Brückenkurs Mathematik

(Kap. 1 - 10)

E. Letzner

Freie Universität Berlin
Fachbereich Mathematik

Inhaltsverzeichnis

1. Aussagen

Unter **Aussagen** verstehen wir sprachliche Gebilde, von denen man sinnvoll annehmen kann, sie seien entweder "wahr" oder "falsch". (Wir betreiben eine zweiwertige Logik.) Statt "eine Aussage ist wahr" sagt man auch "sie ist richtig" oder "sie gilt".

Aussagen kann man negieren; die Negation einer Aussage ist wieder eine Aussage. Zwei Aussagen lassen sich mit Hilfe von Verbindungswörtern zu neuen Aussagen verknüpfen. Wir beschränken uns auf den Gebrauch der *Junktoren* "es ist nicht wahr, daß" (kurz: "nicht"), "und", "oder", "wenn - dann", "genau dann, wenn".

1.1 Definition Bezeichnen p und q Aussagen, so verabreden wir:

Die **Negation** "nicht p" (Zeichen: $\neg p$) ist wahr, wenn p falsch ist, und falsch, wenn p wahr ist.

Die **Konjunktion** "p und q" (Zeichen: $p \wedge q$) ist nur dann wahr, wenn beide Aussagen wahr sind.

Die **Disjunktion** "p oder q" (Zeichen: $p \vee q$) ist nur dann falsch, wenn beide Aussagen falsch sind.

Die **Implikation** "wenn p, dann q" (Zeichen: $p \Rightarrow q$) ist nur dann falsch, wenn p wahr und q falsch ist.

Die **Äquivalenz** "p genau dann, wenn q" (Zeichen: $p \Leftrightarrow q$) ist nur dann wahr, wenn beide Aussagen wahr oder beide Aussagen falsch sind.

Man nennt p die *Prämisse (Voraussetzung)* und q die *Konklusion (Behauptung)* der Implikation $p \Rightarrow q$.

Für $p \Rightarrow q$ sind noch folgende Redewendungen gebräuchlich:

p impliziert q,
p ist hinreichend für q,
q ist notwendig für p.

Für $p \Leftrightarrow q$ sagt man auch:

p dann und nur dann, wenn q,
p äquivalent q,
p ist notwendig und hinreichend für q.

Wir stellen die Verabredungen noch einmal übersichtlich in *Wahrheitstafeln* zusammen. Dabei schreiben wir abkürzend "w" für wahr und "f" für falsch. Man nennt w und f die beiden Wahrheitswerte einer Aussage.

p	$\neg p$
w	f
f	w

p	q	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \Rightarrow q$	$p \Leftrightarrow q$
w	w	w	w	w	w
w	f	f	w	f	f
f	w	f	w	w	f
f	f	f	f	w	w

Merke: Eine Implikation mit falscher Prämisse ist wahr.

Der Wahrheitswert einer aus einzelnen Aussagen zusammengesetzten Aussage ergibt sich allein und vollständig aus den Wahrheitswerten der Einzelaussagen.

Beispiel: $p \Rightarrow (q \vee r)$.

p	q	r	$q \vee r$	$p \Rightarrow (q \vee r)$
w	w	w	w	w
w	w	f	w	w
w	f	w	w	w
w	f	f	f	f
f	w	w	w	w
f	w	f	w	w
f	f	w	w	w
f	f	f	f	w

In der Mathematik spielt der **Beweis** von Aussagen eine wesentliche Rolle. Eine Aussage - mag sie auch noch so einsichtig erscheinen - wird erst dann als "wahr" anerkannt und als (mathematischer) **Satz** bezeichnet, wenn ihre Gültigkeit durch logische Schlüsse aus anderen "wahren" Aussagen nachgewiesen worden ist. Am Anfang einer mathematischen Theorie stehen Aussagen, deren Gültigkeit nicht in Frage gestellt wird, die als "wahr" angenommen werden; sie heißen **Axiome**. Die Gesamtheit dieser Axiome heißt (ein) **Axiomensystem** dieser mathematischen Theorie.

Die Grundform des logischen Schließens ist die **Abtrennungsregel** ("modus ponens"). Sie erlaubt es, bei einer wahren Implikation von der (Wahrheit der) Prämisse auf die (Wahrheit der) Konklusion zu schließen. Aus diesem Grunde liest man eine wahre Implikation $p \Rightarrow q$ auch: "Aus p folgt q." Bei einer wahren Äquivalenz kann von jeder der beiden Aussagen auf die andere geschlossen werden. Man spricht in diesem Fall von einem umkehrbaren Schluß.

1.2 Satz (Abtrennungsregel) Ist p wahr und ist $p \Rightarrow q$ wahr, so ist q wahr.

Beweis:

$p \Rightarrow q$ ist in drei der vier möglichen Fälle wahr:

p	q	$p \Rightarrow q$
w	w	w
~~w~~	~~f~~	~~f~~
f	w	w
f	f	w

Wenn p wahr ist (1. Fall), dann ist q ebenfalls wahr.

❑

1.3 Definition

Eine aus einzelnen Aussagen mit Hilfe von Junktoren zusammengesetzte Aussage, die unabhängig von den Wahrheitswerten der Einzelaussagen wahr ist, nennt man **aussagenlogisch allgemeingültig**, ein **Gesetz der Aussagenlogik** oder eine **Tautologie**.

Beispiele:

$p \vee \neg p$ ("tertium non datur") ist eine Tautologie. (Stellen Sie die Wahrheitstafel auf.)

Um zu zeigen, daß $p \Rightarrow (q \vee r)$ keine Tautologie ist, genügt es, die vierte Zeile der obigen Wahrheitstafel anzugeben.

p	q	r	$q \vee r$	$p \Rightarrow (q \vee r)$
w	f	f	f	f

Im folgenden Satz stellen wir die wichtigsten Tautologien zusammen. Um Klammern einzusparen, vereinbaren wir:

$\neg$ bindet stärker als $\wedge$ und $\vee$, $\wedge$ und $\vee$ binden stärker als $\Rightarrow$ und $\Leftrightarrow$.

1.4 Satz (Gesetze der Aussagenlogik)

p, q, r seien Aussagen. Dann sind die folgenden Aussagen wahr:

a) $p \wedge q \Leftrightarrow q \wedge p$ — Kommutativgesetze
$p \vee q \Leftrightarrow q \vee p$

b) $p \wedge (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \wedge r$ — Assoziativgesetze
$p \vee (q \vee r) \Leftrightarrow (p \vee q) \vee r$

c) $p \wedge (q \vee r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$ — Distributivgesetze
$p \vee (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee r)$

! d) $\neg(p \vee q) \Leftrightarrow \neg p \wedge \neg q$ — Gesetze von DE MORGAN
$\neg(p \wedge q) \Leftrightarrow \neg p \vee \neg q$

e) $\neg\neg p \Leftrightarrow p$ — Gesetz von der doppelten Negation

! f) $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow \neg p \vee q$ — Umformung der Implikation
$(p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow (p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$ — Umformung der Äquivalenz

g) $(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r) \Rightarrow (p \Rightarrow r)$ — Transitivität der Implikation
$(p \Leftrightarrow q) \wedge (q \Leftrightarrow r) \Rightarrow (p \Leftrightarrow r)$ — Transitivität der Äquivalenz

! h) $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\neg q \Rightarrow \neg p)$ — Kontraposition

i) $(p \Rightarrow (q \Rightarrow r)) \Leftrightarrow (p \wedge q \Rightarrow r)$ — Prämissenverschmelzung

j) $p \Leftrightarrow (\neg p \Rightarrow p)$ — Indirekte Beweise
$p \Leftrightarrow (\neg p \Rightarrow (q \wedge \neg q))$

! k) $\neg(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow p \wedge \neg q$ — Negation der Implikation

Sind p, q zusammengesetzte Aussagen und ist $p \Leftrightarrow q$ eine Tautologie, so nennt man p und q **aussagenlogisch äquivalent**. Ist $p \Rightarrow q$ eine Tautologie, so sagt man: Die Aussage q **folgt aussagenlogisch aus** p.

Beweis

durch Wahrheitstafeln oder mit Hilfe bereits bewiesener Gesetze, z. B. h)

p	q	$p \Rightarrow q$	$\neg q$	$\neg p$	$\neg q \Rightarrow \neg p$	$(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\neg q \Rightarrow \neg p)$
w	w	w	f	f	w	w
w	f	**f**	w	f	**f**	w
f	w	w	f	w	w	w
f	f	w	w	w	w	w

oder: $(p \Rightarrow q) \overset{(f)}{\Leftrightarrow} \neg p \vee q$, $\neg p \vee q \overset{(e)}{\Leftrightarrow} \neg p \vee \neg\neg q$, $\neg p \vee \neg\neg q \overset{(a)}{\Leftrightarrow} \neg\neg q \vee \neg p$, $\neg\neg q \vee \neg p \overset{(f)}{\Leftrightarrow} (\neg q \Rightarrow \neg p)$, und aufgrund der Transitivität der Äquivalenz folgt $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\neg q \Rightarrow \neg p)$.

Man schreibt dafür verkürzt (wenn auch nicht ganz korrekt)

$$(p \Rightarrow q) \overset{(f)}{\Leftrightarrow} \neg p \vee q \overset{(e)}{\Leftrightarrow} \neg p \vee \neg\neg q \overset{(a)}{\Leftrightarrow} \neg\neg q \vee \neg p \overset{(f)}{\Leftrightarrow} (\neg q \Rightarrow \neg p).$$

Ein weiterer Beweis durch Äquivalenzumformungen:

k) $\neg(p \Rightarrow q) \overset{(f)}{\Leftrightarrow} \neg(\neg p \vee q) \overset{(d)}{\Leftrightarrow} \neg\neg p \wedge \neg q \overset{(e)}{\Leftrightarrow} p \wedge \neg q$ ❑

Indirekte Beweise:

Der Beweis der Irrationalität von $\sqrt{2}$ ist das bekannteste Beispiel eines *indirekten Beweises.* Statt p ($\sqrt{2}$ ist irrational) zu beweisen, widerlegt man die Aussage $\neg p$, "führt $\neg p$ zum Widerspruch".

Annahme: $\sqrt{2}$ ist rational. Dann ist $\sqrt{2}$ darstellbar als Bruch $\frac{m}{n}$ mit m, n nicht beide durch 2 teilbar. (Sonst kürze man den Bruch.) Aus $\sqrt{2} = \frac{m}{n}$ folgt $2 = \frac{m^2}{n^2}$ und damit $2n^2 = m^2$. Also ist m^2 gerade. Dann ist auch m gerade, $m = 2k$. (Denn das Quadrat jeder ungeraden Zahl ist ungerade!) Aus $2n^2 = m^2$ und $m = 2k$ folgt $2n^2 = 4k^2$, d.h. $n^2 = 2k^2$. Also ist auch n gerade. Das ist ein Widerspruch; m, n sollten nicht beide durch 2 teilbar sein. ❑

In vielen Fällen läßt sich ein indirekter Beweis vermeiden, wenn man zur Kontraposition der Aussage übergeht: Anstelle der Implikation $p \Rightarrow q$ beweist man deren (logisch äquivalente) *Kontraposition* $\neg q \Rightarrow \neg p$.

Beispiel: Für positive Zahlen gilt: $a^2 < b^2 \Rightarrow a < b$.

1. *Indirekter Beweis.* Es sei $a^2 < b^2$. Annahme: $a \geq b$. Dann folgt durch Multiplikation mit a, daß $a^2 \geq ab$, und durch Multiplikation mit b, daß $ab \geq b^2$, also $a^2 \geq b^2$. Das ist ein Widerspruch.

2. *Beweis durch Übergang zur Kontraposition.* Anstelle von $a^2 < b^2 \Rightarrow a < b$ beweisen wir die Kontraposition der Aussage: $a \geq b \Rightarrow a^2 \geq b^2$.
Aus $a \geq b$ folgt durch Multiplikation mit a, daß $a^2 \geq ab$, und durch Multiplikation mit b, daß $ab \geq b^2$. Also ist $a^2 \geq b^2$.

Aufgaben

Aufgabe 1.1

Welche der folgenden sprachlichen Gebilde sind Aussagen?

a) $2 \cdot 2 = 5$
b) Quadrate schmecken bitter.
c) Alle Menschen sind sterblich.
d) Bist Du gesund?
e) Auf Alpha Centaur leben intelligente Wesen.
f) Eßt mehr Gemüse!
g) Porsche baut die besten Autos.

Aufgabe 1.2

p sei eine wahre, q und r seien falsche Aussagen. Welche Wahrheitswert haben die folgenden Aussagen:

a) $(p \wedge r) \vee (q \Rightarrow r)$
b) $\neg q \vee p$
c) $\neg q \Rightarrow (p \vee r)$
d) $\neg(p \wedge q) \vee (p \vee r)$

Aufgabe 1.3

Zeigen Sie mit Hilfe von Wahrheitstafeln, daß die folgenden Aussagen wahr sind:

a) $\neg(p \wedge q) \quad \Leftrightarrow \quad \neg p \vee \neg q$
b) $(p \Leftrightarrow q) \quad \Leftrightarrow \quad (p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$
c) $p \wedge (q \vee r) \quad \Leftrightarrow \quad (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$
d) $(p \vee q \Rightarrow r) \quad \Leftrightarrow \quad (p \Rightarrow r) \wedge (q \Rightarrow r)$

Aufgabe 1.4

Beweisen Sie die folgenden Umformungen, und geben Sie bei jedem Schritt an, welches Gesetz der Aussagenlogik benutzt wird:

a) $(p \vee q) \wedge r \quad \Leftrightarrow \quad (p \wedge r) \vee (q \wedge r)$
b) $(p \vee q) \wedge (r \vee s) \quad \Leftrightarrow \quad (p \wedge r) \vee (p \wedge s) \vee (q \wedge r) \vee (q \wedge s)$
c) $(p \Rightarrow q) \quad \Leftrightarrow \quad ((p \wedge \neg q) \Rightarrow q)$
d) $(p \wedge q \Rightarrow r) \quad \Leftrightarrow \quad ((p \wedge \neg r) \Rightarrow \neg q)$

Aufgabe 1.5

Welche der folgenden Aussagen sind Tautologien?

a) $\neg(p \Rightarrow q) \quad \Leftrightarrow \quad (q \Rightarrow p)$
b) $\neg(p \Leftrightarrow q) \quad \Leftrightarrow \quad (p \Leftrightarrow \neg q)$
c) $((p \Rightarrow q) \Rightarrow r) \quad \Leftrightarrow \quad (p \Rightarrow (q \Rightarrow r))$
d) $((p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow r) \quad \Leftrightarrow \quad (p \Leftrightarrow (q \Leftrightarrow r))$

Aufgabe 1.6

Negieren Sie die folgenden Aussagen:

a) Wenn ich Durst habe, trinke ich Milch.
b) Ich trinke keine Milch, wenn ich Durst habe.
c) Ich trinke dann und nur dann Milch, wenn ich Durst habe.
d) Ich trinke genau dann keine Milch, wenn ich keinen Durst habe.
e) Ich trinke nur dann keine Milch, wenn ich Durst habe. (Man vergleiche mit b).)

Es bedeute: d Ich habe Durst.
m Ich trinke Milch.

Aufgabe 1.7

a) Geben Sie Wahrheitstafeln für die folgenden Aussagen an:
   i) "entweder p oder q", ii) "weder p noch q".

b) Schreiben Sie diese Aussagen mit Hilfe von $\neg, \wedge, \vee$.

c) Negieren Sie diese Aussagen.

Aufgabe 1.8

Es sei $p \mid q :\Leftrightarrow \neg(p \wedge q)$ (SHEFFER-Funktion, "nand").

a) Stellen Sie die Wahrheitstafel von $\mid$ auf.

b) Ist $p \mid (q \mid r) \Leftrightarrow (p \mid q) \mid r$ eine Tautologie?

c) Zeigen Sie, daß sich $\neg, \wedge, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow$ alle nur durch $\mid$ ausdrücken lassen.

Aufgabe 1.9

Wenn ich Karten bekomme, gehe ich ins Theater. Wenn ich ins Theater gehe, sehe ich "Die Physiker". Ich bekomme Karten, oder ich ärgere mich. Ich sehe "Die Physiker" nicht. Formalisieren Sie diese Aussagen. Was kann man aus ihnen schließen?

Es bedeute:	k	Ich bekomme Karten.
	t	Ich gehe ins Theater.
	a	Ich ärgere mich.
	p	Ich sehe die Physiker.

Aufgabe 1.10

Wenn der Täter ein Mann ist, dann ist er von kleinem Wuchs. Wenn er von kleinem Wuchs ist, dann stieg er durch das Fenster ein.
Der Täter ist ein Mann, oder er trug zumindest Männerkleidung. Wenn er Männerkleidung trug, dann - vorausgesetzt, daß die Aussage des Augenzeugen zuverlässig ist - stieg er durch das Fenster ein.
Die Tatortbesichtigung ergab, daß der Täter nicht durch das Fenster eingestiegen war.

Es bedeute:	m	Der Täter ist ein Mann.
	k	Er ist von kleinem Wuchs.
	s	Er stieg durch das Fenster ein.
	a	Er trug Männerkleidung.
	z	Die Aussage des Zeugen ist zuverlässig.

Aufgabe 1.11

Wenn ich die Prüfung bestehe, bekomme ich den Führerschein. Ich bestehe die Prüfung oder mein Bruder gewinnt die Wette. Wenn ich den Führerschein bekomme, kaufe ich mir ein Auto. Ich kaufe mir kein Auto. Was können Sie daraus schließen?

Es bedeute:	p	Ich bestehe die Prüfung.
	f	Ich bekomme den Führerschein.
	w	Mein Bruder gewinnt die Wette.
	a	Ich kaufe mir ein Auto.

