseteq X$*.*

Beweis. Sei $\mathcal{E}(X, \alpha)$ die Eigenschaft '$X_0 \vdash \alpha$ für ein gewisses endliches $X_0 \subseteq X$'. Sicher gilt $\mathcal{E}(X, \alpha)$ für $X = \{\alpha\}$, mit $X_0 = X$. Und hat X eine endliche Teilmenge X_0 mit $X_0 \vdash \alpha$, so auch jede Obermenge $X' \supseteq X$. Also ist $\mathcal{E}$ unter (MR) abgeschlossen. Sei $\mathcal{E}(X, \alpha)$, $\mathcal{E}(X, \beta)$, etwa $X_1 \vdash \alpha$, $X_2 \vdash \beta$ für endliche $X_1, X_2 \subseteq X$. Dann ist auch $X_0 \vdash \alpha, \beta$ für $X_0 = X_1 \cup X_2$. Daher ist $X_0 \vdash \alpha \wedge \beta$ nach $(\wedge 1)$. Also gilt $\mathcal{E}(X, \alpha \wedge \beta)$, womit $\mathcal{E}$ auch unter $(\wedge 1)$ abgeschlossen ist. Analog zeigt man dies für alle übrigen Basisregeln für $\vdash$. Also ergibt sich die Behauptung gemäß Regelinduktion. ❑

Von großer Bedeutung ist der formale Konsistenzbegriff, der die Ableitungsrelation nach dem folgenden Lemma bereits vollkommen bestimmt. Es wird sich herausstellen, dass 'konsistent' den Begriff 'erfüllbar' adäquat beschreibt.

Definition. $X \subseteq \mathcal{F}$ heiße *inkonsistent* (bezüglich unseres Kalküls), wenn $X \vdash \alpha$ für alle Formeln α, und andernfalls *konsistent*. X heißt *maximal konsistent*, wenn X konsistent ist, doch jede echte Obermenge $X' \supset X$ inkonsistent ist.

Die Inkonsistenz von X lässt sich durch die Ableitbarkeit einer einzigen Formel kennzeichnen, nämlich von $\bot$ $(= p_1 \wedge \neg p_1)$. Denn $X \vdash \bot$ impliziert $X \vdash p_1, \neg p_1$ nach $(\wedge 1)$ und damit $X \vdash \alpha$ für alle α gemäß $(\neg 1)$, d.h. X ist inkonsistent. Ist dies umgekehrt der Fall, gilt speziell $X \vdash \bot$. Wir dürfen $X \vdash \bot$ daher lesen als 'X ist inkonsistent', und $X \nvdash \bot$ als 'X ist konsistent', wovon nachfolgendend oft Gebrauch gemacht wird. Eine maximal konsistente Menge X ist immer deduktiv abgeschlosssen, d.h. $X \vdash \alpha \Rightarrow \alpha \in X$ (Übung 3) und hat manche anderen Besonderheiten.

Lemma 4.2. $\vdash$ *hat die Eigenschaften*

$$\mathtt{C}^+ : X \vdash \alpha \;\Leftrightarrow\; X, \neg\alpha \vdash \bot, \qquad \mathtt{C}^- : X \vdash \neg\alpha \;\Leftrightarrow\; X, \alpha \vdash \bot.$$

Beweis. Mit $X \vdash \alpha$ gilt auch $X, \neg\alpha \vdash \alpha$. Da gewiss $X, \neg\alpha \vdash \neg\alpha$, ist $X, \neg\alpha \vdash \beta$ für alle β nach $(\neg 1)$, insbesondere $X, \neg\alpha \vdash \bot$. Sei umgekehrt Letzteres der Fall. Dann ist nach der Anmerkung oben $X, \neg\alpha \vdash \alpha$, also $X \vdash \alpha$ gemäß $\neg$-Elimination in den Beispielen vorhin. $\mathtt{C}^-$ bestätigt man völlig analog. ❑

Die noch nicht bewiesene Behauptung $\vDash \subseteq \vdash$ ist äquivalent mit $X \nvdash \alpha \;\Rightarrow\; X \nvDash \alpha$, für alle X und α, aber in dieser Formulierung erkennt man sofort, was für den Beweis zu tun ist: Da $X \nvdash \alpha$ nach $\mathtt{C}^+$ mit der Konsistenz von $X' := X \cup \{\neg\alpha\}$ gleichwertig ist, sowie $X \nvDash \alpha$ mit der Erfüllbarkeit von X', müssen wir nur zeigen, dass konsistente Mengen erfüllbar sind. Dieser Nachweis stützt sich auf

Lemma 4.3 (Satz von Lindenbaum). *Jede konsistente Menge X kann erweitert werden zu einer maximal konsistenten Menge $X' \supseteq X$.*

Beweis. Sei H die bzgl. Inklusion halbgeordnete Menge aller konsistenten $Y \supseteq X$. Weil $X \in H$, ist H nichtleer. Sei $K \subseteq H$ eine Kette, d.h. $Y \subseteq Z$ oder $Z \subseteq Y$ für alle $Y, Z \in K$. Dann ist $U = \bigcup K$ eine obere Schranke für K; denn für $Y \in K$ ist sicher $Y \subseteq U$, und darüber hinaus – und dies ist der springende Punkt – ist U auch konsistent: $U \vdash \bot$ ergibt nämlich $U_0 \vdash \bot$ für ein endliches $U_0 = \{\alpha_0, \dots, \alpha_n\} \subseteq U$ nach Satz 4.1; ist etwa $\alpha_i \in Y_i \in K$ und Y die größte der Mengen $Y_0, \dots, Y_n$, so ist $\alpha_i \in Y$ für alle $i \leqslant n$, also auch $Y \vdash \bot$ nach (MR), was $Y \in H$ widerspricht. Nach dem Zornschen Lemma (Seite 37) hat H daher ein maximales Element X', und dies ist offenbar eine maximal konsistente Erweiterungsmenge von X. ❑

Bemerkung 1. Obiger Beweis, der den Dingen ausnahmsweise etwas vorgreift, ist frei von Annahmen über die Mächtigkeit der Sprache. Lindenbaums ursprüngliche Konstruktion bezog sich hingegen auf abzählbare Sprachen $\mathcal{F}$ und verläuft wie folgt: Sei $X_0 := X \subseteq \mathcal{F}$ konsistent und $\alpha_0, \alpha_1, \dots$ eine Aufzählung von $\mathcal{F}$. Man setze $X_{n+1} = X_n \cup \{\alpha_n\}$, falls diese Menge konsistent ist, und $X_{n+1} = X_n$ sonst. Dann ist $Y = \bigcup_{n \in \omega} X_n$ eine maximal konsistente Erweiterung von X, wie leicht zu verifizieren ist. Hier wird das mit dem Auswahlaxiom gleichwertige Lemma von Zorn nicht benötigt.