2. Aussageformen

Entfernt man aus einer Aussage eine oder mehrere **Konstanten** und besetzt die Leerstellen durch Platzhalter, sogenannte **Variable**, so entsteht eine **Aussageform**.

Beispiele:
x ist eine Quadratzahl,
x ist durch 2 teilbar
x ist durch y teilbar,
x ist durch x teilbar.

Aussageformen sind weder wahr noch falsch. Wenn man alle Variablen durch Konstanten ersetzt, entsteht wieder eine Aussage. Dabei müssen gleiche Variable überall durch die gleiche Konstante ersetzt werden. Zu jeder Variablen gehört die Angabe eines Objektbereichs (Definitionsbereichs), der alle Objekte enthält, die an die Stelle der betreffenden Variablen treten können.

Schreibweise:

Q bedeute:	"... ist eine Quadratzahl".	Eigenschaft, einstelliges Prädikat
Dann bedeutet:		
Qx	" x ist eine Quadratzahl".	Aussageform
Q9	" 9 ist eine Quadratzahl".	Aussage
T bedeute:	" ... ist durch ... teilbar"	Beziehung, zweistelliges Prädikat
Dann bedeutet:		
Txy	" x ist durch y teilbar"	Aussageform mit zwei Variablen
Tx2	" x ist durch 2 teilbar"	Aussageform mit einer Variablen
Txx	" x ist durch x teilbar"	Aussageform mit einer Variablen

Aussageformen können wie Aussagen mit Hilfe von logischen Zeichen zu neuen Aussageformen verbunden werden. Aussagen können als Aussageformen mit null Variablen angesehen werden.

Soll Px als Abkürzung für eine bestimmte Aussageform stehen, so benutzen wir das Zeichen ":⇔", gelesen: "per definitionem äquivalent". Wird etwa Px definiert als die zu $x = a$ äquivalente Aussageform, so schreibt man diese Verabredung: $Px :\Leftrightarrow x = a$ (oder auch $x = a \Leftrightarrow: Px$). Der Doppelpunkt steht auf der Seite des zu Definierenden.

Aus einer Aussageform erhält man eine Aussage, wenn alle Variablen durch Konstanten ersetzt werden. Statt dieser Ersetzung kann man auch Wendungen wie "für alle x", "es gibt ein x" vor die Aussageform setzen, gemeint sind alle x aus dem Definitionsbereich der Variablen x. Dadurch wird eine Variable gebunden. Nicht gebundene Variablen heißen frei. Gebundene Variablen dürfen nicht mehr durch Konstanten ersetzt werden.

Eine Aussage der Form "für alle x gilt", "für jedes x gilt" nennt man eine *Allaussage*.
Eine Aussage der Form "es gibt (mindestens) ein x mit Px", "es existiert (mindestens) ein x mit Px" nennt man eine *Existenzaussage*.

Wir führen die **Quantoren** $\bigwedge$ und $\bigvee$ ein:

$\bigwedge_x$ Px bedeute: Für alle x (aus dem Objektbereich) gilt Px.
Für jedes x (aus dem Objektbereich) gilt Px.

$\bigvee_x$ Px bedeute: Es gibt ein x (aus dem Objektbereich) mit Px.
Es existiert ein x (aus dem Objektbereich) mit Px.

Statt $\bigwedge\limits_x$ Px schreibt man auch $\forall$x Px, statt $\bigvee\limits_x$ Px auch $\exists$x Px. Man beachte aber: Die Zeichen $\forall$x und $\exists$x sind keine Wortkürzel. Einer Aussageform wie z. B. xy = yx kann die sprachliche Wendung "für alle x,y" oder "für alle x,y$\in \mathbb{R}$" nachgestellt werden. Nachgestelltes $\forall$x,y oder $\forall$x,y$\in \mathbb{R}$ aber ist falsch.

Gebundene Variable sind austauschbar: $\bigwedge\limits_x Px \Leftrightarrow \bigwedge\limits_y Py \Leftrightarrow \bigwedge\limits_z Pz$. Eine ähnliche Rolle spielen in der Mathematik Integrationsvariable und Summationsindizes,

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(u)\,du = \int_a^b f(t)\,dt \quad \text{und} \quad \sum_{i=1}^n a_i = \sum_{j=1}^n a_j = \sum_{k=1}^n a_k,$$

oder auch Variable in Funktionstermen $f(x) = x^2$, $f(u) = u^2$ oder $f(t) = t^2$.

Über endlichen Objektbereichen lassen sich All- und Existenzaussagen ohne Quantoren ausdrücken. Enthält der Objektbereich nur die Objekte a, b, c, so kann

$\bigwedge\limits_x$ Px ersetzt werden durch $Pa \wedge Pb \wedge Pc$, $\bigvee\limits_x$ Px ersetzt werden durch $Pa \vee Pb \vee Pc$.
Das erklärt auch unsere Wahl der Zeichen für die Quantoren.

Man beweist eine Allaussage, indem man den Nachweis für ein "beliebiges" Objekt (aus dem Definitionsbereich von x) führt, d.h. für ein Objekt, für das außer der Zugehörigkeit zum Definitionsbereich keine weiteren Eigenschaften vorausgesetzt werden. Häufig bezeichnet man ein solches Objekt, an dem man den Beweis beispielhaft vorführt, mit dem gleichen Buchstaben wie die Variable in der Allaussage.

Beispiel: Das Quadrat jeder geraden Zahl ist gerade; für jede ganze Zahl x gilt: Ist x gerade, so ist auch x^2 gerade. Ist nämlich x eine gerade Zahl, also x = 2y, dann folgt $x^2 = (2y)^2 = 2\,(2y^2)$.

Man beweist eine Existenzaussage, indem man ein entsprechendes Element (aus dem Definitionsbereich von x) vorweist.

Beispiel: Die Aussage "Es gibt eine natürliche Zahl, die gleich ihrem Quadrat ist." ist wahr; denn für die natürliche Zahl 1 gilt $1 = 1^2$.

Gilt $\bigvee\limits_x$ Px, so findet man ein Objekt a, für das die Aussage Pa wahr ist. Gilt $\bigwedge\limits_x$ Px, so kann man nur dann ein Objekt a mit der Eigenschaft P auswählen, also auf die Aussage Pa schließen, wenn der Objektbereich nicht leer ist. (Das setzt man gewöhnlich voraus.) Aber von dieser Einschränkung abgesehen, kann man mehr: Sind b, c, ... weitere Objekte aus dem Objektbereich, so folgt auch Pb, Pc, ...

Beispiel: Für jede reelle Zahl x gilt $x^2 \geq 0$. Daraus kann man schließen: Für nicht-negative reelle Zahlen x, y gilt $(\sqrt{x} - \sqrt{y})^2 \geq 0$. (Denn $\sqrt{x} - \sqrt{y}$ ist eine reelle Zahl.) Daraus folgt unter Verwendung der üblichen Rechenregeln $\frac{1}{2}\,(x + y) \geq \sqrt{xy}$, die bekannte Ungleichung zwischen dem arithmetischen und dem geometrischen Mittel. Da über x, y nichts weiter vorausgesetzt worden ist, als daß es sich um nicht-negative reelle Zahlen handelt, hat man bewiesen: $\frac{1}{2}\,(x + y) \geq \sqrt{xy}$ für alle nicht-negativen reellen Zahlen x, y.

Über nichtleeren endlichen Objektbereichen ist die Negation einer Allaussage eine Existenzaussage. Wir fordern allgemeiner:

2.1 Axiom der Negation von Allaussagen

Ist P ein Prädikat über einem nichtleeren Objektbereich, so gilt: $\neg \bigwedge_x Px \Leftrightarrow \bigvee_x \neg Px.$

2.2 Satz (Negation von Existenzaussagen)

Ist P ein Prädikat über einem nichtleeren Objektbereich, so gilt: $\neg \bigvee_x Px \Leftrightarrow \bigwedge_x \neg Px.$

Beweis:

Wir wenden 2.1 auf die Aussage $\neg P$ an. Dann erhält man $\neg \bigwedge_x \neg Px \Leftrightarrow \bigvee_x \neg\neg Px$,

also $\neg \bigwedge_x \neg Px \Leftrightarrow \bigvee_x Px$. Geht man auf beiden Seiten zur Negation über, erhält man 2.2.

❑

Damit beherrscht man die Negation von All- und Existenzaussagen. Bei mehrfacher Quantifizierung wird das "nicht" durchgezogen, dabei kehren sich die Quantoren um. Ist etwa S ein vierstelliges Prädikat, so gilt

$$\neg \bigwedge_w \bigvee_x \bigwedge_y \bigwedge_z Swxyz \Leftrightarrow \bigvee_w \bigwedge_x \bigvee_y \bigvee_z \neg Swxyz.$$

In mathematischen Texten schreibt man die quantifizierenden Wendungen "für alle", "für jedes" und "es gibt", "es existiert" aus Gründen der besseren Lesbarkeit meist aus, benutzt also nicht die Quantorenschreibweise. Das spricht aber nicht gegen die Nützlichkeit von Quantoren bei der Umformung von Aussagen, besonders bei der Negation.

Es gibt Möglichkeiten, Quantifizierungen zu vermeiden:

1) Man arbeitet mit Aussageformen und sagt statt $\bigwedge_x Px$ "Px ist allgemeingültig", statt $\bigvee_x Px$ "Px ist erfüllbar".

2) Statt $\bigwedge_x Px$ benutzt man die Wendung: "x sei ein (beliebiges) Objekt aus dem Objektbereich. Dann gilt Px." Diese Formulierung ist in der Mathematik sehr gebräuchlich, da sie dem Beweisschema einer Allaussage entspricht. Auch wir werden diese Sprechweise häufig verwenden.

$$\bigvee_y \bigwedge_x P(x,y) \Rightarrow \bigwedge_x \bigvee_y P(x,y)$$

Beispiel: gleichmäßige Stetigkeit $\Rightarrow$ Stetigkeit

$$\bigwedge_{\varepsilon>0} \bigvee_{\delta>0} \bigwedge_{x_1,x_2 \in D} x_1-x_2|<\delta \Rightarrow |f(x_1)-f(x_2)|<\varepsilon \qquad \delta=\delta(\varepsilon)$$

$$\bigwedge_{x_1\in[a,b]} \bigwedge_{\varepsilon>0} \bigvee_{\delta>0} \bigwedge_{x_2\in D} |x_1-x_2| \Rightarrow |f(x_1)-f(x_2)|<\varepsilon \qquad \delta=\delta(\varepsilon,x_1)$$

Umkehrung gilt i. allg. nicht

$P(x,y) \Leftrightarrow$ y ist Vater von x

Aufgaben

Aufgabe 2.1

Beweisen oder widerlegen Sie:

a) Die Summe zweier gerader Zahlen ist eine gerade Zahl.
b) Das Quadrat einer geraden Zahl ist eine gerade Zahl.
c) Die Summe zweier ungerader Zahlen ist ungerade.
d) Das Produkt einer ungeraden Zahl mit einer geraden Zahl ist gerade.
e) Für jede natürliche Zahl gilt: Ist n^2 gerade, so ist auch n gerade.
f) Für jede natürliche Zahl gilt: Ist n^2 ungerade, so ist auch n ungerade.

Aufgabe 2.2

Der Objektbereich enthalte genau die reellen Zahlen. Bilden Sie die Negation folgender Aussagen:

a) Es gibt ein x, so daß für alle y gilt $xy = y$.
b) Zu jedem x gibt es ein y mit $xy > 1$.
c) Es gibt kein x mit $x^2 = -1$.
d) Zu jedem x gibt es ein y und ein z, so daß $y < x$ und $x < z$ gilt.

Aufgabe 2.3

Negieren Sie folgende Aussagen:

a) Jede natürliche Zahl, die durch 5 und 2 teilbar ist, ist durch 10 teilbar.
b) Für jede natürliche Zahl gilt: Wenn sie durch 6 teilbar ist, dann ist sie durch 2 und 3 teilbar.
c) Es gibt keine natürliche Zahl, die zugleich Primzahl und gerade ist.
d) Jede natürliche Zahl, die gerade und größer als 3 ist, ist die Summe zweier Primzahlen.
e) Jede natürliche Zahl, die Summe zweier Primzahlen ist, ist gerade und größer als 3.
f) Zu jeder natürlichen Zahl n gibt es eine Primzahl p, die größer als n ist.

Aufgabe 2.4
Formulieren Sie mit Hilfe von Quantoren unter Verwendung des Gleichheitszeichens die Aussage: Es gibt *genau ein* x mit Px.

Aufgabe 2.5
Eine Funktion $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ ist stetig in $x_0 \in \mathbb{R}$, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ so gibt, daß

für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt: $\quad |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

Wann ist eine Funktion $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ unstetig (d.h. nicht stetig) in $x_0 \in \mathbb{R}$?

Aufgabe 2.6
Eine Funktion $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ ist stetig in $x_0 \in \mathbb{R}$, wenn für jede Folge (x_n), die gegen $x_0 \in \mathbb{R}$ konvergiert, die Folge $(f(x_n))$ gegen $f(x_0)$ konvergiert.

Wann ist eine Funktion $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ unstetig (d.h. nicht stetig) in $x_0 \in \mathbb{R}$?

Aufgabe 2.7
Zwei Vektoren **a** und **b** sind linear abhängig, wenn es reelle Zahlen α, β gibt, die nicht beide gleich Null sind, so daß gilt: $\alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{b} = \mathbf{o}$.

Wann sind zwei Vektoren **a** und **b** linear unabhängig, d.h. nicht linear abhängig?

3. Gleichheit

Wir beschäftigen uns in der Mathematik mit *Objekten* wie Zahlen, Geraden, Funktionen und geben solchen Objekten *Namen*, meistens Symbole wie Buchstaben, Ziffern oder Aneinanderreihungen von Symbolen. Dabei kommt es vor, daß ein Objekt mehrere Namen hat, z. B. 7 und 2 + 5. Sind a und b Namen für dasselbe Objekt, so schreibt man a = b.

Leider bietet diese anschauliche Vorstellung keine sichere Grundlage für den Umgang mit dem Gleichheitszeichen. Wir haben Gleichheit mit Identität erklärt, was aber bedeutet Identität? Wir geben daher Anweisungen für den Umgang mit dem Gleichheitszeichen.

3.1 Axiome der Gleichheit:

= ist ein zweistelliges Prädikat. Statt =ab schreibt man üblicherweise a = b (gelesen: a gleich b). Sind a, b Objekte und ist P ein Prädikat, so gilt:

Gl_0)	$a = b \wedge Pa \Rightarrow Pb$	Universelle Ersetzbarkeit
Gl_1)	$a = a$	Reflexivität
Gl_2)	$a = b \Rightarrow b = a$	Symmetrie
Gl_3)	$a = b \wedge b = c \Rightarrow a = c$	Transitivität

Statt $\neg(a = b)$ schreibt man $\neq$ und liest: a ungleich b.

Die Axiome der Gleichheit sind nicht unabhängig voneinander. Es genügt Gl_0 und Gl_1 zu fordern. Gl_2 und Gl_3 lassen sich dann schon beweisen.

Ist a = b, so gilt nach Gl_0 jede Aussage, die auf a zutrifft auch für b. Nimmt man statt P das Prädikat $\neg P$, so erhält man die einfache Folgerung: Ist a = b, so gilt jede Aussage, die auf a nicht zutrifft, auch für b nicht. Als Ergebnis halten wir fest:

Ist a = b, dann bleibt der Wahrheitswert jeder Aussage unverändert, wenn man in ihr a durch b ersetzt. (Kommt a in der Aussage mehrfach vor, so braucht es nicht notwendig an jeder Stelle gegen b ausgetauscht zu werden.)

Wenn man Gleichheit als logische Identität versteht, wäre es grober Unfug, Dinge gleich nennen oder als gleich definieren zu wollen. Das findet man beispielsweise gelegentlich in Büchern über Vektorrechnung. Man nennt dort zwei Pfeile, bestimmt durch Anfangs- und Endpunkt, gleich, wenn sie gleiche Länge und gleiche Richtung haben. Zwei Objekte sind gleich, oder sie sind es nicht. Daran ist nichts zu ändern. Die Möglichkeit, Objekte, die nur in gewissen Eigenschaften übereinstimmen, zu identifizieren, bietet sich später im Rahmen der Mengenlehre. (Äquivalenzrelationen)

Oft geben wir einem Objekt einen neuen, im allgemeinen: einen kürzeren Namen. Dazu benutzen wir das Zeichen := oder =:, gelesen: *per definitionem gleich.* Der Doppelpunkt steht auf der Seite des zu Definierenden, des neuen Symbols.

4. Mengen

Unter einer Menge versteht man die Zusammenfassung von Objekten zu einem neuen Objekt.
Die Aussage $a \in M$ bedeutet:

a ist ein Element der Menge M,
a gehört zu M,
a ist aus M,
a liegt in M.

Die Negation dieser Aussage $\neg(a \in M)$ schreibt man $a \notin M$.
Statt $a \in M \wedge b \in M$ schreibt man kurz: $a, b \in M$.

4.1 Axiom der Gleichheit von Mengen
Zwei Mengen sind schon dann *gleich*, wenn sie nur dieselben Elemente haben.

Eine Menge ist durch die Angabe ihrer Elemente eindeutig bestimmt. Darüber hinaus gibt es für Mengen keine Unterscheidungsmerkmale. Mengen mit nicht allzu vielen Elementen kann man daher durch Aufschreiben ihrer Elemente angeben. Man benutzt dazu geschweifte Klammern ("Mengenklammern"). Bei dieser Schreibweise handelt es sich um eine Liste der Elemente der betreffenden Menge. Die Reihenfolge, in der die Elemente notiert werden, ist ohne Bedeutung. Mehrfachnotierungen eines Elements bleiben wirkungslos.