Lemma 4.4. *Eine maximal konsistente Menge X hat die Eigenschaft*

$$X \vdash \neg\alpha \;\Leftrightarrow\; X \nvdash \alpha, \textit{ für beliebiges } \alpha.$$

Beweis. Ist $X \vdash \neg\alpha$, so kann $X \vdash \alpha$ wegen der Konsistenz von X nicht gelten. Ist andererseits $X \nvdash \alpha$, so ist $X, \neg\alpha$ nach $\mathtt{C}^+$ konsistent. Folglich $\neg\alpha \in X$, denn X ist maximal konsistent. Also auch $X \vdash \neg\alpha$. ❑

Maximal konsistente Mengen erlauben eine einfache Modellkonstruktion. Dies zeigt

Lemma 4.5. *Eine maximal konsistente Menge X ist erfüllbar.*

Beweis. Sei w definiert durch $w \vDash p \;\Leftrightarrow\; X \vdash p$. Dann gilt für alle α

$$(*) \qquad X \vdash \alpha \;\Leftrightarrow\; w \vDash \alpha.$$

Dies ist klar für Primformeln α gemäß Definition von w. Ferner ist

$$\begin{array}{llll} X \vdash \alpha \wedge \beta & \Leftrightarrow & X \vdash \alpha, \beta & \text{(Regeln } (\wedge 1), (\wedge 2)\text{)} \\ & \Leftrightarrow & w \vDash \alpha, \beta & \text{(Induktionsannahme)} \\ & \Leftrightarrow & w \vDash \alpha \wedge \beta & \text{(Definition)} \\ X \vdash \neg\alpha & \Leftrightarrow & X \nvdash \alpha & \text{(Lemma 4.4)} \\ & \Leftrightarrow & w \nvDash \alpha & \text{(Induktionsannahme)} \\ & \Leftrightarrow & w \vDash \neg\alpha & \text{(Definition).} \end{array}$$

Das beweist $(*)$ und damit $w \vDash X$, also die Behauptung. ❑

Damit wurde die Gleichwertigkeit der Konsistenz und der Erfüllbarkeit einer Formelmenge gezeigt und wir erhalten nunmehr leicht das Hauptresultat des Abschnitts:

Satz 4.6 (Vollständigkeitssatz). *Für alle X, α gilt $X \vdash \alpha \;\Leftrightarrow\; X \vDash \alpha$.*

Beweis. $X \vdash \alpha \Rightarrow X \vDash \alpha$ ist die Korrektheit des Kalküls. Ist andererseits $X \nvdash \alpha$, so ist $X, \neg\alpha$ konsistent. Sei Y maximal konsistente Erweiterung von $X, \neg\alpha$ gemäß Lemma 4.3. Nach Lemma 4.5 ist Y erfüllbar, also auch $X, \neg\alpha$. Daher $X \nvDash \alpha$. ❑

Einen kürzeren, dafür aber die Substitutionen wesentlich benutzenden, eleganten Vollständigkeitsbeweis gibt Übung 5. Satz 4.6 liefert unmittelbar den

Satz 4.7 (Endlichkeitssatz für das Folgern). *Ist $X \vDash \alpha$, so ist $X_0 \vDash \alpha$ für eine gewisse endliche Teilmenge X_0 von X.*

Dies ist klar, denn für $\vdash$ gilt ja der Endlichkeitssatz. Hieraus ergibt sich leicht der

Satz 4.8 (Endlichkeitssatz der Erfüllbarkeit, Kompaktheitssatz). *X ist erfüllbar, wenn nur jede endliche Teilmenge von X erfüllbar ist.*

Denn ist X unerfüllbar, d.h. $X \vDash \bot$, ist nach Satz 4.7 schon $X_0 \vDash \bot$ für ein endliches $X_0 \subseteq X$, und der Satz ist bewiesen. Umgekehrt ergibt Satz 4.8 leicht den Satz 4.7. Beide Sätze sind also direkt auseinander herleitbar.

Weil Satz 4.6 keine speziellen Annahmen über die Mächtigkeit der Variablenmenge erfordert, gilt dieser ebenso wie der hieraus folgende Kompaktheitssatz ohne diesbezügliche Einschränkungen. Dies macht den Satz zu einem brauchbaren Instrument für Anwendungen, die im nächsten Abschnitt erläutert werden.

Bemerkung 2. Es lassen sich auch direkte Beweise für Satz 4.8 oder geeignete Umformulierungen hiervon angeben, die mit einem Regelkalkül nichts zu tun haben. So ist dieser Satz beispielsweise äquivalent mit $\bigcap_{\alpha \in X} \operatorname{Md} \alpha = \emptyset \;\Rightarrow\; \bigcap_{\alpha \in X_0} \operatorname{Md} \alpha = \emptyset$ für ein endliches $X_0 \subseteq X$, wobei $\operatorname{Md} \alpha$ die Menge aller Modelle von α bezeichnet. In dieser Formulierung wird die Kompaktheit eines gewissen, auf natürliche Weise entstehenden topologischen Raumes behauptet, dessen Punkte die Belegungen der Variablen sind. Daher auch der Name *Kompaktheitssatz*. Näheres zu diesem Thema findet man z.B. in [RS]. Übung 5 unten liefert nicht nur die Sätze 4.7 und 4.8, sondern auch die Tatsache, dass der Konsequenzrelation $\vDash$ weder neue Tautologien noch neue Regeln konsistent hinzugefügt werden können (Post-Vollständigkeit und strukturelle Vollständigkeit von $\vDash$, siehe hierzu [Ra1]).

Übungen

1. Man beweise, ist $X \cup \{\neg\alpha \mid \alpha \in Y\}$ inkonsistent und $Y \neq \emptyset$, so existieren Formeln $\alpha_0, \ldots, \alpha_n \in Y$ mit $X \vdash \alpha_0 \vee \ldots \vee \alpha_n$.

2. Man erweitere die Signatur $\{\neg, \wedge\}$ um $\vee$ und beweise die Vollständigkeit des Kalküls, der die bisherigen Regeln um die beiden folgenden ergänzt:
$$\frac{X \vdash \alpha}{X \vdash \alpha \vee \beta, \beta \vee \alpha} \quad ; \quad \frac{X, \alpha \vdash \gamma \;\big|\; X, \beta \vdash \gamma}{X, \alpha \vee \beta \vdash \gamma}.$$

3. Man zeige, maximal konsistente Mengen sind deduktiv abgeschlossen. Dies gilt für jeden logischen Kalkül, in dem Inkonsistenz durch die Ableitbarkeit von nur einer einzigen Formel wie etwa $\bot$ charakterisiert ist.

4. Es sei $\vdash$ eine finitäre Konsequenzrelation in $\mathcal{F}\{\wedge, \neg\}$ mit den Eigenschaften $(\wedge 1)$–$(\neg 2)$. Man zeige, $\vdash$ ist *maximal*, d.h. ist $\vdash' \supset \vdash$, so gilt $\vdash' \alpha$ für alle α.

5. Man zeige durch Rückführung auf Übung 4: es gibt genau eine Konsequenzrelation in $\mathcal{F}\{\wedge, \neg\}$, welche $(\wedge 1)$–$(\neg 2)$ erfüllt. Dies impliziert offenbar die Vollständigkeit des Kalküls $\vdash$, weil auch $\vDash$ diese Eigenschaften hat.

1.5 Anwendungen des Kompaktheitssatzes

Satz 4.8 ist sehr nützlich, um gewisse Eigenschaften endlicher Strukturen auf unendliche zu übertragen. Nachfolgend einige typische Beispiele. Diese könnte man auch mit dem prädikatenlogischen Kompaktheitssatz 3.3.2 behandeln, aber die Beispiele lehren, wie man die Konsistenz gewisser Aussagenmengen der Prädikatenlogik auch aussagenlogisch gewinnt. Dies erweist sich u.a. als nützlich für Kapitel **4**.

1. Jede Menge M kann (total) geordnet werden. [4)]

Das bedeutet, es gibt eine irreflexive, transitive und konnexe Relation $<$ auf M. Für endliches M folgt dies leicht induktiv über die Elementezahl von M. Die Behauptung ist klar für $M = \emptyset$ oder 1-elementiges M, und ist $M = N \cup \{a\}$ mit einer n-elementigen Menge N und $(n{+}1)$-elementigem M, erhält man aus einer nach Induktionsannahme existierenden Ordnung von N eine solche für M, indem man das Element a einfach „hintendran“ setzt, d.h. es sei $x < a$ für alle $x \in N$.

Sei nun M beliebig. Wir betrachten für jedes Paar $(a, b) \in M \times M$ je eine Aussagenvariable p_{ab}. Sei X die Formelmenge bestehend aus den Formeln

$$\begin{array}{rl} \neg p_{aa} & (a \in M), \\ p_{ab} \wedge p_{bc} \to p_{ac} & (a, b, c \in M), \\ p_{ab} \vee p_{ba} & (a \neq b). \end{array}$$

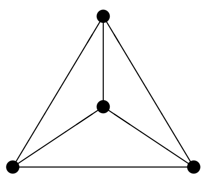
Aus einem Modell w für X gewinnen wir sofort eine Ordnung $<$ durch die Erklärung $a < b \;\Leftrightarrow\; w \vDash p_{ab}$. So besagt $w \vDash \neg p_{aa}$ dasselbe wie $a \not< a$. Analog reflektieren die weiteren Formeln jeweils die Transitivität und die Konnexität. Nach Satz 4.8 hat X ein Modell, wenn nur jede endliche Teilmenge $X_0 \subseteq X$ eines hat. Sei X_0 gegeben. Darin kommen nur endlich viele Variablen vor. Folglich gibt es endliche Mengen $M_1 \subseteq M$ und $X_1 \supseteq X_0$, wobei X_1 genau so gebildet wird wie X, nur durchlaufen a, b, c jetzt die endliche Menge M_1 anstelle von M. Nun ist X_1 und damit X_0 tatsächlich erfüllbar: ist nämlich $<$ eine Ordnung der endlichen Menge M_1 und wird w durch $w \vDash p_{ab} \;\Leftrightarrow\; a < b$ erklärt, so ist w offenbar Modell für X_1.

2. Der Vierfarbensatz für unendliche planare Graphen.

Ein *einfacher Graph* sei ein Paar (E, K) mit einer Menge E, deren Elemente *Punkte* oder *Ecken* heißen, und einer Menge K von ungeordneten Paaren $\{a, b\}$ aus Punkten $a \neq b$, *Kanten* genannt (man kann K auch als irreflexive und symmetrische Relation verstehen, siehe **2.1**). Ist $\{a, b\} \in K$, so heißen a, b *benachbart*. (E, K) heiße k-*chromatisch*, wenn man eine Zerlegung $E = C_1 \cup \cdots \cup C_k$ mit $C_i \cap C_j = \emptyset$ für $i \neq j$

[4)] Nicht erklärte Begriffe werden in **2.1** definiert. Das Beispiel ist u.a. deswegen von Interesse, weil der Kompaktheitssatz echt schwächer ist als das Auswahlaxiom, nach welchem sich jede Menge sogar wohlordnen lässt. Also ist auch die Ordnungsfähigkeit aller Mengen schwächer als dieses.

(den Färbungsklassen) so angeben kann, dass benachbarte Punkte nicht die gleiche Farbe tragen. Kurzum, $a, b \in C_i \;\Rightarrow\; \{a, b\} \notin K$ für $i = 1, \dots, k$.