Beispiele: $2 \in \{-1, 2\}$; $1 \notin \{-1, 2\}$; $\{1, 2, 3\} = \{2, 3, 1\}$; $\{1, 2, 1, 1\} = \{1, 2\}$.

Eine Menge $\{a\}$ mit einem Element ist sorgfältig zu unterscheiden von dem Element a selbst.
Es gilt: $x \in \{a\} \Leftrightarrow x = a$.

4.2 Definition
$A \subset B$, gelesen: A ist **Teilmenge** (oder Untermenge) von B, A ist enthalten in B. bedeutet:
Jedes Element von A gehört auch zu B. ("$\subset$" heißt die *Inklusion.*)
Statt $A \subset B$ schreibt man auch $B \supset A$ und liest: B ist **Obermenge** von A, B umfaßt A.

Unter Verwendung der logischen Zeichen läßt sich die Definition 4.2 schreiben:

$$A \subset B \;:\Leftrightarrow\; \bigwedge_x (x \in A \;\Rightarrow\; x \in B)$$

Wenn $A \subset B$ und $B \subset A$, dann $A = B$. Umgekehrt folgt aus $A = B$ sowohl $A \subset B$ als auch $B \subset A$.

Es bezeichnet:
$\mathbb{N}$ die Menge der natürlichen Zahlen $1, 2, 3, \ldots$,
$\mathbb{N}_0$ die Menge der natürlichen Zahlen einschließlich der Null $0, 1, 2, 3, \ldots$,
$\mathbb{Z}$ die Menge der ganzen Zahlen $\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots$,
$\mathbb{Q}$ die Menge der rationalen Zahlen, das sind alle Zahlen, die sich als Bruch
$\frac{m}{n}$, $m \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$ schreiben lassen,
$\mathbb{R}$ die Menge der reellen Zahlen (veranschaulicht durch alle Punkte der Zahlengeraden).

Beispiele:
$\mathbb{N} \subset \mathbb{N}_0 \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$

$2 \in \mathbb{N}$, $-7 \notin \mathbb{N}$, $\frac{9}{3} \in \mathbb{N}$, $-7 \in \mathbb{Z}$, $\frac{9}{3} \in \mathbb{Z}$, $\frac{2}{3} \notin \mathbb{Z}$, $2 \in \mathbb{Q}$, $-7 \in \mathbb{Q}$, $\frac{2}{3} \in \mathbb{Q}$, $\sqrt{3} \notin \mathbb{Q}$, $\ln 2 \notin \mathbb{Q}$, $\pi \notin \mathbb{Q}$, $2 \in \mathbb{R}$, $-7 \in \mathbb{R}$, $\frac{2}{3} \in \mathbb{R}$, $\sqrt{3} \in \mathbb{R}$, $\ln 2 \in \mathbb{R}$, $\pi \in \mathbb{R}$.

Die **leere Menge**, Zeichen: $\varnothing$, ist Teilmenge jeder Menge.

Denn ist A eine beliebige Menge, so gilt für alle x: $x \in \varnothing \Rightarrow x \in A$. (Implikation mit falscher Prämisse!)

Zu einer Menge A und einer Aussageform Px gibt es genau eine Menge B, so daß für alle x gilt:

$$x \in B \Leftrightarrow x \in A \wedge Px.$$

Für diese Menge verabreden wir die Bezeichnung $\{x \mid x \in A \wedge Px\}$. Wir merken uns:

Die Aussagen $y \in \{x \mid x \in A \wedge Px\}$ und $y \in A \wedge Py$ sind äquivalent.

Beispiele:

$y \in \{x \mid x \in \mathbb{N} \wedge 3 \le x \le 7\} \Leftrightarrow y \in \mathbb{N} \wedge 3 \le y \le 7$.

$y \in \{x \mid x \in \mathbb{Z} \wedge x$ ist Teiler von $12\} \Leftrightarrow y \in \mathbb{Z} \wedge y$ ist Teiler von 12.

Man kann auf diese Weise nur aus einer Menge Elemente mit einer bestimmten Eigenschaft aussondern. Wünschenswerter wäre, zu jeder Eigenschaft P die Menge $\{x \mid Px\}$ bilden zu können, ohne Rücksicht darauf, ob diese Objekte schon Elemente einer Menge A sind oder nicht. Leider führt dieser Versuch zu Widersprüchen (*mengentheoretische Antinomien* oder *Paradoxien*).

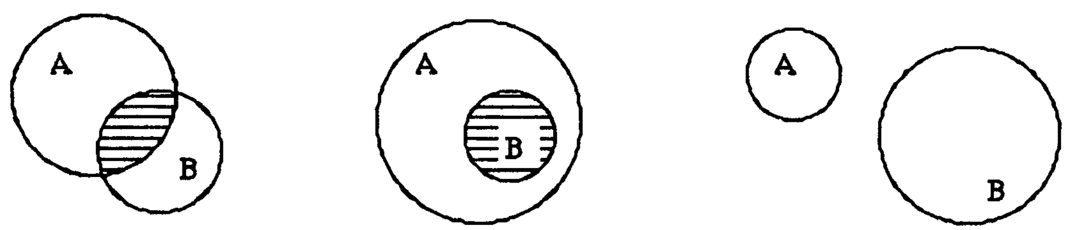
4.3 Definition Sind A und B Mengen, so heißt

$A \cap B := \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}$ (A geschnitten B) der **(Durch-)Schnitt**,

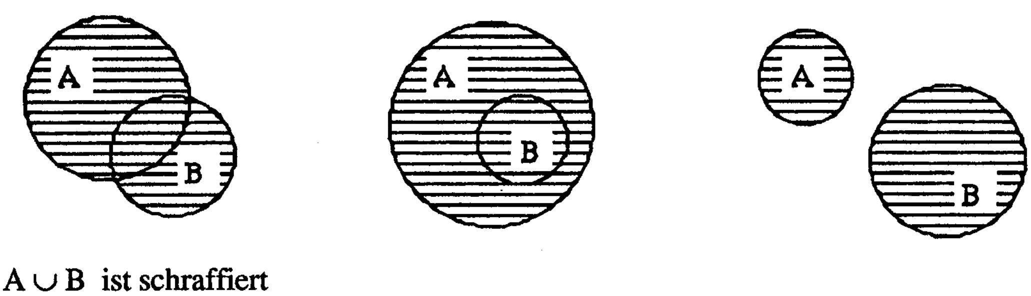
$A \cup B := \{x \mid x \in A \vee x \in B\}$ (A vereinigt B) die **Vereinigung**,

$A \setminus B := \{x \mid x \in A \wedge x \notin B\}$ (A ohne B) die **Differenz** von A und B.

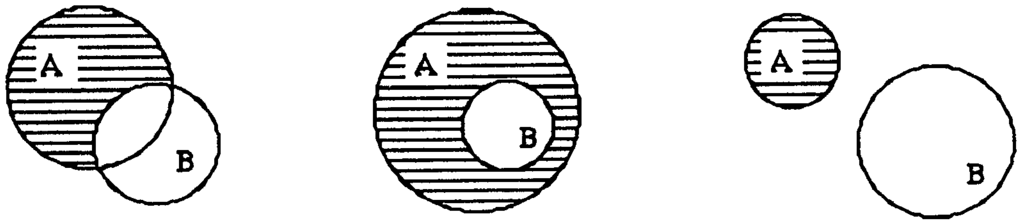
Ist $A \cap B = \varnothing$, so nennt man A und B **disjunkt**.



$A \cap B$ ist schraffiert



$A \cup B$ ist schraffiert



$A \setminus B$ ist schraffiert

Beispiele:

1) $\{1, 2, 3\} \cap \{1, 3, 5, 7\} = \{1, 3\}$
   Es seien $m, n \in \mathbb{N}$. Ist A die Menge aller Teiler von m und B die Menge aller Teiler von n, dann ist $A \cap B$ die Menge der gemeinsamen Teiler von m und n.

2) $\{1,2,3\} \cup \{2,3,4\} = \{1,2,3,4\}$
   $\mathbb{N} \cup \{0\} = \mathbb{N}_0$

3) $\{1,2,3\} \setminus \{2,3,4\} = \{1\}$
   $\{1,2,3\} \setminus \{4,5\} = \{1,2,3\}$
   $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ ist die Menge der irrationalen Zahlen.
   $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ ist die Menge der reellen Zahlen ohne die Null.

4.4 Satz A, B, C seien Mengen. Dann gelten die folgenden Aussagen:

a) $A \cap B = B \cap A$ — Kommutativgesetze
   $A \cup B = B \cup A$

b) $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$ — Assoziativgesetze
   $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$

c) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ — Distributivgesetze
   $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

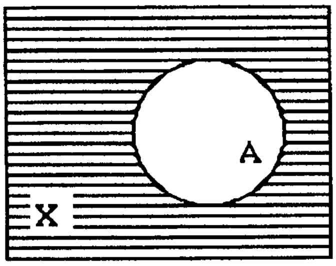
d) $C \setminus (A \cap B) = (C \setminus A) \cup (C \setminus B)$ — Gesetze von DE MORGAN
   $C \setminus (A \cup B) = (C \setminus A) \cap (C \setminus B)$

e) $A \setminus (A \setminus B) = A \cap B$ — Gesetz von der zweifachen Differenz

Wegen b) schreibt man einfacher $A \cap B \cap C$ bzw. $A \cup B \cup C$. Die Distributivgesetze ermöglichen ein "Ausmultiplizieren" und "Ausklammern". Wegen der Kommutativgesetze gilt analog $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$ und $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$.

Ist A Teilmenge einer festen Bezugsmenge X ("*Grundmenge*"), so schreibt man statt $X \setminus A$ einfach $\complement A$ und nennt $\complement A$ das **Komplement** von A (bezüglich X). Statt $\complement A$ ist auch A^c oder

A' üblich; noch gebräuchlicher ist $\bar{A}$. Die von uns gewählte Schreibweise zeigt deutlicher die Analogie zu den entsprechenden Gesetzen der Logik.



$X \setminus A$ schraffiert

Für $A, B \subset X$ gilt:

$\complement(A \cap B) = \complement A \cup \complement B$,

$\complement(A \cup B) = \complement A \cap \complement B$,

$\complement\complement A = A$.

Es gilt dann die beweistechnisch nützliche Beziehung: $A \setminus B = A \cap \complement B$, bei der die Komplementbildung bezüglich einer beliebigen Obermenge X von A und B vorzunehmen ist (beispielsweise bezüglich $A \cup B$).

Beweis von Satz 4.4:

In den Aussagen a) bis e) spiegeln sich die Gesetze der Aussagenlogik wieder. Alle Beweise verlaufen ähnlich. Wir beschränken uns daher auf den Beweis eines Kommutativ- und eines Distributivgesetzes. Wir zeigen jeweils, daß die beiden Mengen dieselben Elemente haben.

$a_1)$ Für jedes x gilt: $x \in A \cap B \overset{(4.3)}{\Leftrightarrow} x \in A \wedge x \in B \overset{(1.4a)}{\Leftrightarrow} x \in B \wedge x \in A \overset{(4.3)}{\Leftrightarrow} x \in B \cap A$

$c_1)$ Für jedes x gilt: $x \in A \cap (B \cup C) \overset{(4.3)}{\Leftrightarrow} x \in A \wedge x \in B \cup C$

$\overset{(4.3)}{\Leftrightarrow} x \in A \wedge (x \in B \vee x \in C) \overset{(1.4c)}{\Leftrightarrow} (x \in A \wedge x \in B) \vee (x \in A \wedge x \in C)$

$\overset{(4.3)}{\Leftrightarrow} x \in A \cap B \vee x \in A \cap C \overset{(4.3)}{\Leftrightarrow} x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$

$d_1)$ Wir wählen als Grundmenge eine Menge X, die A, B und C umfaßt. Dann gilt:

$C \setminus (A \cap B) = C \cap \complement(A \cap B) = C \cap (\complement A \cup \complement B) = (C \cap \complement A) \cup (C \cap \complement B)$

$= (C \setminus A) \cup (C \setminus B)$ ❑

In der Mathematik werden All- oder Existenzaussagen meistens über die Elemente einer bestimmten Menge ausgesprochen. Daher definieren wir Quantoren, deren Wirkung auf die Elemente einer Menge eingeschränkt ist.

4.5 Definition

Es sei A eine Menge, Px eine Aussageform. Wir verabreden:

$\bigwedge_{x \in A} Px \;:\Leftrightarrow\; \bigwedge_{x} (x \in A \Rightarrow Px)$ und $\bigvee_{x \in A} Px \;:\Leftrightarrow\; \bigvee_{x} (x \in A \wedge Px)$.

$\bigwedge_{x \in \emptyset} Px$ ist stets wahr, $\bigvee_{x \in \emptyset} Px$ stets falsch. Die Tatsache, daß $\bigwedge_{x \in \emptyset} Px$ stets wahr ist, gibt Anlaß zu scherzhaften Aussagen über die Elemente der leeren Menge:
Die Elemente der leeren Menge sind grün.
Die Elemente der leeren Menge sind blau.
Die Elemente der leeren Menge sind nicht blau.
Alle drei Aussagen sind wahr; denn ihre Negationen (Es gibt ein Element der leeren Menge, das ...) sind falsch.
Man beachte, daß die dritte Aussage nicht die Negation der zweiten Aussage ist.

Die Gesetze 2.1 (Axiom) und 2.2 der Prädikatenlogik über die Negation von All- und Existenzaussagen $\bigwedge_{x} Px$ und $\bigvee_{x} Px$ gelten entsprechend für $\bigwedge_{x\in A} Px$ und $\bigvee_{x\in A} Px$. Als Beispiel beweisen wir $\neg \bigwedge_{x\in A} Px \Leftrightarrow \bigvee_{x\in A} \neg Px$.

Es ist $\neg \bigwedge_{x\in A} Px \overset{4.5}{\Leftrightarrow} \neg \bigwedge_{x} (x\in A \Rightarrow Px) \overset{2.1}{\Leftrightarrow} \bigvee_{x} \neg (x\in A \Rightarrow Px)) \overset{1.4k}{\Leftrightarrow} \bigvee_{x} (x\in A \wedge \neg Px)$
$\overset{4.5}{\Leftrightarrow} \bigvee_{x\in A} \neg Px$.

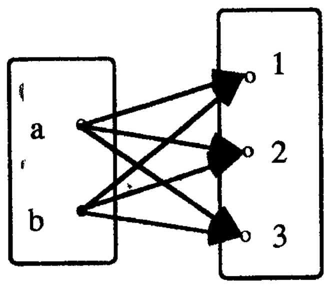
Zum Schluß definieren wir noch das kartesische Produkt von Mengen sowie die Potenzmenge.

4.6 Definition
(a,b) heißt das **geordnete Paar** aus den Objekten a und b. Dabei heißt a die *erste* und b die *zweite Koordinate* von (a,b). Zwei geordnete Paare sind genau dann gleich, wenn ihre ersten Koordinaten gleich sind und ihre zweiten Koordinaten gleich sind:
$(a,b) = (c,d) \Leftrightarrow a = c \wedge b = d$.

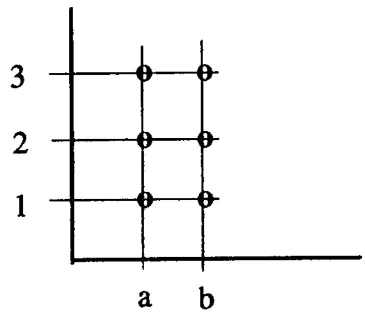
Entsprechend betrachtet man *Tripel*, *Quadrupel*,......, allgemein: **n-Tupel**.

$A \times B := \{(a,b) \mid a\in A \text{ und } b\in B\}$ heißt das **kartesische Produkt** von A und B.
Statt $A \times A$ schreibt man auch A^2.

Beispiel: $\{a, b\} \times \{1, 2, 3\} = \{(a,1), (a,2), (a,3), (b,1), (b,2), (b,3)\}$



Jeder Pfeil repräsentiert ein geordnetes Paar. (Pfeildiagramm)



Jeder Punkt repräsentiert ein geordnetes Paar. (Prinzip des Koordinatensystems)

4.7 Definition
Ist A eine Menge, so heißt die Menge aller Teilmengen von A

$$\mathcal{P}(A) := \{X \mid X \subset A\}$$

die **Potenzmenge** von A.

Beispiele:
$\mathcal{P}(\{1,2,3\}) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \{1,2,3\}\}$,
$\mathcal{P}(\{1\}) = \{\emptyset, \{1\}\}$, $\mathcal{P}(\emptyset) = \{\emptyset\}$.

Aufgaben

Aufgabe 4.1

Entscheiden Sie, ob $A = B$ oder $A \neq B$ gilt:

a) $A = \{1,2,3\}$, $\quad B = \{2,1,3\}$

b) $A = \{1,1,2\}$, $\quad B = \{2,2,1\}$

c) $A = \{x \mid x \in \mathbb{R} \ \wedge \ x \neq x\}$, $\quad B = \{x \mid x \in \mathbb{N} \ \wedge \ x < 0\}$

Aufgabe 4.2

Welche der folgenden Aussagen sind wahr?

a) $\emptyset \in \emptyset$ b) $\emptyset \subset \emptyset$ c) $\emptyset \in \{\emptyset\}$

d) $\emptyset \subset \{\emptyset\}$ e) $\{\emptyset\} \subset \emptyset$ f) $\{\emptyset\} \in \{\emptyset,\{\emptyset\}\}$

g) $\{\emptyset\} \subset \{\emptyset,\{\emptyset\}\}$ h) $\{\emptyset,\emptyset\} \subset \{\emptyset\}$ i) $\{\emptyset,\emptyset\} \in \{\{\emptyset\}\}$

j) $\emptyset = \{\emptyset\}$ k) $\{\emptyset\} = \{\{\emptyset\}\}$

Aufgabe 4.3

Geben Sie Beispiele für Mengen A,B,C an, so daß

a) $A \in B$ und $A \subset B$, b) $A \in B \in C$ und $A \in C$, c) $A \in B \in C$ und $A \notin C$.