Die Figur zeigt den kleinsten 4-chromatischen Graphen, der nicht 3-chromatisch ist. Alle Punkte sind zueinander benachbart. Wir zeigen, ein Graph (E, K) ist k-chromatisch, wenn dies nur für jeden endlichen Teilgraphen (E_0, K_0) der Fall ist (K_0 besteht aus den Kanten $\{a, b\} \in K$ mit $a, b \in E_0$). Dazu betrachte man folgende aus den Variablen $p_{i,a}$ für $1 \leqslant i \leqslant k$ und $a \in E$ gebildete Formelmenge X:

$$\begin{array}{lll} p_{1,a} \vee \dots \vee p_{k,a}, & \neg(p_{i,a} \wedge p_{j,a}) & (1 \leqslant i < j \leqslant k,\ a \in E), \\ & \neg(p_{i,a} \wedge p_{i,b}) & (i = 1, \dots, k,\ \{a, b\} \in K). \end{array}$$

Wieder genügt es, ein Modell w für X anzugeben. Denn w liefert eine Einteilung $E = C_1 \cup \dots \cup C_k$ in k Färbungsklassen durch die Erklärung $a \in C_i \;\Leftrightarrow\; w \vDash p_{i,a}$. Die erste Formel besagt nämlich, jeder Punkt gehört wenigstens einer Färbungsklasse an, die zweite sichert deren Disjunktheit, und die dritte, dass benachbarte Punkte nicht dieselbe Farbe tragen. Wir müssen also jede endliche Teilmenge X_0 von X erfüllen. Sei (E_0, K_0) der endliche Teilgraph von (E, K) mit allen Punkten, die als Indizes in den Variablen von X_0 auftreten. Die auf (E_0, K_0) bezogene Voraussetzung sichert die Erfüllbarkeit von X_0 analog wie in Beispiel 1, und alles ist gezeigt. Jeder planare (ohne Überschneidung von Kanten in die Ebene einbettbare) endliche Graph ist nach dem *Vierfarbensatz* 4-chromatisch. Also gilt dieser nach dem Bewiesenen auch für alle unendlichen Graphen, deren endliche Teilgraphen sämtlich planar sind.

3. Der Königsche Graphensatz.

Es gibt verschiedene Versionen dieses Satzes. Wir beziehen ihn hier auf gerichtete Bäume. Ein *gerichteter Baum* sei ein Paar $(E, \lhd)$ mit irreflexivem $\lhd \subseteq E^2$, so dass für ein gewisses $c \in E$, die *Wurzel* genannt, Folgendes gilt: c ist mit jedem anderen Punkt $a \in E$ durch genau einen *Weg* verbunden. Dies sei eine Folge $(a_0, \dots, a_n)$ von Punkten mit $a_0 = c$, $a_n = a$ und $a_i \lhd a_{i+1}$ für alle $i < n$. Dies hat z.B. zur Folge, dass zu jedem $b \in E \setminus \{c\}$ genau ein Vorgänger $a \lhd b$ in E existiert.

Der Satz besagt nun: Hat jeder Punkt a nur endlich viele Nachfolger (Punkte b mit $a \lhd b$) und gibt es in $(E, \lhd)$ beliebig lange von c ausgehende Wege, dann gibt es auch einen unendlichen, mit c beginnenden Weg durch den Baum, d.h. eine Folge $(c_k)_{k \in \mathbb{N}}$ derart, dass $c_0 = c$ und $c_k \lhd c_{k+1}$. Zum Beweis erklären wir rekursiv $S_0 = \{c\}$ und $S_{k+1} = \{b \in E \mid \text{es gibt ein } a \in S_k \text{ mit } a \lhd b\}$. Weil jeder Punkt nur endlich viele Nachfolger hat, ist jede „Schicht“ S_k endlich, und weil es beliebig lange Wege $(c, a_1, \dots, a_k)$ gibt und offenbar $a_k \in S_k$, ist kein S_k leer. Ferner ist klar, dass die Schichten $S_0, S_1, \dots$ paarweise disjunkt sind. Sei nun p_a für jedes $a \in E$ je eine Aussagenvariable und X bestehe aus den Formeln

$$\begin{array}{lll}\text{(A)} & \bigvee_{a\in S_k} p_a, \quad \neg(p_a \wedge p_b) & \big(a,b\in S_k,\ a\neq b,\ k=0,1,\dots\big),\\ \text{(B)} & \qquad\qquad p_b \to p_a & \big(a,b\in E,\ a \lhd b\big).\end{array}$$

Ist $w \vDash X$, gibt es wegen (A) genau ein $c_k \in S_k$ mit $w \vDash p_{c_k}$. Speziell ist $c_0 = c$. Sei $a \in S_k$ so gewählt, dass $a \lhd c_{k+1} \in S_{k+1}$. Nach (B) ist wegen $w \vDash p_{c_{k+1}}$ auch $w \vDash p_a$, d.h. $a = c_k$, denn c_k ist der einzige Punkt in S_k mit $w \vDash p_{c_k}$. Also $c_k \lhd c_{k+1}$ für alle k. Damit ist $(c_k)_{k\in\mathbb{N}}$ tatsächlich ein Weg der gesuchten Art. Wieder ist jedes endliche $X_0 \subseteq X$ erfüllbar: Ist in X_0 von Variablen bis höchstens zur Schicht S_n die Rede, so ist X_0 Teilmenge einer endlichen Formelmenge X_1, welche wie X definiert ist, nur läuft k lediglich bis n. Und es ist klar, dass X_1 ein Modell hat.

4. Das Heiratsproblem (in linguistischem Gewande).

Sei N eine Menge von *Namen* (oder Worten) mit *Bedeutungen* in einer Menge B. Ein Name $\nu \in N$ kann *homonym* sein, d.h. mehrere Bedeutungen besitzen, oder *synonym* sein, d.h. mit anderen Namen aus N dieselbe Bedeutung haben, oder auch beides. Wir gehen von den plausiblen Annahmen aus, jeder Name ν habe nur endlich viele Bedeutungen, und k viele Namen haben mindestens k viele Bedeutungen. Wir behaupten, es gibt eine *Bedeutungsunifizierung*. Dies sei eine injektive Abbildung $f\colon N \to B$, die jedem ν eine seiner ursprünglichen Bedeutungen belässt.

Für endliche Mengen N zeigt man dies induktiv über die Elementezahl n von N: Für $n = 1$ ist die Behauptung klar. Sei nun $n > 1$. **Fall 1:** Je m $(< n)$ Namen haben mindestens $m + 1$ Bedeutungen. Man ordne einem beliebig gewählten $\nu \in N$ eine seiner Bedeutungen b zu, so dass von den Namen aus $N\setminus\{\nu\}$ je k Namen immer noch k Bedeutungen $\neq b$ haben. Nach Induktionsannahme gibt es eine Bedeutungsunifizierung für $N\setminus\{\nu\}$, welche zusammen mit (ν, b) eine solche für ganz N liefert. **Fall 2:** Es gibt ein m $(0 < m < n)$ und ein m-elementiges $M \subseteq N$ mit einer nur m-elementigen Menge B_M aller Bedeutungen der $\nu \in M$. Jedem $\nu \in M$ lässt sich gemäß Induktionsannahme eine seiner Bedeutungen aus B_M zuordnen. Von den Namen aus $N\setminus M$ haben je k $(\leqslant n - m)$ Namen dann immer noch k Bedeutungen außerhalb B_M wie man leicht sieht. Es gibt nach Induktionsannahme also auch eine Bedeutungsunifizierung für $N\setminus M$ in $B\setminus B_M$. Fügt man diese mit derjenigen für M zusammen, so ergibt sich offenbar eine solche für ganz N.

Um nun die Behauptung für beliebige Namensmengen N zu beweisen, ordne man jedem Paar $(\nu, b) \in N \times B$ je eine Variable $p_{\nu,b}$ zu und betrachte die Formelmenge

$$X:\quad \begin{cases} p_{\nu,a} \vee \dots \vee p_{\nu,e} & (\nu \in N,\ a,\dots,e \text{ die Bedeutungen von } \nu),\\ \quad\neg(p_{\nu,x} \wedge p_{\nu,y}) & (\nu \in N,\ x,y \in B,\ x \neq y).\end{cases}$$

Ist $w \vDash X$, erhält man durch die Erklärung $f\nu = b \;\Leftrightarrow\; w \vDash p_{\nu,b}$ offenbar eine Bedeutungsunifizierung von N. Jedes endliche $X_0 \subseteq X$ hat ein Modell, weil dort nur endlich viele Namen als Indizes vorkommen und für diesen Fall die Behauptung bewiesen wurde. Damit hat auch X ein Modell.

5. Der Ultrafiltersatz.

Dieser Satz ist von herausragender Bedeutung in der Topologie, der Mengenlehre, der Modelltheorie (siehe **5.7**) und anderswo. Eine nichtleere Familie F von Teilmengen einer nichtleeren Menge I heißt ein *Filter auf* I, wenn für alle $M, N \subseteq I$

$$\text{(a) } M, N \in F \Rightarrow M \cap N \in F, \qquad \text{(b) } M \in F \;\&\; M \subseteq N \Rightarrow N \in F,$$

(a) und (b) zusammen sind gleichwertig mit $(\cap)$ $M \cap N \in F \Leftrightarrow M, N \in F$, wie man leicht sieht (man beachte $M \subseteq N \Rightarrow M \cap N = M$ für den Beweis von (b) aus $(\cap)$). Ein Filter $F \subseteq \mathfrak{P}I$ heißt *Ultrafilter auf* I, wenn F nebst $(\cap)$ auch noch die Bedingung $(\neg)$ $\neg M \in F \Leftrightarrow M \notin F$, für alle $M \subseteq I$ erfüllt; dabei sei $\neg M = I \setminus M$.

Für festes $J \subseteq I$ ist $F = \{M \subseteq I \mid M \supseteq J\}$ Beispiel eines Filters, denn gewiss gilt $J \subseteq M \cap N \Leftrightarrow J \subseteq M, N$. Ein simpler Spezialfall ist $F = \{I\}$. Wichtiges Beispiel eines Filters für unendliches I ist die Menge aller *koendlichen* Teilmengen $K \subseteq I$, d.h. $I \setminus K$ ist endlich. Denn $K_1 \cap K_2$ ist genau dann koendlich, wenn K_1, K_2 beide koendlich sind. Ultrafilter, die keine endlichen, also sämtliche koendlichen Mengen enthalten, heißen *nichttrivial*. $\{J \subseteq I \mid i_0 \in J\}$ ist für jedes $i_0 \in I$ ein trivialer Ultrafilter. Deren Existenz ist trivial. Das Problem sind nichttriviale Ultrafilter.

Ein Filter F heiße *echt*, wenn $F \neq \mathfrak{P}I$. Dies ist nach (b) gleichwertig mit $\emptyset \notin F$. Jeder echte Filter F erfüllt mit F für E die Voraussetzung im folgendem Satz, insbesondere der Filter aller koendlichen Teilmengen einer unendlichen Menge I. Der Satz sichert also die Existenz nichttrivialer Ultrafilter auf unendlichem I.

Ultrafiltersatz. *Jedes $E \subseteq \mathfrak{P}I$ kann zu einem Ultrafilter U auf I erweitert werden, sofern $\bigcap_{i \leqslant n} M_i \neq \emptyset$ für alle n und alle $M_0, \dots, M_n \in E$.*

Beweis. Man betrachte mit den Aussagenvariablen p_J für $J \subseteq I$ die Formelmenge

$$X: \quad p_{M \cap N} \leftrightarrow p_M \wedge p_N, \quad p_{\neg M} \leftrightarrow \neg p_M, \quad p_K \quad (M, N \subseteq I,\ K \in E).$$

Sei $w \vDash X$. Dann gelten offenbar $(\cap)$ und $(\neg)$ für $U := \{J \subseteq I \mid w \vDash p_J\}$. Also ist U Ultrafilter mit $E \subseteq U$. Es genügt daher zu zeigen, dass jede endliche Teilmenge von X ein Modell hat. Dazu reicht es offenbar, den Ultrafiltersatz für endliches $E \neq \emptyset$ zu beweisen. Das ist leicht. Denn sei $E = \{M_0, \dots, M_n\}$, $D := \bigcap_{i \leqslant n} M_i$ und $i_0 \in D$. Dann ist $U = \{J \subseteq I \mid i_0 \in J\}$ ein Ultrafilter mit $U \supseteq E$. ❏

Übungen

1. Man zeige mit dem Kompaktheitssatz: jede partielle Ordnung $\leqslant_0$ einer Menge M kann zu einer totalen Ordnung $\leqslant$ von M erweitert werden.

2. Sei U ein Ultrafilter auf einer unendlichen Menge I. Man zeige, U ist genau dann trivial, wenn ein $i_0 \in I$ existiert mit $U = \{J \subseteq I \mid i_0 \in J\}$.