Aufgabe 4.4

A, B, C, X seien Mengen. Beweisen Sie:

a) $A \cup B = B \cup A$ b) $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$

c) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ d) $X \setminus (A \cup B) = (X \setminus A) \cap (X \setminus B)$

Aufgabe 4.5

A, B, C seien Mengen. Beweisen oder widerlegen Sie:

a) $(A \setminus B) \setminus C = A \setminus (B \setminus C)$ b) $A \cap (B \setminus C) = (A \cap B) \setminus (A \cap C)$

Aufgabe 4.6

a) Untersuchen Sie die logische Abhängigkeit folgender Aussagen:

(1) $A \subset B$ (2) $A \cap B = A$ (3) $A \cup B = B$

(4) $A \cap B = \emptyset$ (5) $A = \emptyset \wedge B = \emptyset$ (6) $A = \emptyset \vee B = \emptyset$

(7) $A \setminus B = A$ (8) $A \setminus B = B$ (9) $A \setminus B = \emptyset$

b) Beweisen Sie die Äquivalenz der Aufgaben (1) bis (3).

Aufgabe 4.7

A, B seien Mengen mit

a) $A \cap B = A \cup B$, b) $A \cap B = A \setminus B$, c) $A \cup B = A \setminus B$.

Was kann man im Fall a) über A und B, im Fall b) über A und im Fall c) über B aussagen?

Aufgabe 4.8

A, B seien Mengen. Zeigen Sie, daß genau eine Menge X existiert, die den folgenden Gleichungen genügt:

$$A \cup B = A \cup X \quad \text{und} \quad A \cap X = \emptyset.$$

Anleitung: Geben Sie erstens eine Menge X an, für die die Gleichungen erfüllt sind. (Existenz einer Lösung) Zeigen Sie zweitens die Eindeutigkeit: Sind X und Y zwei Lösungen des Gleichungssystems, dann folgt $X = Y$.

Aufgabe 4.9

X sei eine Menge. Für $A \subset X$ werde das Komplement von A (bezüglich X) definiert durch $\complement A = \{x \mid x \in X \wedge \neg(x \in A)\}$. Zeigen Sie für $A \subset X$, $B \subset X$:

a) $\complement\emptyset = X$
   $\complement X = \emptyset$

b) $A \cap \complement A = \emptyset$
   $A \cup \complement A = X$

c) $\complement(A \cap B) = \complement A \cup \complement B$
   $\complement(A \cup B) = \complement A \cap \complement B$

d) $\complement\complement A = A$

e) $A \subset B \Leftrightarrow \complement B \subset \complement A$

f) $A \cap \complement B = \emptyset \wedge B \cap \complement A = \emptyset \Rightarrow A = B$

Aufgabe 4.10

X sei eine Menge, $A \subset X$, $B \subset X$. Das Komplement (bezüglich X) sei wie in der vorhergehenden Aufgabe definiert.

a) Zeigen Sie: $A \setminus B = A \cap \complement B$.
b) Berechnen Sie mit Hilfe von a):
   $\complement(A \setminus B)$, $A \setminus (A \setminus B)$, $A \cap (B \setminus A)$, $A \cup (B \setminus A)$, $A \setminus (A \cap B)$, $(A \cup B) \setminus B$.

Aufgabe 4.11

A, B seien Mengen. Zeigen Sie, daß die Mengen $A \setminus B$ und $A \cap B$ disjunkt sind und ihre Vereinigung A ist.

Aufgabe 4.12

Geben Sie die Potenzmenge der Menge $\{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$ an.

Aufgabe 4.13 Welche der folgenden Aussagen sind wahr?

a) $\emptyset \in \mathfrak{P}(\emptyset)$,
b) $\emptyset \subset \mathfrak{P}(\emptyset)$,
c) $\{\emptyset\} \in \mathfrak{P}(\emptyset)$,
d) $\{\emptyset\} \subset \mathfrak{P}(\emptyset)$,
e) $\emptyset \in \mathfrak{P}\mathfrak{P}(\emptyset)$,
f) $\{\emptyset\} \in \mathfrak{P}\mathfrak{P}(\emptyset)$,
g) $\{\emptyset\} \subset \mathfrak{P}\mathfrak{P}(\emptyset)$.

Aufgabe 4.14

Bilden Sie die Negation folgender Aussagen:

a) Es gibt eine Menge A, so daß für alle Mengen X gilt: A ist nicht Element von X, oder X ist die leere Menge.
b) Jede Menge X hat die Eigenschaft: Wenn X leer ist, dann existiert eine Menge A, die Element von X ist.

5. Abbildungen

5.1 Definition
X, Y seien nichtleere Mengen. Unter einer **Abbildung** f **von** X **nach** Y versteht man eine Vorschrift, die *jedem* Element von X *genau ein* Element von Y zuordnet.
Für das Tripel (f, X, Y) ist die suggestive Schreibweise $f\colon X \longrightarrow Y$ üblich.
Die Menge X heißt der *Definitionsbereich*, die Menge Y der *Wertevorrat* von f. Das *Bild* eines Elementes $x \in X$ unter der Abbildung f wird mit f(x) bezeichnet. Häufig wird die Zuordnungsvorschrift durch einen quergestrichenen Pfeil angegeben: $x \longmapsto f(x)$.
Ist f(x) = y, so heißt x ein *Original* von y oder ein *Urbild* zu y.

Die Menge graph f := $\{(x,f(x)) \mid x \in X\}$ heißt der **Graph** der Abbildung f.

Man beachte: "$\longrightarrow$" steht zwischen Definitionsbereich und Wertevorrat, "$\longmapsto$" zwischen Elementen dieser Mengen.

Statt Abbildung sagt man auch **Funktion** und nennt dann f(x) den Funktionswert von f an der Stelle (oder im Punkt) x.

Beispiele und Definitionen

1) Jeder Tip in der Elferwette des Fußballtotos ist eine Abbildung $\{s_1,\ldots, s_{11}\} \longrightarrow \{0,1,2\}$. Jedem der 11 Spiele $s_1,\ldots, s_{11}$ wird einer der möglichen Spielausgänge 0 (unentschieden), 1 (Sieg der Heimmannschaft) oder 2 (Sieg der Gastmannschaft) zugeordnet.

2) Durch g(x) = x + 1 (für alle $x \in \mathbb{N}$) wird eine Abbildung $g\colon \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ definiert. Die Schreibweise mit dem quergestrichenen Pfeil erlaubt es, von einer Abbildung zu sprechen, ohne ihr einen Namen geben zu müssen. Das empfiehlt sich, wenn eine Abbildung nur einmal erwähnt wird, also später nicht mehr auf sie Bezug genommen wird. Man spricht dann einfach von der Abbildung $\mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$, $x \longmapsto x + 1$ (für alle $x \in \mathbb{N}$).

Die quantifizierende Wendung "für alle x" gehört strenggenommen zur Zuordnungsvorschrift. Wenn wir sie weglassen, so geschieht das aus Bequemlichkeit. Der Leser kann sie aber leicht ergänzen, da der Definitionsbereich einer Abbildung jeweils vor dem einfachen Pfeil notiert wird. Man beachte, daß dementsprechend die Zuordnungsvorschriften der Abbildungen

$$\begin{array}{c} \mathbb{N}_0 \longrightarrow \mathbb{N}_0 \\ x \longmapsto x^2 \end{array} \qquad \text{und} \qquad \begin{array}{c} \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{N}_0 \\ x \longmapsto x^2 \end{array}$$

verschieden sind; denn bei der ersten Abbildung ist "für alle $x \in \mathbb{N}_0$", bei der zweiten "für alle $x \in \mathbb{Z}$" zu ergänzen.

3) $\mathbb{R}_0^+ \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto \sqrt{x}$, ist eine Abbildung, denn $\sqrt{x}$ ist eindeutig definiert als die nichtnegative reelle Zahl, deren Quadrat gleich x ist.

4) Die Addition in $\mathbb{R}$ ist eine Abbildung $+\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$. Statt +((x,y)) schreibt man üblicherweise x + y.

5) $X \longrightarrow X$, $x \longmapsto x$, heißt die *identische Abbildung* von X. Zeichen: id_X.

Zu einer Abbildung gehören drei Dinge: der Definitionsbereich, der Wertevorrat und die Abbildungsvorschrift. Definitionsbereich und Wertevorrat sind Mengen; was aber ist eine Zuordnungsvorschrift ?

Auch die Zuordnungsvorschrift läßt sich auf den Mengenbegriff zurückführen. Man identifiziert dazu die Abbildung(-svorschrift) mit dem Graphen:

Unter einer Abbildung f von einer Menge X nach einer Menge Y versteht man eine Teilmenge des kartesischen Produkts $X \times Y$ mit der Eigenschaft:

Abb) Zu jedem $x \in X$ gibt es *genau ein* $y \in Y$ mit $(x,y) \in f$.

Statt $(x,y) \in f$ schreibt man $f(x) = y$.

Bei dieser Definition besteht kein Unterschied zwischen der Abbildung(-svorschrift) und dem Graphen. Es ist $f = \{(x,f(x)) \mid x \in X\}$. Dennoch schreibt man, wenn man die Menge (den Graphen) meint, oft zur Verdeutlichung: graph f.

Eine Abbildung ist also Tripel von drei Mengen. Daraus ergibt sich die **Gleichheit von Abbildungen**: Zwei Abbildungen (f, X, Y), (g, A, B) (oder in der üblichen Schreibweise $f: X \longrightarrow Y$, $g: A \longrightarrow B$) sind genau dann gleich, wenn gilt: $X = A \wedge Y = B \wedge f = g$, d.h. wenn sie den gleichen Definitionsbereich und den gleichen Wertevorrat haben, und wenn gilt: $f(x) = g(x)$ für alle x aus dem gemeinsamen Definitionsbereich.

(Bei der Interpretation der Abbildungsvorschrift als Menge, ist die Bedingung $X = A$ eigentlich überflüssig. Denn der Definitionsbereich ergibt sich als Menge der ersten Koordinaten des Graphen.)

Unterscheiden Sie sorgfältig zwischen einer Abbildung (oder Funktion) und dem Bild eines Elementes x (dem Funktionswert an einer Stelle x), also zwischen f und f(x). Am einfachsten denkt man sich f repräsentiert durch den Graphen; f(x) dagegen ist das Bild von x, der Funktionswert an der Stelle x, bei einer Funktion $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ die Höhe des Punktes (x,f(x)) über der x-Achse.

Unter einer Abbildung können verschiedene Elemente des Definitionsbereichs den gleichen Bildpunkt haben. Eine Abbildung, bei der das nicht passiert, bei der verschiedene Originale auch verschiedene Bilder haben, nennt man injektiv. Wir werden allerdings die Kontraposition dieser Aussage formulieren, da sie beweistechnisch leichter zu handhaben ist. Ferner kann es im Wertevorrat Elemente geben, die kein Original besitzen. Mann nennt eine Abbildung surjektiv, wenn alle Elemente des Wertevorrats ein Original haben, wenn alle Bildpunkte sind.

Definition 5.2

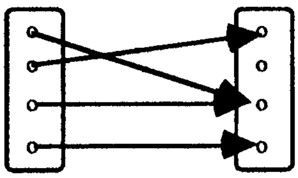
Eine Abbildung $f: X \longrightarrow Y$ heißt

injektiv, wenn für alle $x_1, x_2 \in X$ gilt: $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$,

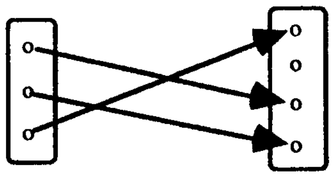
surjektiv, wenn es zu jedem $y \in Y$ ein $x \in X$ gibt mit $f(x) = y$.

bijektiv, wenn sie injektiv und surjektiv ist.

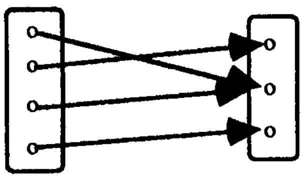
Eine Abbildung $f : X \longrightarrow Y$ ist genau dann $\left\{\begin{matrix}\text{injektiv}\\ \text{surjektiv}\\ \text{bijektiv}\end{matrix}\right\}$, wenn jedes $y \in Y$ $\left\{\begin{matrix}\text{höchstens}\\ \text{mindestens}\\ \text{genau}\end{matrix}\right\}$ ein Original besitzt, mit anderen Worten, wenn die Gleichung $f(x) = b$ für jedes $b \in Y$ $\left\{\begin{matrix}\text{höchstens}\\ \text{mindestens}\\ \text{genau}\end{matrix}\right\}$ eine Lösung hat.



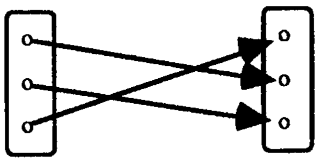
weder injektiv noch surjektiv



injektiv, aber nicht surjektiv



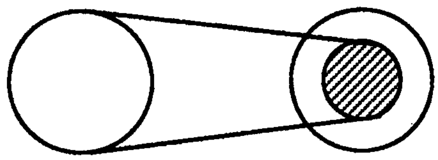
surjektiv, aber nicht injektiv



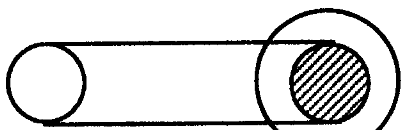
injektiv und surjektiv, also bijektiv

Im Pfeildiagramm einer $\left\{\begin{matrix}\text{injektiven}\\ \text{surjektiven}\\ \text{bijektiven}\end{matrix}\right\}$ Abbildung $f : X \longrightarrow Y$ kommt bei jedem $y \in Y$ $\left\{\begin{matrix}\text{höchstens}\\ \text{mindestens}\\ \text{genau}\end{matrix}\right\}$ ein Pfeil an.

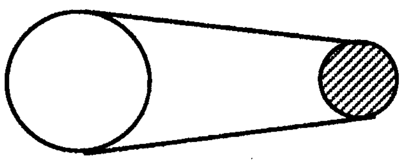
Neben den Pfeildiagrammen benutzt man zur Veranschaulichung von Abbildungen auch Darstellungen, in denen Definitionsbereich und Wertevorrat durch Punktmengen in der Ebene repräsentiert werden. (Die Menge der Bildpunkte ist jeweils schraffiert.)



weder injektiv noch surjektiv



injektiv, aber nicht surjektiv



surjektiv, aber nicht injektiv

injektiv und surjektiv, also bijektiv

Beispiele:

1) Die Abbildung $f: \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$, definiert durch $f(x) = x + 1$, ist injektiv; denn für alle $x_1, x_2 \in \mathbb{N}$ gilt: $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 + 1 = x_2 + 1 \Rightarrow x_1 = x_2$. Sie ist aber nicht surjektiv, denn 1 besitzt kein Original. (Die Gleichung $f(x) = 1$ hat in $\mathbb{N}$ keine Lösung.)

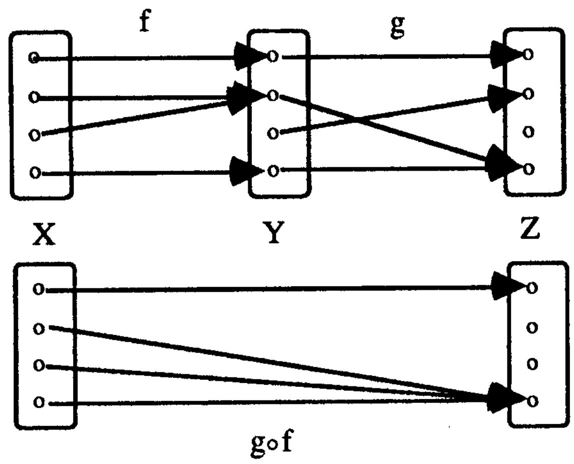
2) Die Abbildung g: $\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{N}_0$, definiert durch $f(x) = |x|$, ist surjektiv; denn für jedes $b \in \mathbb{N}_0$ besitzt die Gleichung $g(x) = b$, d.h. $|x| = b$, mindestens eine Lösung, nämlich b. Sie ist aber nicht injektiv, denn 1 hat zwei Originale: 1 und -1.

5.3 Definition

Sind zwei Abbildungen $f: X \longrightarrow Y$ und $g: Y \longrightarrow Z$ gegeben, so wird durch

$g \circ f(x) := g(f(x))$ für alle $x \in X$

eine Abbildung $g \circ f: X \longrightarrow Z$ definiert, die **Komposition**[1] von f und g. Das Zeichen $g \circ f$ wird gelesen: g nach f, weil g erst nach f auszuführen ist.



$$X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$$

$$X \xrightarrow[g \circ f]{} Z$$

$$x \longmapsto f(x) \longmapsto g(f(x))$$

$$x \longmapsto g \circ f(x)$$

Die Definition läßt sich verallgemeinern: Es genügt, wenn der Wertevorrat oder sogar nur die Menge aller Bildelemente der ersten Abbildung im Definitionsbereich der zweiten Abbildung enthalten ist, wenn also jeder ankommende Pfeil Anschluß hat.

Beispiele:

Es sei $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definiert durch $f(x) = x + 1$ und $g: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ durch $g(x) = x^2$. (f addiert 1, g quadriert.) Dann ist $g \circ f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ mit $g \circ f(x) = g(f(x)) = g(x+1) = (x+1)^2$ und $f \circ g: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ mit $f \circ g(x) = f(g(x)) = f(x^2) = x^2 + 1$.
($g \circ f$ addiert erst 1 quadriert dann; $f \circ g$ quadriert erst und addiert anschließend 1. Die in einer Komposition rechts stehende Abbildung wird zuerst ausgeführt!)

☞ Die Komposition von Abbildungen ist nicht kommutativ.