1.6 Hilbert-Kalküle

Die in gewissem Sinne einfachsten logischen Kalküle sind sogenannte *Hilbert-Kalküle*. Sie beruhen auf ausgewählten Tautologien als *logischen Axiomen*, deren Auswahl aber recht willkürlich ist und auch wesentlich von der logischen Signatur abhängt. Sie benutzen ferner Schlussregeln wie z.B. den Modus Ponens MP : $\alpha, \alpha \to \beta / \beta$ [5)]. Ein Vorteil dieser Kalküle besteht darin, dass formale Beweise durch endliche Formelfolgen unmittelbar präzisiert und veranschaulicht werden können. Dieser Vorteil wird sich vor allem bei der Gödelisierung des Beweisens auszahlen.

Im Folgenden betrachten wir einen solchen Kalkül mit MP als einziger Schlussregel. Der Kalkül wird vorübergehend mit $\mathrel{|\!\sim}$ bezeichnet, um ihn von dem in **1.4** betrachteten Regelkalkül $\vdash$ zu unterscheiden. Die logische Signatur enthalte nur $\neg, \wedge$. In den Axiomen von $\mathrel{|\!\sim}$ erscheint jedoch die durch $\alpha \to \beta := \neg(\alpha \wedge \neg\beta)$ definierte Implikation, was die Niederschrift dieser Axiome erheblich verkürzt.

Das *logische Axiomensystem* unseres Kalküls bestehe aus der Menge Λ aller Formeln der folgenden Gestalt, wobei an die Rechtsklammerung erinnert sei.

$$\begin{array}{llll} \Lambda 1 & (\alpha \to \beta \to \gamma) \to (\alpha \to \beta) \to (\alpha \to \gamma), & \Lambda 2 & \alpha \to \beta \to \alpha \wedge \beta, \\ \Lambda 3 & \alpha \wedge \beta \to \alpha, \quad \alpha \wedge \beta \to \beta, & \Lambda 4 & (\alpha \to \neg\beta) \to (\beta \to \neg\alpha). \end{array}$$

Λ enthält nur Tautologien. Auch sind die aus Λ mit MP herleitbaren Formeln sämtlich Tautologien, denn $\vDash \alpha, \alpha \to \beta$ impliziert $\vDash \beta$. Wir werden nachweisen, dass aus Λ mittels MP alle 2-wertigen Tautologien beweisbar sind und beginnen mit folgender

Definition. Ein *Beweis* aus X (im Kalkül $\mathrel{|\!\sim}$) sei eine Folge $(\varphi_0, \dots, \varphi_n)$, so dass für jedes $k \leqslant n$: $\varphi_k \in X \cup \Lambda$ oder aber es existieren Indizes $i, j < k$ mit $\varphi_i = \varphi_j \to \varphi_k$ (d.h. φ_k entsteht durch Anwendung von MP auf Folgenglieder, die φ_k vorangehen). Ein Beweis $(\varphi_0, \dots, \varphi_n)$ mit $\varphi_n = \alpha$ heißt *ein Beweis für α aus X*. Es sei $X \mathrel{|\!\sim} \alpha$ (aus X ist α *beweisbar* oder *ableitbar*), wenn es einen Beweis für α aus X gibt.

Beispiel. $(p, q, p \to q \to p \wedge q, q \to p \wedge q, p \wedge q)$ ist ein Beweis für $p \wedge q$ aus $X = \{p, q\}$. Man beachte, das Folgenglied $p \to q \to p \wedge q$ dieses Beweises gehört zu Λ.

Weil ein Beweis nur endlich viele Formeln enthält, liefert obige Definition z.B. unmittelbar den wie Satz 4.1 formulierten Endlichkeitssatz für $\mathrel{|\!\sim}$. Jeder Anfang eines Beweises ist offenbar selbst ein Beweis. Ferner ist die Verkettung von Beweisen für α und für $\alpha \to \beta$ und die Verlängerung der entstehenden Folge um β ein Beweis für

[5)] Diese Schreibweise soll grob gesagt zum Ausdruck bringen, dass β aus einer Formelmenge X als bewiesen gilt, wenn zuvor α und $\alpha \to \beta$ aus X bewiesen wurden. MP ist Beispiel einer 2-stelligen Hilbert-Regel. Für eine allgemeine Definition dieses Regel-Typs siehe z.B. [Ra1].

β, wie man mit bloßem Auge sieht. Damit gilt also

$$(*) \quad X \vdash \alpha, \alpha \to \beta \;\Rightarrow\; X \vdash \beta.$$

Kurzum, die Menge der aus X beweisbaren Formeln ist MP-*abgeschlossen*. Eine Anwendung von $(*)$ wird oft durch die Redeweise „MP ergibt...“ zitiert. Man sieht leicht, dass $X \vdash \alpha$ genau dann, wenn α zur kleinsten X umfassenden und unter MP abgeschlossenen Formelmenge gehört. Für die Gödelisierung des Beweisens und für das automatische Beweisen ist aber ratsam, mit dem obigen finiten Begriff eines Beweises zu arbeiten und die Mengenlehre aus dem Spiel zu lassen. Zum Glück befreit uns der folgende Satz von der Pflicht, Eigenschaften von Formeln α mit $X \vdash \alpha$ jedesmal induktiv über die Länge eines Beweises von α aus X nachzuweisen.