Weiter ist $f \circ f(x) = f(f(x)) = f(x + 1) = (x + 1) + 1 = x + 2$ und $g \circ g(x) = g(g(x)) = g(x^2) = (x^2)^2 = x^4$.

Wir beweisen nun die wichtigste Eigenschaft der Komposition:

5.4 Satz

Die Komposition von Abbildungen ist assoziativ:
Ist $f: X \longrightarrow Y$, $g: Y \longrightarrow Z$, $h: Z \longrightarrow W$, dann gilt $(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$.

Wir können daher die Klammern weglassen und einfach $h \circ g \circ f$ schreiben, ohne Verwechslungen befürchten zu müssen.

---

1 Nacheinanderausführung, Verkettung

Beweis:
$(h\circ g)\circ f$ und $h\circ(g\circ f)$ sind Abbildungen von X nach W. Um nachzuweisen, daß diese beiden Abbildungen gleich sind, müssen wir zeigen, daß $(h\circ g)\circ f\,(x) = h\circ(g\circ f)(x)$ für alle $x\in X$ gilt.
Es sei also $x\in X$. Dann ist $(h\circ g)\circ f\,(x) = (h\circ g)(f\,(x)) = h(g(f(x))) = h(g\circ f(x))$
$= h\circ(g\circ f)(x)$. ❑

Beispiele:
Die Abbildungen f,g,h,k von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$ seien definiert durch $f(x) = x + 1$, $g(x) = x^2$, $h(x) = 2x$, $k(x) = 5$. Alle Kompositionen dieser Abbildungen sind wieder Abbildungen von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$, und es gilt für alle $x\in\mathbb{R}$:
$h\circ g\circ f(x) = h\circ g(x + 1) = h((x + 1)^2) = 2\,(x + 1)^2$,
$g\circ h\circ f(x) = g\circ h(x + 1) = g(2\,(x + 1)) = 4\,(x + 1)^2$,
$f\circ f\circ h(x) = f\circ f(2x) = f(2x + 1) = 2x + 2$,
$g\circ h\circ h(x) = 16x^2$, $k\circ h\circ g(x) = 5$, $f\circ k\circ h(x) = 6$, $g\circ f\circ k(x) = 35$.

5.5 Satz
Es sei $f\colon X \longrightarrow Y$, $g\colon Y \longrightarrow Z$. Dann gilt:
a) Sind f und g injektiv, so ist auch $g\circ f$ injektiv.
b) Sind f und g surjektiv, so ist auch $g\circ f$ surjektiv.
c) Sind f und g bijektiv, so ist auch $g\circ f$ bijektiv.

Beweis:

a) f und g seien injektiv. Dann gilt für alle $x_1,x_2\in X$:
$$\begin{aligned} g\circ f(x_1) = g\circ f(x_2) &\Rightarrow g(f(x_1)) = g(f(x_2)) \\ &\Rightarrow f(x_1) = f(x_2) \quad \text{(weil g injektiv)} \\ &\Rightarrow x_1 = x_2 \quad \text{(weil f injektiv)} \end{aligned}$$

b) f und g seien surjektiv. Es sei $z\in Z$. Da g surjektiv ist, existiert ein $y\in Y$ mit $g(y) = z$. Da f surjektiv ist, existiert ein $x\in X$ mit $f(x) = y$. Also ist $g\circ f(x) = g(f(x)) = g(y) = z$, d.h. x ist ein Original von z unter $g\circ f$.

c) folgt aus a) und b). ❑

5.6 Satz
Es sei $f\colon X \longrightarrow Y$ und $g\colon Y \longrightarrow X$. Gilt $g\circ f = id_X$, dann ist f injektiv und g surjektiv.

Merke: Die innen stehende Abbildung ist injektiv.

Beweis:
1) f ist injektiv, denn für alle $x_1, x_2\in X$ gilt: $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow g(f(x_1)) = g(f(x_2))$
$\Rightarrow g\circ f(x_1) = g\circ f(x_2) \Rightarrow id_X(x_1) = id_X(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$.
2) g ist surjektiv, denn für $x\in X$ gilt $x = id_X(x) = g\circ f(x) = g(f(x)) = x$ und $f(x)\in Y$, d.h. $f(x)$ ist ein Original von x unter g.
❑

5.7 Definition

Gibt es zu einer Abbildung $f: X \longrightarrow Y$ eine Abbildung $g: Y \longrightarrow X$ mit

$$g \circ f = id_X \text{ und } f \circ g = id_Y,$$

so heißt g eine **Umkehrabbildung** oder eine **Inverse** zu (oder von) f (und f heißt **umkehrbar** oder **invertierbar**).

5.8 Satz

a) Eine Abbildung ist genau dann umkehrbar, wenn sie bijektiv ist.

b) Zu einer Abbildung $f: X \longrightarrow Y$ gibt es höchstens eine Umkehrabbildung.
Wir dürfen also im Falle der Existenz von *der* Umkehrabbildung oder von *der* Inversen von f sprechen und das Zeichen f^{-1} einführen.

Beweis:

a) Ist $f: X \longrightarrow Y$ invertierbar, so gibt es eine Abbildung $g: Y \longrightarrow X$ mit $g \circ f = id_X$ und $f \circ g = id_Y$. Nach Satz 5.6 folgt aus $g \circ f = id_X$ die Injektivität von f und aus $f \circ g = id_Y$ die Surjektivität von f.

Ist umgekehrt $f: X \longrightarrow Y$ bijektiv, dann gibt zu jedem $y \in Y$ genau ein $x \in X$. Daher wird durch

$$g(y) := x \quad :\Leftrightarrow \quad f(x) = y$$

eine Abbildung $g: Y \longrightarrow X$ definiert, und es gilt
$g \circ f(x) = g(f(x)) = g(y) = x$ für alle $x \in X$, d.h. $g \circ f = id_X$ und
$f \circ g(x) = f(g(x)) = f(x) = y$ für alle $y \in Y$, d.h. $f \circ g = id_Y$.
Die Abbildung $g: Y \longrightarrow X$ ist also invers zu f.

b) Es sei $f: X \longrightarrow Y$.
$g: Y \longrightarrow X$ sei eine Inverse zu f. Dann gilt $g \circ f = id_X$.
$h: Y \longrightarrow X$ sei eine Inverse zu f. Dann gilt $f \circ h = id_Y$.

Dann folgt
$$\left.\begin{aligned} g \circ f \circ h &= (g \circ f) \circ h = id_X \circ h = h \\ g \circ f \circ h &= g \circ (f \circ h) = g \circ id_Y = g \end{aligned}\right\} \Rightarrow g = h.$$ ❑

5.9 Satz

a) $f: X \longrightarrow Y$ sei bijektiv und $f^{-1}: Y \longrightarrow X$ die Umkehrabbildung von f. Dann ist auch $f^{-1}: Y \longrightarrow X$ bijektiv, und es gilt $(f^{-1})^{-1} = f$.

b) $f: X \longrightarrow Y$ sei bijektiv und $f^{-1}: Y \longrightarrow X$ die Umkehrabbildung von f,
$g: Y \longrightarrow Z$ sei bijektiv und $g^{-1}: Z \longrightarrow Y$ die Umkehrabbildung von g.
Dann existiert die Umkehrabbildung von $g \circ f: X \longrightarrow Z$, und es ist $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.

Beweis:

a) Ist $f^{-1}: Y \longrightarrow X$ die Umkehrabbildung von $f: X \longrightarrow Y$, so gilt $f^{-1} \circ f = id_X$ und $f \circ f^{-1} = id_Y$. Daher ist auch $f: X \longrightarrow Y$ die Umkehrabbildung von $f^{-1}: Y \longrightarrow X$, d.h. $(f^{-1})^{-1} = f$.

b) Nach Voraussetzung gilt $f^{-1} \circ f = id_X$ und $f \circ f^{-1} = id_Y$ sowie $g^{-1} \circ g = id_Y$ und $g \circ g^{-1} = id_Z$. Dann ist $f^{-1} \circ g^{-1}: X \longrightarrow Z$ ist die Umkehrabbildung von $g \circ f: X \longrightarrow Z$; denn es gilt $f^{-1} \circ g^{-1} \circ g \circ f = f^{-1} \circ (g^{-1} \circ g) \circ f = f^{-1} \circ id_Y \circ f = f^{-1} \circ f = id_X$ und $g \circ f \circ f^{-1} \circ g^{-1} = g \circ (f \circ f^{-1}) \circ g^{-1}$ $= g \circ id_Y \circ g^{-1} = g \circ g^{-1} = id_Z$. Daher ist $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$. ❑

Wir wollen nun die **Umkehrabbildung** einer bijektiven Abbildung $f: X \longrightarrow Y$ bestimmen. Da f bijektiv ist, gibt es zu jedem $y \in Y$ genau ein $x \in X$ mit $f(x) = y$. (Die Gleichung $f(x) = y$ besitzt für jedes $y \in Y$ genau eine Lösung x.)
Definiert man $f^{-1}: Y \longrightarrow X$ durch
$f^{-1}(y) = x :\Leftrightarrow f(x) = y$ für alle $y \in Y$[2],
dann gilt sowohl $f(f^{-1}(y)) = y$ als auch $f^{-1}(f(x)) = x$.

Beispiele:

1) Die Abbildung $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, definiert durch $f(x) = ax + b$, ist für $a \neq 0$ bijektiv. Für $y \in Y$ hat die Gleichung $f(x) = ax + b = y$ die Lösung $x = \frac{1}{a}(y - b)$. Dem $y \in Y$ muß also durch die Umkehrfunktion das Element $x = \frac{1}{a}(y - b)$ zugeordnet werden:
$f^{-1}(y) = \frac{1}{a}(y - b)$ für alle $y \in Y$. Ersetzt man den "Dummy" y durch den "Dummy" x, lautet die Zuordnungsvorschrift der Umkehrfunktion (in gewohnter Weise):
$f^{-1}(x) = \frac{1}{a}(x - b)$ für alle $x \in Y$.

2) Die Abbildung $g: \mathbb{R}\setminus\{3\} \longrightarrow \mathbb{R}\setminus\{0\}$ mit $g(x) = \frac{1}{x-3}$ ist bijektiv. Aus $y = \frac{1}{x-3}$ folgt $x = \frac{1}{y} + 3$. Daher gilt für die Umkehrabbildung $g^{-1}: \mathbb{R}\setminus\{0\} \longrightarrow \mathbb{R}\setminus\{3\}$:
$g^{-1}(y) = \frac{1}{y} + 3$ für alle $y \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$, nach "Dummy-Austausch" also $g^{-1}(x) = \frac{1}{x} + 3$ für alle $x \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$.
3) Die Abbildung $f: \mathbb{R}\setminus\{0\} \longrightarrow \mathbb{R}\setminus\{0\}$, definiert durch $f(x) = \frac{1}{x}$ ist zu sich selbst invers: $f \circ f = id_{\mathbb{R}\setminus\{0\}}$. (Daher ist im kartesischen Koordinatensystem der Graph von f symmetrisch zur Winkelhalbierenden des I. und III. Quadranten.)

Wenn sich eine bijektive Abbildung als Komposition einfacher Abbildungen darstellen läßt, deren Umkehrabbildungen man kennt, kann man die Umkehrfunktion unmittelbar nach 5.13a angeben: Die Abbildung g aus Beispiel 2 subtrahiert erst 3 und bildet dann den Kehrwert. Die Umkehrabbildung bildet erst den Kehrwert und addiert dann 3, also
$g^{-1}(x) = \frac{1}{x} + 3$.

---

[2] In der Sprache der Graphen bedeutet das: $(y,x) \in f^{-1} :\Leftrightarrow (x,y) \in f$, d.h. graph f^{-1} entsteht aus graph f durch Spiegelung an der Winkelhalbierenden des I. und III. Quadranten (an der Diagonale $\{(x,x) \mid x \in \mathbb{R}\}$ des kartesischen Produkts $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$).

Aufgaben

Aufgabe 5.1
Es sei $X = \{1,2\}$. Welche der folgenden Mengen ist Graph einer Abbildung von X nach X ?
$\{(1,1), (2,1), (1,2)\}$, $\{(1,1)\}$, $\{(1,2), (2,1)\}$, $A \times A$, $\{(1,1), (2,2)\}$.

Aufgabe 5.2
Geben Sie alle Abbildungen an
a) von $\varnothing$ nach Y, b) von X nach $\varnothing$, c) von $\{\varnothing\}$ nach Y, d) von X nach $\{\varnothing\}$.

Aufgabe 5.3
Es sei $X = \{0\}$, $Y = \{1, 2\}$.
a) Geben Sie die Pfeildiagramme aller Abbildungen von X nach X, von X nach Y, von Y nach X und von Y nach Y an.
b) Welche dieser Abbildungen sind injektiv, surjektiv oder bijektiv?
c) Geben Sie bei bijektiven Abbildungen die Umkehrabbildung an.

Aufgabe 5.4
a) Geben Sie alle Abbildungen von $X = \{0,1,2\}$ nach $Y = \{0,1\}$.
b) Welche der Abbildungen sind injektiv, surjektiv, bijektiv ?
c) Geben Sie von bijektiven Abbildungen die Umkehrabbildung an.

Aufgabe 5.5
Geben Sie eine nicht surjektive Abbildung $f: X \longrightarrow Y$ und eine nicht injektive Abbildung $g: Y \longrightarrow Z$ so an, daß die Komposition $g \circ f$ bijektiv ist.

Aufgabe 5.6
Schreiben Sie die Bedingungen der Injektivität und der Surjektivität mit Hilfe von Quantoren, und bilden Sie jeweils die Negation.

Aufgabe 5.7
Es sei $\mathbb{R}^+ := \{x \mid x \in \mathbb{R}, x > 0\}$. Für $x \in \mathbb{R}$ sei $q(x) := x^2$. Ist q injektiv, surjektiv, bijektiv, wenn a) $q: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, b) $q: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^+$, c) $q: \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$, d) $q: \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+$?
Bestimmen Sie gegebenenfalls die Umkehrfunktion.

Aufgabe 5.8
Welche der folgenden Abbildungen sind injektiv, surjektiv oder sogar bijektiv? Bestimmen Sie bei bijektiven Abbildungen die Umkehrabbildung.

a) $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x) = x^3$
b) $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x) = x^4$
c) $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_0^+$ mit $f(x) = x^4$
d) $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x) = -x-1$
e) $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{wenn } x \geq 0 \\ -x^2, & \text{wenn } x < 0 \end{cases}$
f) $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x) = x^2 - x$,
g) $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_0^+$ mit $f(x) = |x|$, (Es ist $\mathbb{R}_0^+ := \{x \mid x \in \mathbb{R}, x \geq 0\}$.)
h) $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_0^+$ mit $f(x) = |x-1|$,
i) $f: \mathbb{R}_0^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x) = \sqrt{x}$, ($\sqrt{a}$ ist definiert als die positive Lösung

j) f: $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x) = \sqrt{|x|}$, der Gleichung $x^2 = a$.)
k) f: $\mathbb{R}\setminus\{0\} \longrightarrow \mathbb{R}\setminus\{1\}$ mit $f(x) = 1 - \frac{1}{x}$,
l) f: $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{Z}$ mit $f(x) = [x]$, ($[x]$ bezeichnet die größte ganze Zahl, kleiner oder gleich x .)
m) f: $\mathbb{R} \longrightarrow [0,1[$ mit $f(x) = x - [x]$. (Es ist $[0,1[:= \{x \mid x \in \mathbb{R}, 0 \leq x < 1\}$.)

Aufgabe 5.9
Beweisen Sie: Jede streng monotone Funktion f: $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ ist injektiv.

Aufgabe 5.10
Untersuchen Sie die folgenden Abbildungen auf Injektivität und Surjektivität. Bestimmen Sie im Fall der Bijektivität die Umkehrabbildung, im Fall der Injektivität nach geeigneter Verkleinerung des Wertevorrats.

a) f: $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, definiert durch $f(x) = ax + b$ mit $a,b \in \mathbb{R}$,
b) g: $\mathbb{R} \setminus \{b\} \longrightarrow \mathbb{R}$, definiert durch $g(x) = \frac{x-a}{x-b}$ mit $a,b \in \mathbb{R}$,
c) h: $\mathfrak{P}(X) \longrightarrow \mathfrak{P}(X)$ (X eine Menge), definiert durch $h(A) = X \setminus A$ für alle $A \in \mathfrak{P}(X)$.

Aufgabe 5.11
Es sei f: $\mathbb{R}_0^+ \longrightarrow \mathbb{R}_0^+$ definiert durch $f(x) = \sqrt{x}$ und g: $\mathbb{R}_0^+ \longrightarrow \mathbb{R}_0^+$ durch $g(x) = x^2 + 2x + 1$. Berechnen Sie $g \circ f$ und $f \circ g$.

Aufgabe 5.12
Die Abbildung f: $[0,1] \longrightarrow [0,1]$ werde definiert durch $f(x) := \begin{cases} 2x, & \text{für } 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ 2 - 2x, & \text{für } \frac{1}{2} \leq x \leq 1 \end{cases}$.

Wie sieht der Graph von $\underbrace{f \circ f \circ \ \dots \ \circ f}_{\text{n-mal}}$ aus?

Aufgabe 5.13
Es sei f: $A \longrightarrow B$, g: $B \longrightarrow C$. Dann gilt:

a) $g \circ f$ injektiv $\Rightarrow$ f injektiv,
b) $g \circ f$ surjektiv $\Rightarrow$ g surjektiv,
c) $g \circ f$ bijektiv $\Rightarrow$ f injektiv und g surjektiv.