Satz 6.1 (Induktionssatz für $\vdash$). *Sei X gegeben und $\mathcal{E}$ eine Eigenschaft von Formeln mit* (o) *$\mathcal{E}\alpha$ gilt für alle $\alpha \in X \cup \Lambda$,* (s) *$\mathcal{E}\beta$, $\mathcal{E}(\beta \to \alpha) \Rightarrow \mathcal{E}\alpha$, für alle α, β. Dann gilt $\mathcal{E}\alpha$ für alle α mit $X \vdash \alpha$.*

Beweis durch Induktion über die Länge n eines Beweises von α aus X. Habe α einen Beweis Φ der Länge n und sei $\mathcal{E}\varphi$ für alle Formeln φ mit Beweisen einer Länge $< n$ angenommen. Ist $\alpha \in X \cup \Lambda$ – was für $n = 1$ stets der Fall ist – gilt $\mathcal{E}\alpha$ gemäß (o). Falls aber $\alpha \notin X \cup \Lambda$, so enthält Φ Glieder β und $\beta \to \alpha$ mit Beweisen einer Länge $< n$ (weil doch jeder Anfang von Φ selbst ein Beweis ist). Es gelten also $\mathcal{E}\beta$ und $\mathcal{E}(\beta \to \alpha)$ nach Induktionsannahme und somit $\mathcal{E}\alpha$ gemäß (s). ❏

Eine Anwendung von Satz 6.1 ist der Nachweis von $\vdash \subseteq \vDash$, oder ausführlicher

$$(Kor) \quad X \vdash \alpha \;\Rightarrow\; X \vDash \alpha \qquad (Korrektheit).$$

Denn sei $\mathcal{E}\alpha$ die Eigenschaft '$X \vDash \alpha$', mit fest vorgegebenem X. Sicher gilt $X \vDash \alpha$ für $\alpha \in X$. Dasselbe gilt für $\alpha \in \Lambda$. Also $\mathcal{E}\alpha$ für alle $\alpha \in X \cup \Lambda$ und (o) ist bestätigt. Sei nun $X \vDash \beta, \beta \to \alpha$. Dann ist auch $X \vDash \alpha$, was den Induktionsschritt (s) beweist. Nach Satz 6.1 gilt $\mathcal{E}\alpha$, d.h. $X \vDash \alpha$, wenn immer $X \vdash \alpha$. Damit ist (*Kor*) bewiesen.

Anders als in $\vdash$ sind für den Vollständigkeitsbeweis von $\vdash$ eine Reihe von Ableitungen auszuführen. Dies liegt in der Natur der Sache. Man muss Hilbert-Kalküle oft durch geduldige Ableitungen „erst einmal zum Laufen bringen“. Wir verwenden nachfolgend die offenkundige Monotonieeigenschaft $X' \supseteq X \vdash \alpha \;\Rightarrow\; X' \vdash \alpha$. Wie üblich stehe $\vdash \alpha$ für $\emptyset \vdash \alpha$.

Lemma 6.2. (a) $X \vdash \alpha \to \neg\beta \;\Rightarrow\; X \vdash \beta \to \neg\alpha$, (b) $\vdash \alpha \to \beta \to \alpha$,
(c) $\vdash \alpha \to \alpha$, (d) $\vdash \alpha \to \neg\neg\alpha$, (e) $\vdash \beta \to \neg\beta \to \alpha$.

Beweis. (a): Sicher ist $X \vdash (\alpha \to \neg\beta) \to (\beta \to \neg\alpha)$ nach Axiom $\Lambda 4$. Daraus und aus $X \vdash \alpha \to \neg\beta$ ergibt sich $X \vdash \beta \to \neg\alpha$ mit MP. (b): Es ist $\vdash \beta \wedge \neg\alpha \to \neg\alpha$ gemäß $\Lambda 3$, mit (a) also $\vdash \alpha \to \neg(\beta \wedge \neg\alpha) = \alpha \to \beta \to \alpha$. (c): Mit $\gamma := \alpha$, $\beta := \alpha \to \alpha$ in $\Lambda 1$ erhält man $\vdash (\alpha \to (\alpha \to \alpha) \to \alpha) \to (\alpha \to \alpha \to \alpha) \to \alpha \to \alpha$. Das ergibt mit (b) nach zweimaliger Anwendung von MP gerade (c). (d) folgt mit (a) dann aus $\vdash \neg\alpha \to \neg\alpha$. (e): Wegen $\vdash \neg\beta \wedge \neg\alpha \to \neg\beta$ und (a) ist $\vdash \beta \to \neg(\neg\beta \wedge \neg\alpha) = \beta \to \neg\beta \to \alpha$. ❑

Punkt (e) dieses Lemmas ergibt sofort, dass $\vdash$ die Regel $(\neg 1)$ aus **1.4** erfüllt, also $X \vdash \beta, \neg\beta \Rightarrow X \vdash \alpha$. Wegen $\Lambda 2, \Lambda 3$ erfüllt $\vdash$ sicher auch $(\wedge 1)$ und $(\wedge 2)$. Wir beweisen nach Abschluß einiger Vorbereitungen auch die Regel $(\neg 2)$ für $\vdash$ und erhalten danach leicht das gewünschte Vollständigkeitsresultat.

Lemma 6.3 (Deduktionstheorem). *$X, \alpha \vdash \gamma$ impliziert $X \vdash \alpha \to \gamma$.*

Beweis durch Induktion in $\vdash$ mit der Prämissenmenge X, α. Sei $X, \alpha \vdash \gamma$. Es bedeute $\mathcal{E}\gamma$ jetzt '$X \vdash \alpha \to \gamma$'. Zum Nachweis von (o) sei $\gamma \in X \cup \Lambda \cup \{\alpha\}$. Ist $\gamma = \alpha$, gilt $X \vdash \alpha \to \gamma$ nach Lemma 6.2(c). Ist $\gamma \in X \cup \Lambda$, so gilt sicher $X \vdash \gamma$. Weil auch $X \vdash \gamma \to \alpha \to \gamma$ nach Lemma 6.2(b), folgt $X \vdash \alpha \to \gamma$ mit MP. Zum Nachweis von (s) sei $X, \alpha \vdash \beta$ und $X, \alpha \vdash \beta \to \gamma$, so dass $X \vdash \alpha \to \beta, \alpha \to \beta \to \gamma$ nach Induktionsannahme. Zweimalige Anwendung von MP auf $\Lambda 1$ ergibt offenbar $X \vdash \alpha \to \gamma$. Damit ist (s) bestätigt und das Lemma bewiesen. ❑

Lemma 6.4. *$\vdash \neg\neg\alpha \to \alpha$.*

Beweis. Gemäß $\Lambda 3$ und MP ist $\neg\neg\alpha \wedge \neg\alpha \vdash \neg\alpha, \neg\neg\alpha$. Sei τ beliebig mit $\vdash \tau$. Die schon bewiesene Regel $(\neg 1)$ ergibt $\neg\neg\alpha \wedge \neg\alpha \vdash \neg\tau$, und Lemma 6.3 $\vdash \neg\neg\alpha \wedge \neg\alpha \to \neg\tau$. Nach Lemma 6.2(a) folgt $\vdash \tau \to \neg(\neg\neg\alpha \wedge \neg\alpha)$. MP liefert damit $\vdash \neg(\neg\neg\alpha \wedge \neg\alpha)$ und wegen $\neg(\neg\neg\alpha \wedge \neg\alpha) = \neg\neg\alpha \to \alpha$ die Behauptung des Lemmas. ❑