Aufgabe 5.14
Geben Sie für die folgenden Funktionen Definitionsbereich und Wertevorrat (möglichst groß) so an, daß sie bijektiv sind, und bestimmen Sie den Term der Umkehrfunktion:

a) $f(x) = -\frac{1}{2}x + 7$, b) $g(x) = 1 - \frac{2}{x}$, c) $h(x) = \frac{1}{x-2}$, d) $i(x) = (x+5)^3 - 10$,
e) $j(x) = = \frac{x+3}{x-2}$, f) $k(x) = (x-4)^2$, g) $p(x) = \frac{x}{5x-2}$, h) $q(x) = \frac{2x^2 - x}{x}$.

6. Die natürlichen Zahlen, vollständige Induktion

Bevor wir die vollständige Induktion behandeln, wollen wir eine nützliche Schreibweise einführen. Es ist üblich und zweckmäßig eine Summe mit vielen Summanden abgekürzt zu schreiben, indem man das Summenzeichen benutzt.

Eine Summe der Form $a_m + a_{m+1} + \ldots + a_n$ schreibt man mit Hilfe des Summenzeichens:

$\sum_{i=m}^{n} a_i$. (Eine einwandfreie Definition des Summenzeichens geben wir am Ende dieses Kapitels.) Natürlich ist es erlaubt, anstelle von i einen anderen Summationsindex, etwa j oder k, zu wählen, d.h. $\sum_{i=m}^{n} a_i = \sum_{j=m}^{n} a_j = \sum_{k=m}^{n} a_k$.

6.1 Rechenregeln:

1) $c \cdot \sum_{i=m}^{n} a_i = \sum_{i=m}^{n} c \cdot a_i$ 2) $\sum_{i=m}^{n} a_i + \sum_{i=m}^{n} b_i = \sum_{i=m}^{n} (a_i + b_i)$

3) $(\sum_{i=m}^{n} a_i) \cdot (\sum_{j=r}^{s} b_j) = \sum_{i=m}^{n} (\sum_{j=r}^{s} a_i b_j) = \sum_{j=r}^{s} (\sum_{i=m}^{n} a_i b_j)$

4) $\sum_{i=m}^{n} a_i = \sum_{i=m+r}^{n+r} a_{i-r} = \sum_{i=m-r}^{n-r} a_{i+r}$ (Indextransformation)

1) folgt aus dem Distributivgesetz, 2) aus dem Kommutativgesetz, 3) aus diesen beiden Gesetzen.
4) Bei der Indextransformation erfordert eine Subtraktion von den Grenzen eine Addition zum Index und analog eine Addition zu den Grenzen eine Subtraktion vom Index.

Beispiel:

Für $n \in \mathbb{N}$ sei $s_n := \sum_{i=1}^{n} i = 1 + 2 + \ldots + n$.

a) Wir berechnen die Summe direkt (nach der Methode des kleinen GAUSS):

$$\begin{array}{lcl} s_n & = & 1 + 2 + \ldots + (n-1) + n \\ \underline{s_n} & \underline{=} & \underline{n + (n-1) + \ldots + 2 + 1} \\ 2\,s_n & = & (n+1) + (n+1) + \ldots + (n+1) + (n+1) = n \cdot (n+1), \end{array} \qquad s_n = \tfrac{1}{2}\, n\,(n+1)$$

b) Berechnung durch Indextransformation:

$$\sum_{i=1}^{n} (i+1)^2 - \sum_{i=1}^{n} i^2 = \sum_{i=1}^{n} (i+1)^2 - \sum_{i=0}^{n-1} (i+1)^2 = (n+1)^2 - 1$$

$$\sum_{i=1}^{n} (i+1)^2 - \sum_{i=1}^{n} i^2 = \sum_{i=1}^{n} ((i+1)^2 - i^2) = \sum_{i=1}^{n} (2i+1) = 2\sum_{i=1}^{n} i + \sum_{i=1}^{n} 1 = 2\,s_n + n$$

Also $2\,s_n = (n+1)^2 - 1 - n = (n+1)^2 - (n+1) = n\,(n+1)$.

Die natürlichen Zahlen werden charakterisiert durch die PEANO-Axiome. (In einem axiomatischen Aufbau der Mengenlehre sind diese "Axiome" beweisbar.) Eines dieser Axiome ist das Induktionsaxiom.

6.2 Induktionsaxiom
Hat eine Teilmenge T von $\mathbb{N}_0$ die beiden Eigenschaften
Ind1) $0 \in T$, Ind2) $n \in T \Rightarrow n+1 \in T$,
so ist $T = \mathbb{N}_0$.

Dieser Satz liefert die Grundlage für die Beweismethode der vollständigen Induktion:

6.3 Satz (Beweismethode der vollständigen Induktion)

Um eine Aussage der Form $\bigwedge_{n \in \mathbb{N}_0} Pn$ zu beweisen, braucht man nur zu zeigen:

(1) P0 (ist wahr) Induktionsanfang

(2) $\bigwedge_{n \in \mathbb{N}_0} (Pn \Rightarrow P(n+1))$ Induktionsschritt (oder Induktionsschluß)

Beweis:

Die Menge $T := \{n \mid n \in \mathbb{N}_0 \wedge Pn\}$, die Menge derjenigen natürlichen Zahlen, für die die Aussage Pn wahr ist, ist eine Teilmenge von $\mathbb{N}_0$.
Ind1) Wegen P0 gilt $0 \in T$.
Ind2) Aus $n \in T$, d.h. aus $n \in \mathbb{N}_0 \wedge Pn$ folgt $n+1 \in \mathbb{N}_0 \wedge P(n+1)$, also $n+1 \in T$.
Daher ist $T = \mathbb{N}_0$, die Aussage Pn ist für jede natürliche Zahl wahr. ❑

Beispiel:

Für alle $n \in \mathbb{N}$ ist $\sum_{i=1}^{n} i = \frac{1}{2} n(n+1)$.
Beweis durch vollständige Induktion:
Wir wählen für Pn die Aussageform $\sum_{i=1}^{n} i = \frac{1}{2} n(n+1)$.

(1) P1 bedeutet $1 = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 2$, ist also wahr.

(2) Aus Pn, $n \geq 1$, d.h. $\sum_{i=1}^{n} i = \frac{1}{2} n(n+1)$, folgt $\sum_{i=1}^{n+1} i = \sum_{i=1}^{n} i + (n+1)$
$= \frac{1}{2} n(n+1) + (n+1) = \frac{1}{2}(n+1)(n+2)$, also $P(n+1)$.

Als Induktionsanfang kann statt 1 eine beliebige natürliche Zahl $n_0 \in \mathbb{N}_0$ sein.

Um eine Aussage der Form $\bigwedge_{\substack{n \in \mathbb{N}_0 \\ n \geq n_0}} Pn$ zu beweisen, braucht nur gezeigt zu werden:

(1) Pn_0 und (2) $Pn \Rightarrow P(n+1)$ für alle $n \geq n_0$.

6.4 Ähnlich wie in obigem Beispiel beweist man die *Summenformeln* für die ersten n *Quadratzahlen, Kubikzahlen, ungeraden Zahlen:*

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n} k^2 = \tfrac{1}{6}\, n\,(n+1)\,(2n+1), \quad \sum_{k=1}^{n} k^3 = \tfrac{1}{4}\, n^2\,(n+1)^2, \quad \sum_{k=1}^{n} (2n-1) = n^2}.$$

oder die Summenformel für die ersten n+1 Glieder einer *geometrischen Reihe*:

6.5 Für $q \in \mathbb{R}$, $q \neq 1$, gilt $\boxed{\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}}$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Induktionsschritt:

$$\sum_{k=0}^{n+1} q^k = \Big(\sum_{k=0}^{n} q^k\Big) + q^{n+1} = \frac{1-q^{n+1}}{1-q} + q^{n+1} = \frac{1-q^{n+1}+q^{n+1}-q^{n+2}}{1-q} = \frac{1-q^{n+2}}{1-q}\,.$$

6.6 Wir vermerken weiter die wichtige *Bernoullische Ungleichung*:
Für jede natürliche Zahl $n \geq 2$ und alle von Null verschiedenen reellen Zahlen $x > -1$ ist

$$\boxed{(1+x)^n > 1+nx}$$

Induktionsschritt:

$$(1+x)^n > 1+nx \;\Rightarrow\; (1+x)^{n+1} > (1+nx)(1+x) = 1+(n+1)x+nx^2 > 1+(n+1)x$$

6.7 Die *Binomialkoeffizienten* $\binom{n}{k} := \frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)}{k!}$ $(n,k \in \mathbb{N}_0)$
stehen in der n-ten Zeile des PASCALschen Dreiecks $(0! := 1)$. Es gilt:

(i) $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!} = \binom{n}{n-k}$ für $0 \leq k \leq n$, und $\binom{n}{k} = 0$ für $k > n$.

(ii) $\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k}$ (Diese Identität benutzt man bei der Berechnung der Binomialkoeffizienten mit Hilfe des PASCALschen Dreiecks.)

Beweis:

(i) klar

(ii) $\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k-1}\frac{n-k+1}{k} = \binom{n}{k-1}\left(1+\frac{n-k+1}{k}\right)$

$= \binom{n}{k-1}\frac{n+1}{k} = \binom{n+1}{k}$ ❑

6.8 Satz (Binomischer Satz)
Ist $a,b \in \mathbb{R}$, so gilt für alle $n \in \mathbb{N}_0$

$$(a+b)^n = a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \ldots + \binom{n}{n-1}ab^{n-1} + b^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k}b^k$$

Aus dem binomischen Satz folgt

für $a = 1, b = 1$ $\quad \binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+\ldots+\binom{n}{n} = 2^n$,

für $a = 1, b = -1$ $\quad \binom{n}{0}-\binom{n}{1}+\binom{n}{2}-+\ldots+(-1)^n\binom{n}{n} = 0 \quad (n \geq 1)$

Den binomischen Satz beweisen wir durch vollständige Induktion:

Für $n = 0$ ist die Aussage richtig.

Induktionsschritt: $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k}b^k \Rightarrow (a+b)^{n+1} = (a+b)(a+b)^n$

$$= (a+b)\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k}b^k = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k+1}b^k + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k}b^{k+1}$$

$$= a^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k+1}b^k + \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} a^{n-k}b^{k+1} + b^{n+1}$$

$$= a^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k+1}b^k + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k-1} a^{n-k+1}b^k + b^{n+1}$$

$$= a^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \left(\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}\right) a^{n-k+1}b^k + b^{n+1} \overset{(ii)}{=} a^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n+1}{k} a^{n-k+1}b^k + b^{n+1}$$

$$= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} a^{n-k+1}b^k \qquad \square$$

Unter einer **rekursiven Definition** versteht man eine Definition mit Hilfe des Induktionsprinzips. Wir geben einige Beispiele:

1) $n!$ wird für alle $n \in \mathbb{N}_0$ rekursiv definiert durch: $0! := 1$, $(n+1)! := n! \cdot (n+1)$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$.

Nach dem Prinzip der vollständigen Induktion ist $n!$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ definiert.

2) a^n wird für alle $n \in \mathbb{N}_0$ rekursiv definiert durch: $a^0 := 1$, $a^{n+1} := a^n \cdot a$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$.

3) Das Summenzeichen wird sauber rekursiv definiert durch:

$$\sum_{i=1}^{1} a_i := a_1, \quad \sum_{i=1}^{n+1} a_i := \left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right) + a_{n+1} \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Analog definiert man das Produktzeichen:

$$\prod_{i=1}^{1} a_i := a_1, \quad \prod_{i=1}^{n+1} a_i := \left(\prod_{i=1}^{n} a_i\right) \cdot a_{n+1} \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Fast alle Programmiersprachen verstehen rekursive Definitionen.

Aufgaben

Aufgabe 6.1

Schreiben Sie mit Hilfe des Summenzeichens

a) $-5-2+1+4+7+10+13+16+19$

b) $1+2+4+7+11+16+22+29+37$

c) $1-4+7-10+13-16+19-22,$

d) $2^1-4^2+6^3-8^4+10^5-12^6+14^7-16^8,$

e) $\frac{1}{4\cdot 6}+\frac{1}{5\cdot 7}+\frac{1}{6\cdot 8}+\frac{1}{7\cdot 9}+\frac{1}{8\cdot 10}+\frac{1}{9\cdot 11}+\frac{1}{10\cdot 12}+\frac{1}{11\cdot 13}.$

Aufgabe 6.2

Vereinfachen Sie:

a) $\sum_{n=2}^{100}\frac{n+1}{n-1} - \sum_{k=2}^{100}\frac{k+2}{k},$ b) $2\cdot\sum_{m=1}^{50} m + \sum_{r=1}^{50}(r^2+1),$

c) $\sum_{j=2}^{200}\frac{1}{j\cdot(j+2)} - \sum_{i=2}^{100}\frac{1}{i^2+1}.$

Aufgabe 6.3

Berechnen Sie $\sum_{k=1}^{n} k^2$ und $\sum_{k=1}^{n} k^3$ durch Indexverschiebung.

Aufgabe 6.4

Beweisen Sie die Verallgemeinerung der 3. binomischen Formel:

$a^{n+1}-b^{n+1} = (a^n + a^{n-1}b + \ldots + b^n)(a-b)$ für alle $a,b\in\mathbb{R}$, $n\in\mathbb{N}$.

Aufgabe 6.5

Beweisen Sie durch vollständige Induktion nach $n\in\mathbb{N}$:

a) $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1).$

b) $1^2-2^2+3^2-4^2+-\ldots-(2n)^2+(2n+1)^2=(n+1)(2n+1).$

c) Beweisen Sie b) mit Hilfe von a). Hinweis: $(2k)^2=4k^2$.

d) Die Summe der ersten n ungeraden natürlichen Zahlen ist n^2.

e) $\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\sum_{k=1}^{n} k\right)^2$

Aufgabe 6.6

Beweisen Sie für alle $n\in\mathbb{N}$: $\sum_{k=1}^{n}\frac{i}{2^i} = 2-\frac{n+2}{2^n}.$

Aufgabe 6.7

Welche der folgenden Aussagen ist richtig?

(A) $1\cdot 1! + 2\cdot 2! + 3\cdot 3! + \ldots + n\cdot n! = (n+1)! + 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$,

(B) $1\cdot 1! + 2\cdot 2! + 3\cdot 3! + \ldots + n\cdot n! = (n+1)! - 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

a) Beweisen Sie die richtige Aussage durch vollständige Induktion.

b) Zeigen Sie, daß sich auch bei der falschen Aussage der Schluß von n auf n+1 durchführen läßt. Warum hat dieser Schluß allein keine Beweiskraft?

Aufgabe 6.8

Beweisen Sie durch vollständige Induktion, daß für alle natürlichen Zahlen n die Aussage

$\frac{3}{1^2\cdot 2^2} + \frac{5}{2^2\cdot 3^2} + \frac{7}{3^2\cdot 4^2} + \ldots + \frac{2n+1}{n^2\cdot(n+1)^2} = 1 - \frac{1}{(n+1)^2}$ wahr ist.

Aufgabe 6.9

Beweisen Sie durch vollständige Induktion, daß sich für alle natürlichen Zahlen n $n^2 + n + 2$ (ohne Rest) durch 2 teilen läßt.

Aufgabe 6.10

Beweisen Sie durch vollständige Induktion, daß für alle natürlichen Zahlen n $n^3 + (n+1)^3 + (n+2)^3$ (ohne Rest) durch 3 teilbar ist.

Aufgabe 6.11

Beweisen Sie: Das Produkt je vier aufeinanderfolgender natürlicher Zahlen ist (ohne Rest) durch 24 teilbar.

Aufgabe 6.12

Die Folge der FIBONACCI-Zahlen $f: \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ wird rekursiv definiert durch $f(0) = 0$, $f(1) = 1$ und $f(n+2) = f(n+1) + f(n)$. Zeigen Sie, daß für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$f(n) = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right).$

Aufgabe 6.13

Es sei $n \in \mathbb{N}$, $x \in \mathbb{R}$, $0 < x < 1$. Dann gilt $(1-x)^n < \frac{1}{1+nx}$.

Aufgabe 6.14

Beweisen Sie für $n \in \mathbb{N}$

a) $\sum_{i=1}^{n} \binom{i}{i-1} = \binom{n+1}{n-1}$, b) $\sum_{i=0}^{n} \binom{r+i}{i} = \binom{r+n+1}{n}$, $r \in \mathbb{R}$.

Aufgabe 6. 15

Für welche natürlichen Zahlen gelten die folgenden Ungleichungen

a) $2n < n!$, b) $2n + 1 < n^2$, c) $n^2 < 2^n$.

Beweisen Sie Ihre Behauptungen durch vollständige Induktion.

7. Kombinatorik

Für den folgenden Satz benötigen wir ein einfaches *Multiplikationsprinzip*:

Wenn eine Folge von r Entscheidungen ansteht, und es

für die erste Entscheidung N_1 Möglichkeiten,
für die zweite Entscheidung N_2 Möglichkeiten,
. . .
. . .
für die r-te Entscheidung N_r Möglichkeiten gibt,
dann gibt es für die Gesamtentscheidung $N_1 \cdot N_2 \cdot \ldots \cdot N_r$ Möglichkeiten.

Beweis durch vollständige Induktion nach der Anzahl r der Entscheidungen.

7.1 Satz

$A = \{a_1, \ldots, a_n\}$, $n \in \mathbb{N}$, sei eine n-elementige Menge (kurz: **n-Menge**) und $k \in \mathbb{N}_0$. Dann können aus (den Elementen von) A hergestellt werden:

a) n! **Permutationen** (Anordnungen, Reihenfolgen),

b) $(n)_k := n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)$ k-elementige geordnete Teilmengen (kurz: **geordnete k-Teilmengen, k-Ketten**), $(n)_0 := 1$,

c) $\binom{n}{k} := \frac{(n)_k}{k!}$ k-elementige Teilmengen (kurz: **k-Teilmengen**),

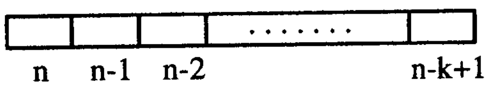
d) 2^n Teilmengen (einschließlich der leeren Menge),

e) n^k k-Tupel.

Nach a) gibt es n! bijektive Abbildungen einer n-Menge auf sich.
Nach b) gibt es $(n)_k$ injektive Abbildungen einer k-Menge in eine n-Menge.
Nach e) gibt es n^k Abbildungen einer k-Menge in eine n-Menge.

Jede Teilmenge von A läßt sich als geordnete Menge auffassen, bei der sich die Elemente in einer ausgezeichneten Ordnung befinden, etwa nach steigenden (oder auch nach fallenden) Indizes geordnet. Nach c) gibt es $\binom{n}{k}$ geordnete k-Teilmengen, bei denen die Elemente nach steigenden Indizes geordnet sind.

Beweis:

b) 

Wir stellen uns k Kästchen vor, in die wir k Elemente von A legen wollen. Für das erste Kästchen stehen alle n Elemente zur Wahl. In jedem dieser Fälle bleiben für das zweite Kästchen n – 1 Elemente, für das dritte Kästchen jeweils n – 2 Elemente usw. Für das k-te Kästchen stehen jeweils noch n – k + 1 Elemente zur Verfügung.
Es gibt also $n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-k+1) =: (n)_k$ mögliche Belegungen.

(Welches Ergebnis erhält man im Fall k > n ?)

a) folgt aus b) für k = n.

c) Nach b) gibt es $(n)_k$ geordnete k-Teilmengen. Wir teilen sie in Klassen ein. Eine Klasse soll jeweils genau diejenigen geordneten k-Teilmengen enthalten, die dieselben Elemente haben, sich also nur in der Anordnung der Elemente unterscheiden. Nach a) gibt es k! mögliche Reihenfolgen; jede Klasse hat also k! Mitglieder. Daher gibt es $\frac{(n)_k}{k!} = \frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)}{k!} = \binom{n}{k}$ Klassen, d.h. k-elementige Teilmengen.

Oder in umgekehrter Richtung argumentiert: $\binom{n}{k}$ bezeichne die noch unbekannte Anzahl der k-Teilmengen einer n-Menge. Aus jeder k-Teilmenge gibt lassen sich k! geordnete k-Teilmengen herstellen. Man erhält so $\binom{n}{k}\cdot k!$ geordnete k-Teilmengen. Nach b) ist $\binom{n}{k}\cdot k! = (n)_k$.

e) Für jede Koordinate eines k-Tupels gibt es n Möglichkeiten.

d) Wir denken uns jede Teilmenge durch ein n-Tupel charakterisiert, das nur Nullen und Einsen enthält (eine Dualzahl der Länge n). Eine Eins oder Null an der i-ten Stelle gibt an, ob das Element a_i zu der Teilmenge gehört oder nicht. Es gibt also 2^n n-Tupel mit Elementen der Menge $\{0,1\}$.

Ein anderer Weg: Man erhält alle Teilmengen einer n-Menge, wenn man die 0-elementigen, 1-elementigen, 2-elementigen, . . . , n-elementigen Teilmengen bildet. Das sind nach c)

$\binom{n}{0}, \binom{n}{1}, \ldots, \binom{n}{n}$. Aus dem binomischen Satz $\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$. ❑

Als Anwendung beweisen wir die Eigenschaften der Binomialkoeffizienten 6.7 (i) und (ii) sowie den binomischen Satz 6.8 durch kombinatorische Argumente:

(i) $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$ für alle k mit $0 \le k \le n$. Es gibt genau so viele k-elementige Teilmengen einer n-Menge wie (n - k)-elementige Komplemente dieser Teilmengen.

(ii) $\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k}$ für $1 \le k \le n$.
Die k-Teilmengen einer (n + 1)-Menge lassen sich einteilen in solche, die ein bestimmtes Element enthalten, und solche, die es nicht enthalten. Mengen, die es enthalten, bestehen aus diesem Element und einer (k – 1)-Teilmenge der n-Menge ohne dieses Element. Mengen, die es nicht enthalten, sind k-Teilmengen der n-Menge ohne dieses Element.

9.9) Beim Ausrechnen von $(a + b)^n = (a + b)\cdot(a + b)\cdot\ldots\cdot(a + b)$ treten nur Produkte aus n Faktoren auf, die gleich a oder b sind, z. B. (ohne Benutzung des Kommutativgesetzes) baabab...b. Jedes dieser Produkte läßt sich eindeutig durch eine Teilmenge von $\{1,2, \ldots ,n\}$ beschreiben, die die Plätze angibt, auf denen b steht, im Beispiel $\{1,4,6, \ldots ,n\}$. Aufgrund des Kommutativgesetzes lassen sie sich zusammenfassen; das Produkt $a^{n-k}b^k$ kommt so oft vor, wie es k-Teilmengen von $\{1,2, \ldots ,n\}$ gibt, also $\binom{n}{k}$-mal. ❑

Aufgaben

Aufgabe 7.1

a) In Berlin sind die Telefonnummern siebenstellig. Für wie viele Anschlüsse reichen die Telefonnummern aus? (Beachten Sie, daß am Anfang keine 0 stehen darf.)
b) In einer Stadt mit 200 000 Einwohnern besitzt jeder dritte ein Telefon. Die Telefonnummern bestehen aus den Ziffern 0 bis 9, wobei die 0 nicht als erste Ziffer vorkommen darf. Wie viele Stellen müssen die Telefonnummern mindestens haben?
c) Wie viele sechsstellige Telefonnummern gibt es, bei denen jede Ziffer höchstens einmal vorkommt? (Beachten Sie, daß am Anfang keine 0 stehen darf.)

Aufgabe 7.2

An einem Radrennen nehmen 10 Fahrer teil.
a) Alle erreichen unterschiedliche Zeiten. Auf wie viele Arten können die ersten drei Plätze belegt werden?
b) Wie viele Möglichkeiten gibt es, wenn auch die Fälle berücksichtigt werden, in denen zwei oder mehr Fahrer zeitgleich das Ziel erreichen?

Aufgabe 7.3

n Kugeln mit den Nummern 1bis n liegen in einer Urne. Nacheinander werden k Kugeln ($k \leq n$) gezogen; dabei wird
a) die jeweils gezogene Kugel nicht zurückgelegt;
b) die jeweils gezogene Kugel wieder zurückgelegt.
Wie viele Möglichkeiten gibt es in den beiden Fällen?

Aufgabe 7.4

a) Wie viele dreistellige Zahlen (erste Ziffer keine Null) gibt es, deren Ziffern alle gerade (ungerade) sind?
b) Wie viele dreistellige Zahlen haben eine gerade Einerziffer, eine ungerade Zehnerziffer und eine durch 3 teilbare Hunderterziffer?
c) Wie viele dreistellige Zahlen bestehen aus drei verschiedenen Ziffern?

Aufgabe 7.5

Beim Morsen verwendet man nur die Zeichen "Punkt" und "Strich" Wie viele Wörter höchstens der Länge fünf sind möglich?

Aufgabe 7.6

Sechs verschieden gefärbte Kugeln sollen in 10 durchnumerierte Kästchen gelegt werden, wobei in einem Kästchen höchstens eine Kugel liegen darf. Wie viele Arten gibt es, die Kugeln unterzubringen?

Aufgabe 7.7

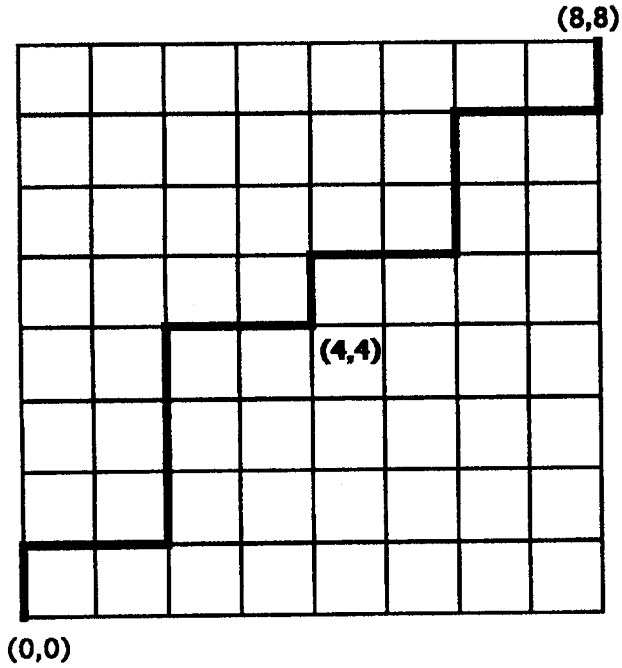
Auf wie viele Arten kann man 8 Türme auf ein Schachbrett setzen, ohne daß sie sich gegenseitig bedrohen?

Aufgabe 7.8

Aus fünf Ehepaaren wird durch Los ein Ausschuß aus vier Personen ausgewählt.
a) Wie viele verschiedene Ausschüsse sind möglich?
b) Wie viele Möglichkeiten gibt es, zwei Frauen und zwei Männer auszuwählen?
c) In wie vielen Fällen werden nur Männer oder nur Frauen ausgewählt?
d) In wie vielen Fällen besteht der Ausschuß aus zwei Ehepaaren?

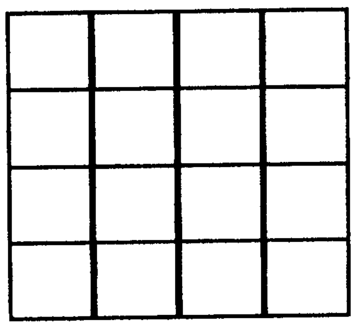
Aufgabe 7.9
Wie viele verschiedene Möglichkeiten gibt es, die Karten eines Skatspiels auf die drei Spieler und den Skat zu verteilen?

Aufgabe 7.10



A wohnt in (0,0) und arbeitet in (8,8). Sein Arbeitskollege B wohnt in (4,4). A fährt jeden Morgen zur Arbeit und nimmt B mit. Wie viele Wege kann er benutzen, ohne einen Umweg zu fahren?

Aufgabe 7.11
Auf wie viele Arten lassen sich die Felder eines 4 x 4 - Brettes einfärben, wenn
a) nur die Farben Schwarz und Weiß zur Verfügung stehen,
b) 2 Felder schwarz, 4 weiß und 10 rot gefärbt werden?



Aufgabe 7.12
Wie viele Teiler hat die Zahl $1960 = 2^3 \cdot 5 \cdot 7^2$?

Aufgabe 7.13
Wie oft tritt beim Ausmultiplizieren von $(a+b)^{27}$ der Summand $a^{11}b^{16}$ auf?

Aufgabe 7.14
Bei wie vielen aller möglichen Tips eines (6 aus 49)-Zahlenlottos sind mindestens zwei der angekreuzten Zahlen benachbart?

Aufgabe 7.15
10 Ehepaare veranstalten eine Tanzparty. Wie viele Tanzpaare sind möglich, wenn Ehepaare nicht miteinander tanzen dürfen?

8. Der Körper der reellen Zahlen

Die reellen Zahlen bilden die Grundlage für die Analysis. Bei einem systematischen Aufbau, in dem die natürlichen Zahlen innerhalb einer axiomatischen Mengenlehre konstruiert bzw. durch die PEANO-Axiome charakterisiert werden, konstruiert man $\mathbb{R}$ aus $\mathbb{N}$ über $\mathbb{Z}$ und $\mathbb{Q}$ (Aufbau des Zahlensystems).Wir müssen aus Zeitmangel auf diesen lehrreichen Weg verzichten und beginnen gleich mit einer axiomatischen Charakterisierung der reellen Zahlen.

Die reellen Zahlen bilden einen (ordnungs-)vollständigen angeordneten Körper, den wir ebenfalls mit $\mathbb{R}$ bezeichnen. Die Eigenschaften der reellen Zahlen werden beschrieben durch die Körperaxiome, die Axiome der Anordnung und das Vollständigkeitsaxiom. Die Körperaxiome charakterisieren die algebraische Struktur der reellen Zahlen.

8.1 Körperaxiome

$\mathbb{R}$ ist ein *Körper*, d.h. in $\mathbb{R}$ sind zwei (innere) Verknüpfungen (Addition und Multiplikation)

$$\begin{array}{ll} \mathbb{R}\times\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} & \qquad \mathbb{R}\times\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ (x,y) \longmapsto x+y & \qquad (x,y) \longmapsto x\cdot y \end{array}$$

erklärt, die folgende Eigenschaften haben:

A1) $a + (b + c) = (a + b) + c$ für alle $a,b,c\in \mathbb{R}$.

A2) $a + b = b + a$ für alle $a,b\in \mathbb{R}$.

A3) Es gibt eine Zahl $0\in \mathbb{R}$ mit $a + 0 = a$ für alle $a\in \mathbb{R}$.

A4) Zu jedem $a\in \mathbb{R}$ existiert eine Zahl $-a\in \mathbb{R}$ mit $a + (-a) = 0$.

M1) $a\cdot (b\cdot c) = (a\cdot b)\cdot c$ für alle $a,b,c\in \mathbb{R}$.

M2) $a\cdot b = b\cdot a$ für alle $a,b\in \mathbb{R}$.

M3) Es gibt eine Zahl $1\in \mathbb{R}$ mit $a\cdot 1 = a$ für alle $a\in \mathbb{R}$.

M4) Zu jedem $a\in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ existiert eine Zahl $a^{-1}\in \mathbb{R}$ mit $a\cdot a^{-1} = 1$.

D) $a\cdot(b + c) = a\cdot b + a\cdot c$ für alle $a,b,c\in \mathbb{R}$.

Statt "$a\cdot b$" schreibt man meistens nur "ab".

A1, M1 sind die beiden Assoziativgesetze, A2, M2 die Kommutativgesetze, A3 und M3 sichern die Existenz neutraler Elemente (Null, Eins) und A4, M4 die Existenz inverser Elemente, jeweils bezüglich Addition und Multiplikation. Die Verbindung zwischen Addition und Multiplikation sichert das Distributivgesetz D.

Assoziativ- und Kommutativgesetz lassen sich auf endlich viele Summanden oder Faktoren ausdehnen. Man beweist das durch vollständige Induktion.

Die Ähnlichkeit der Axiome von Addition und Multiplikation führt zum Begriff der *kommutativen Gruppe;* das ist eine Menge mit einer inneren Verknüpfung, in der das Assoziativgesetz und das Kommutatativgesetz gelten, in der es ein neutrales Element gibt und zu jedem Element ein inverses Element gibt.

Damit lassen sich die Axiome von $\mathbb{R}$ kürzer fassen:

A) $\mathbb{R}$ mit der Addition ist eine kommutative Gruppe.

M) $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ mit der Multiplikation ist eine kommutative Gruppe.

D) Es gilt das Distributivgesetz.

8.2 Folgerungen

a) Die beiden neutralen Elemente sind durch ihre Eigenschaften eindeutig bestimmt.

b) Für $a,b \in \mathbb{R}$ hat die Gleichung $a + x = b$ genau eine Lösung, nämlich $x = (-a) + b$.
Für $a,b \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, hat die Gleichung $ax = b$ genau eine Lösung, nämlich $x = a^{-1}b$.
Insbesondere ist das zu a additiv inverse bzw. das zu $a \neq 0$ multiplikativ inverse Element eindeutig bestimmt.

c) Rechenregeln:

$-0 = 0,$ $\quad -(-a) = a,$ $\quad -(a + b) = (-a) + (-b),$

$1^{-1} = 1,$ $\quad (a^{-1})^{-1} = a,$ $\quad (ab)^{-1} = a^{-1}b^{-1}$ $(a \neq 0, b \neq 0),$

$a \cdot 0 = 0,$ $\quad (-a)b = a(-b) = -(ab),$ $\quad (-a)(-b) = ab.$

d) Aus $ab = 0$ folgt $a = 0$ oder $b = 0$. (In einem Körper gibt es keine "Nullteiler".)

e) Definiert man für $a,b \in \mathbb{R}$, $b \neq 0$, $\frac{a}{b} := ab^{-1}$ (Bruchschreibweise), so gilt

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{ad+bc}{bd}, \quad \frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd}, \quad \frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}}=\frac{a}{b}\cdot\frac{d}{c}$$

($b \neq 0$, $d \neq 0$ und in der letzten Identität zusätzlich $c \neq 0$).

Beweis:

a) Sei $0' \in \mathbb{R}$ ein weiteres Element mit $a + 0' = a$ für alle $a \in \mathbb{R}$, dann gilt insbesondere $0 + 0' = 0$. Da nach dem Kommutativgesetz A2 aber $0 + 0' = 0' + 0 \overset{A3}{=} 0'$ ist, folgt $0 = 0'$.
Entsprechend zeigt man, daß das neutrale Element der Multiplikation eindeutig bestimmt ist.

b) Wir beschränken uns auf die Gleichung $a + x = b$.
Wir zeigen die *Existenz* einer Lösung: $x = (-a) + b$ ist eine Lösung, denn es ist
$a + ((-a) + b) \overset{A1}{=} (a + (-a)) + b \overset{A4}{=} 0 + b \overset{A2}{=} b + 0 \overset{A3}{=} b.$
Die Gleichung besitzt also mindestens eine Lösung.
Wir zeigen die *Eindeutigkeit* der Lösung. Sind x_1, x_2 Lösungen der Gleichung $a + x = b$, dann gilt $a + x_1 = b$ und $a + x_2 = b$, also $a + x_1 = a + x_2$. Addition von $(-a)$ auf beiden Seiten ergibt $(-a) + (a + x_1) = (-a) + (a + x_2)$, also nach A1 $((-a) + a) + x_1 = ((-a) + a) + x_2$ und nach A2 $(a + (-a)) + x_1 = (a + (-a)) + x_2$, d.h. nach A4 $0 + x_1 = 0 + x_2$ und folglich nach A2 $x_1 + 0 = x_2 + 0$, also nach A3 $x_1 = x_2$. Die Gleichung hat höchstens eine Lösung.

c) Nach A4 ist $0 + (-0) = 0$, nach A3 $0 + 0 = 0$. Da aber das additiv inverse Element nach b) eindeutig bestimmt ist, folgt $-0 = 0$.