Lemma 6.5. *$\vdash$ erfüllt Regel $(\neg 2)$, d.h. wenn $X, \beta \vdash \alpha$ und $X, \neg\beta \vdash \alpha$, so $X \vdash \alpha$.*

Beweis. Sei $X, \beta \vdash \alpha$ und $X, \neg\beta \vdash \alpha$, also auch $X, \beta \vdash \neg\neg\alpha$ und $X, \neg\beta \vdash \neg\neg\alpha$ nach Lemma 6.2(d). Dann ist $X \vdash \beta \to \neg\neg\alpha, \neg\beta \to \neg\neg\alpha$ (Lemma 6.3), also $X \vdash \neg\alpha \to \neg\beta$ und $X \vdash \neg\alpha \to \neg\neg\beta$ nach Lemma 6.2(a). Daher $X, \neg\alpha \vdash \neg\beta, \neg\neg\beta$, also $X, \neg\alpha \vdash \neg\tau$ nach $(\neg 1)$, mit τ wie in Lemma 6.4. Folglich $X \vdash \neg\alpha \to \neg\tau$ (Lemma 6.3) und daher $X \vdash \tau \to \neg\neg\alpha$ nach Lemma 6.2(a). Wegen $X \vdash \tau$ folgt $X \vdash \neg\neg\alpha$ und mithin $X \vdash \alpha$ gemäß Lemma 6.4. ❑

Satz 6.6 (Vollständigkeitssatz). $\vdash \; = \; \vDash$.

Beweis. Nach *(Kor)* ist $\vdash \; \subseteq \; \vDash$. Weil $\vdash$ alle Basisregeln von $\vdash$ erfüllt, ist $\vdash \subseteq \; \vdash$. Nach Satz 4.6 sind $\vdash$ und $\vDash$ identisch, also $\vDash \subseteq \; \vdash$. Damit ist alles gezeigt. ❑

Danach gilt insbesondere $\vdash \alpha \;\Leftrightarrow\; \vDash \alpha$. Kurzum, genau die 2-wertigen Tautologien lassen sich mittels MP aus dem Axiomensystem Λ gewinnen.

Man erhält die Vollständigkeit von $\mid\!\sim$ durch einen Beweis der einschlägigen Lemmata aus **1.4** in naheliegender Weise natürlich auch ohne Rückgriff auf $\vdash$.

Bemerkung. Es mag überraschend klingen, dass Λ1–Λ4 bereits ausreichen, um alle aussagenlogischen Tautologien zu gewinnen. Denn diese Axiome und alle daraus mit MP herleitbaren Formeln gelten sämtlich in der intuitionistischen und sogar in der Minimallogik, siehe hierzu etwa [Ra1]. Dass Λ dennoch alle Tautologien abzuleiten gestattet, liegt daran, dass $\to$ *definiert* wurde. Würde man $\to$ als eigenständigen Junktor betrachten, wäre dies nicht mehr der Fall. Um dies einzusehen, ändere man die Interpretation von $\neg$ durch die Erklärung $\neg 0 = \neg 1 = 1$. Auch dann erhalten alle Axiome von Λ bei jeder Belegung den Wert 1, ebenso wie auch alle aus Λ mit MP herleitbaren Formeln, nicht jedoch z.B. die Formel $\neg\neg p \to p$, die anders als in Lemma 6.4 behauptet, dann auch nicht herleitbar sein kann.

Mit Hilbert-Kalkülen lassen sich auch andere zwei- und mehrwertige Logiken axiomatisieren, z.B. das funktional unvollständige Fragment der zweiwertigen Logik in Übung 4. Auch das Fragment in $\wedge, \vee$, das zwar keine Tautologien hat, in dem aber interessante Hilbert-Regeln gelten, ist durch endlich viele derartige Regeln axiomatisierbar, darunter z.B. $p, q/p \wedge q$. Der Beweis hierfür ist jedoch weniger einfach als der Text oder die Übungen vermuten lassen. Jedes der unendlich vielen Fragmente 2-wertiger Logik mit oder ohne Tautologien ist durch einen Hilbert-Kalkül mit endlich vielen Hilbert-Regeln der betreffenden Sprache axiomatisierbar wie in [HeR] bewiesen wurde.

Neben Sequenzen- und Hilbert-Kalkülen gibt es weitere Kalküle, z.B. Tableau-Kalküle in verschiedenen Varianten, die vor allem für nichtklassische logische Systeme bedeutsam sind. In Kapitel **4** wird z.B. der für die Logikprogrammierung und das maschinelle Beweisen wichtige Resolutionskalkül behandelt.

Übungen

1. Man gebe einen Beweis für die Formel $p \to p$ aus Λ explizit an.

2. Man beweise die Vollständigkeit des Hilbert-Kalküls $\vdash$ in $\mathcal{F}\{\to, \bot\}$ mit MP als einziger Schlussregel, der Definition $\neg\alpha := \alpha \to \bot$, sowie den Axiomen

   A1 $\alpha \to \beta \to \alpha$, A2 $(\alpha \to \beta \to \gamma) \to (\alpha \to \beta) \to \alpha \to \gamma$, A3 $\neg\neg\alpha \to \alpha$.

3. Sei $\vdash$ eine finitäre Konsequenzrelation und $X \nvdash \alpha$. Man zeige mit dem Zornschen Lemma: es gibt ein $Y \supseteq X$ mit $Y \nvdash \alpha$ und $Y, \beta \vdash \alpha$ für alle $\beta \notin Y$ (Y ist α-*maximal*). Ferner beweise man $Y \vdash \beta \Leftrightarrow \beta \in Y$ für α-maximales Y.

4. Man beweise die Vollständigkeit des Kalküls $\vdash$ in $\mathcal{F}\{\to\}$ mit der Schlussregel MP und den Axiomen A1, A2 (Übung 2) und AP: $((\alpha \to \beta) \to \alpha) \to \alpha$.