Nach A3 ist $-(-a)$ das zu $-a$ inverse Element. Andererseits ist nach A2 und A4 auch $(-a) + a = 0$, also a additiv invers zu $-a$. Wegen der Eindeutigkeit des additiv inversen Elements zu $-a$ ist $-(-a) = a$.

$-(a + b)$ ist das zu $a + b$ additiv inverse Element. Andererseits ist wegen

$(a + b) + ((-a) + (-b)) = 0$ (nach A1, A2 und A4) auch $(-a) + (-b)$ zu $a + b$ additiv invers.
Es folgt $-(a + b) = (-a) + (-b)$.

Die drei entsprechenden Aussagen für die Multiplikation beweist man analog.

Aus $a \cdot 0 \overset{A3}{=} a \cdot (0 + 0) \overset{D}{=} a \cdot 0 + a \cdot 0$ folgt $0 = a \cdot 0$. (Warum?)

Nach A3 ist $-(ab)$ das zu ab additiv inverse Element. Wegen $ab + a(-b) \overset{D}{=} a(b + (-b)) \overset{A4}{=} a \cdot 0 = 0$ ist auch $a(-b)$ zu ab additiv invers. Es folgt $a(-b) = -(ab)$.
Schließlich folgt daraus $(-a)b = b(-a) = -(ba) = -(ab)$.

Nach den gerade bewiesenen Vorzeichenregeln gilt $(-a)(-b) = -(a(-b)) = -(-(ab)) = ab$.

d) Es sei $ab = 0$. Entweder ist $a = 0$ oder $a \neq 0$. Im zweiten Fall existiert zu a das multiplikativ inverse Element a^{-1}, und es folgt aus $ab = 0$ nach b) $b = a^{-1} \cdot 0 = 0$.

e) Wir beschränken uns auf den Beweis der ersten Bruchrechenregel:
$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = ab^{-1} + cd^{-1} = ab^{-1}(dd^{-1}) + cd^{-1}(bb^{-1}) = ad(b^{-1}d^{-1}) + bc(b^{-1}d^{-1}) = ad(bd)^{-1} + bc(bd)^{-1} = (ad + bc)(bd)^{-1} = \frac{ad + bc}{bd}$. ❑

Bemerkung: Die in 8.2 abgeleiteten Regeln gelten in jedem Körper, z. B. im Körper der rationalen $\mathbb{Q}$ oder im Körper der komplexen Zahlen $\mathbb{C}$. Hier zeigt sich zum ersten Mal die Ökonomie der axiomatischen Methode.

Aufgaben

Aufgabe 8.1
Beweisen Sie, daß in einem Körper das neutrale Element der Multiplikation eindeutig bestimmt ist.

Aufgabe 8.2
Zeigen Sie, daß in einem Körper K die Gleichung $ax = b$ mit $a,b \in K$, $a \neq 0$, genau eine Lösung hat, nämlich $x = a^{-1}b$.

Aufgabe 8.3
In einem Körper ist das zu $a \neq 0$ multiplikativ inverse Element eindeutig bestimmt.

Aufgabe 8.4
In einem Körper gilt: a) $1^{-1} = 1$, b) $(a^{-1})^{-1} = a$, c) $(ab)^{-1} = a^{-1}b^{-1}$ $(a \neq 0, b \neq 0)$,

Aufgabe 8.5
Beweisen Sie für $a,b \in \mathbb{R}$:
a) Wenn $a^2 = b^2$, dann $a = b$ oder $a = -b$.
b) $a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$
c) Finden Sie eine Faktorisierung von $a^n + b^n$ für ungerades n.

Aufgabe 8.6
Beweisen Sie die folgenden Rechenregeln für Brüche in einem Körper:
a) $\frac{a}{b} = \frac{ac}{bc}$ für $b \neq 0, c \neq 0$.
b) $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$ für $b \neq 0, d \neq 0$.
c) $\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{ad}{bc}$ für $b \neq 0, c \neq 0, d \neq 0$.
d) Es sei $b \neq 0$, $d \neq 0$. Dann gilt $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ genau dann wenn $ad = bc$.

Aufgabe 8.7
In $K := \{0,1,2\}$ seien zwei innere Verknüpfungen (Addition und Multiplikation) durch die folgenden Verknüpfungstafeln definiert:

+	0	1	2
0	0	1	2
1	1	2	0
2	2	0	1

·	0	1	2
0	0	0	0
1	0	1	2
2	0	2	1

Zeigen Sie, daß $(K,+ \cdot)$ ein Körper ist.

9. Ordnung und absoluter Betrag

Auf $\mathbb{R}$ läßt sich eine Ordnung definieren, die mit der Körperstruktur verträglich ist, eine *Anordnung*.

9.1 Anordnungsaxiome

Für alle $a,b,c \in \mathbb{R}$ gilt:

O1)	Genau eine der drei Aussagen $a < b$, $a = b$, $b < a$ ist wahr.	(Trichotomie)
O2)	Wenn $a < b$ und $b < c$, dann $a < c$.	(Transitivität)
O3)	Wenn $a < b$, dann $a + c < b + c$.	(Monotonie der Addition)
O4)	Wenn $a < b$ und $0 < c$, dann $ac < bc$.	(Monotonie der Multiplikation)

Statt $a < b$ schreibt man auch $b > a$.

9.2 Satz

Für alle $a,b,c \in \mathbb{R}$ gilt:

a) Wenn $a < b$ und $c < d$, dann $a + c < b + d$.

b) Wenn $a < b$ und $c < 0$, dann $ac > bc$.

c) Wenn $a \neq 0$, dann $0 < a^2$. (Speziell: $0 < 1$.)

d) Wenn $a > 0$, dann $\frac{1}{a} > 0$.
Wenn $a < 0$, dann $\frac{1}{a} < 0$.

e) Wenn $a < b$ und $ab > 0$, dann $\frac{1}{b} < \frac{1}{a}$.
Wenn $a < b$ und $ab < 0$, dann $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$.

Beweis:

a) $$\left.\begin{array}{l}\text{Wenn } a < b, \text{ dann (nach O3) } a + c < b + c.\\ \text{Wenn } a < b, \text{ dann (nach O3) } b + c < b + d.\end{array}\right\} \text{ Also } a + c < b + d. \text{ (O2)}$$

b) Wenn $c < 0$, dann $0 < -c$. (O3, wie?)
Nach O4 folgt aus $a < b$: $-ac < -bc$.
Addition von $ac + bc$ ergibt $bc < ac$. (O3)

c) Wenn $a \neq 0$, dann gilt entweder $0 < a$ oder $a < 0$. (O1)
Wenn $0 < a$, dann $0a < a^2$, also $0 < a^2$. (O4)
Wenn $a < 0$, dann $0 < -a$, also $0 < (-a)^2$, wie im ersten Fall.
Wegen $(-a)^2 = a^2$ bedeutet das aber $0 < a^2$.

d) Wenn $0 < a$, dann $0 \neq a$ (O1), also existiert $\frac{1}{a}$.
Nach c) ist $0 < (\frac{1}{a})^2 = \frac{1}{a^2}$.
Daher gilt nach O4: Wenn $0 < a$, dann $0 \cdot \frac{1}{a^2} < a \cdot \frac{1}{a^2}$, also $0 < \frac{1}{a}$.
Die zweite Aussage beweist man analog.

e) Wenn $0 < ab$, dann $0 < \frac{1}{ab}$ (nach d).
Daher gilt nach O4: Wenn $a < b$, dann $a \cdot \frac{1}{ab} < b \cdot \frac{1}{ab}$, also $\frac{1}{b} < \frac{1}{a}$.
Die zweite Aussage beweist man analog. ❑

$a \le b$ bedeutet: entweder $a < b$ oder $a = b$. Statt $a \le b$ schreibt man auch $b \ge a$.

Hieraus folgt unmittelbar: Wenn $a \le b$ und $b \le a$, dann $a = b$.
$a \le b$ ist genau dann falsch, wenn $a > b$ wahr ist.
$a < b$ ist genau dann falsch, wenn $a \ge b$ wahr ist.

Die Schreibweise $a < b < c$ ist eine Abkürzung für $a < b$ und $b < c$.
Entsprechend sind die Schreibweisen $a \le b \le c$, $a < b \le c$, $a \le b < c$ zu lesen.

9.3 Definition

Für $a \in \mathbb{R}$ wird der **absolute Betrag** von a definiert durch $|a| := \begin{cases} a, & \text{wenn } a \ge 0 \\ -a, & \text{wenn } a < 0 \end{cases}$

$|a|$ wird gelesen: "Betrag (von) a" oder "a absolut".

9.4 Folgerungen

(i) $\pm a \le |a|$, (ii) $-|a| \le a \le |a|$, (iii) $|a| = |-a|$, (iv) $a < b \wedge -a < b \Leftrightarrow |a| < b$.

Beweis:

(i) Ist $a \ge 0$, dann ist $-a \le 0 \le a = |a|$. Ist $a < 0$, dann ist $a < 0 < -a = |a|$.

(ii) Nach (i) gilt $a \le |a|$ und $-a \le |a|$, also $-|a| \le a$.

(iii) Für $a \ge 0$ ist $-a \le 0$, also $|a| = a$ und $|-a| = -(-a) = a$.
Für $a < 0$ ist $-a > 0$, also $|a| = -a$ und $|-a| = -a$.

(iv) "$\Rightarrow$": Es ist $|a| = a$ oder $|a| = -a$. Gilt daher $a < b \wedge -a < b$, so folgt $|a| < b$.
"$\Leftarrow$": Gilt $|a| < b$, so folgt nach (i) sowohl $a \le |a| < b$ also auch $-a \le |a| < b$. ❑

9.5 Satz Für alle $a,b \in \mathbb{R}$ gilt:

B1) $|a| \ge 0$
$|a| = 0$ genau dann, wenn $a = 0$.

B2) $|ab| = |a| \cdot |b|$

B3) $|a + b| \le |a| + |b|$ Dreiecksungleichung

Beweis:

B1) klar

B2) Wir unterscheiden vier Fälle:
1. Fall: $a \ge 0$, $b \ge 0$. Dann ist $ab \ge 0$, also $|ab| = ab = |a| \cdot |b|$.
2. Fall: $a \ge 0$, $b < 0$. Dann ist $ab \le 0$, also $|ab| = -ab = a(-b) = |a| \cdot |b|$.
3. Fall: $a < 0$, $b \ge 0$. Dann ist $ab \le 0$, also $|ab| = -ab = (-a)b = |a| \cdot |b|$.
4. Fall: $a < 0$, $b < 0$. Dann ist $ab > 0$, also $|ab| = ab = (-a)(-b) = |a| \cdot |b|$.

Wegen der Kommutativität der Multiplikation könnte der 3. Fall auch auf den 2. Fall zurückgeführt werden. (Wie?)

B3) 1. Fall: $a + b \ge 0$. Dann ist $|a + b| = a + b \le |a| + |b|$.
2. Fall: $a + b < 0$. Dann ist $|a + b| = -(a + b) = -a - b \le |a| + |b|$. ❑

9.6 Folgerung

Für alle $a,b \in \mathbb{R}$ gilt: $|a| - |b| \le |a - b|$ und $|b| - |a| \le |a - b|$, also $||a| - |b|| \le |a - b|$.

Beweis:
$|a| = |a - b + b| \leq |a - b| + |b| \Rightarrow |a| - |b| \leq |a + b|$. Durch Vertauschen von a und b folgt: $|b| - |a| \leq |b - a| = |a - b|$. Schließlich wende man 9.4 (iv) an. ❑

Die Aussagen 9.5, B3 und 9.6 lassen sich wegen $|-b| = |b|$ verallgemeinern und zusammenfassen:

$$\boxed{\mathbf{9.7}\quad ||a| - |b|| \leq |a \pm b| \leq |a| + |b|}.$$

9.8 Lemma $|a| < b$ gilt genau dann, wenn $-b < a < b$.

Analog mit $\leq$ statt $<$.

Beweis:
$|a| < b \Leftrightarrow -a < b \wedge a < b \Leftrightarrow a > -b \wedge a < b \Leftrightarrow -b < a < b$. ❑

Mit Lemma 9.8 läßt sich die Dreiecksungleichung wie folgt beweisen:

2. Beweis von B3:
Aus $-|a| \leq a \leq |a|$ und $-|b| \leq b \leq |b|$ folgt nach 9.2a: $-(|a| + |b|) \leq a + b \leq |a| + |b|$. Nach Lemma 9.6 ist diese Aussage äquivalent zu $|a + b| \leq |a| + |b|$. ❑

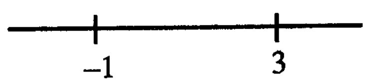
9.9 Lemma $|a| = \sqrt{a^2}$ für alle $a \in \mathbb{R}$.

Beweis:
$\sqrt{a^2}$ ist die nichtnegative Lösung der Gleichung $x^2 = a^2$. Die Lösungsmenge dieser Gleichung ist $\{-|a|, |a|\}$, die nichtnegative Lösung also $|a|$. ❑

Durch geduldige Fallunterscheidung lassen sich auch die meisten Ungleichungen, die absolute Beträge enthalten, lösen.

Beispiel: $|x - 3| + |x + 1| < 6$.

Wir unterscheiden drei Fälle:



1. Fall $x < -1$. Dann ist $x - 3 < 0$ und $x + 1 < 0$. Die Ungleichung ist äquivalent zu $-(x - 3) - (x + 1) < 6$, d.h. zu $x > -2$. Die Lösungsmenge ist in diesem Fall $L_1 := \{x \mid x \in \mathbb{R}, x < -1\} \cap \{x \mid x \in \mathbb{R}, x > -2\}$ $= \{x \mid x \in \mathbb{R}, -2 < x < -1\}$.

2. Fall $-1 \leq x < 3$. Dann ist $x - 3 < 0$ und $x + 1 \geq 0$. Die Ungleichung ist äquivalent zu $-(x - 3) + (x + 1) < 6$, d.h. zu $4 < 6$. Die Lösungsmenge ist in diesem Fall $L_2 := \{x \mid x \in \mathbb{R}, -1 \leq x < 3\} \cap \mathbb{R} = \{x \mid x \in \mathbb{R}, -1 \leq x < 3\}$.

3. Fall $3 \leq x$. Dann ist $x - 3 \geq 0$ und $x + 1 \geq 0$. Die Ungleichung ist äquivalent zu $(x - 3) + (x + 1) < 6$, d.h. zu $x < 4$. Die Lösungsmenge ist in diesem Fall $L_3 := \{x \mid x \in \mathbb{R}, 3 \leq x\} \cap \{x \mid x \in \mathbb{R}, x < 4\} = \{x \mid x \in \mathbb{R}, 3 \leq x < 4\}$.

Die Lösungsmenge der Ungleichung ist $L_1 \cup L_2 \cup L_3 = \{x \mid x \in \mathbb{R}, -2 < x < 4\}$.

Aufgaben

Aufgabe 9.1

Beweisen Sie für $a,b,c,d \in \mathbb{R}$:

a) Wenn $a < b$, dann $-b < -a$.

b) Wenn $a > 1$, dann $a^2 > a$.

c) Wenn $0 < a < 1$, dann $a^2 < a$.

d) Wenn $0 \leq a < b$ und $0 \leq c < d$, dann $ac < bd$.

e) Wenn $0 \leq a < b$, dann $a^2 < b^2$. (Benutzen Sie d).

f) Wenn $a \geq 0$, $b \geq 0$ und $a^2 < b^2$, dann $a < b$. (Kontraposition!)

g) Wenn $a < 0$, dann $\frac{1}{a} < 0$.

h) Wenn $a < b$ und $ab < 0$, dann $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$.

Aufgabe 9.2

Zeigen Sie für $a,b \in \mathbb{R}$:

a) $\left|\frac{1}{b}\right| = \frac{1}{|b|}$ $(b \neq 0)$,

b) $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$ $(b \neq 0)$,

c) $|a - b| \leq |a| + |b|$, (Finden Sie einen sehr kurzen Beweis!)

d) $|a + b + c| \leq |a| + |b| + |c|$.

Aufgabe 9.3

Lösen Sie die folgenden Ungleichungen:

a) $4 - x < 3 - 2x$, b) $5 - x^2 < 8$, c) $5 - x^2 < -2$,

d) $(x - 1)(x - 3) > 0$, e) $x^2 - 2x + 2 > 0$, f) $x^2 + x + 1 > 2$,

g) $x^2 - x + 10 > 16$, h) $x^2 - 4x + 8 \leq 0$, i) $(x - 4)(x + 5)(x - 3) > 0$

j) $\frac{1}{x} + \frac{1}{1 - x} > 0$, k) $\frac{x - 1}{x + 1} > 0$.

Aufgabe 9.4

Lösen Sie die folgenden Gleichungen und Ungleichungen:

a) $|x - 3| = 8$, b) $|x - 3| < 8$, c) $|x + 4| < 2$,

d) $|x - 1| + |x - 2| > 1$, e) $|x - 1| + |x + 1| < 3$, f) $|x - 1| + |x + 1| < 2$,

g) $|x - 1| \cdot |x + 1| = 0$, h) $|x - 1| \cdot |x + 2| = 3$, i) $|x + 2| \leq |x - 1|$,

j) $|2 - |x + 1|| \leq 1$, k) $|2 - |x|| - ||x| - 3| \leq 4$.

10. Vollständigkeit von $\mathbb{R}$

Uns fehlt noch eine wichtige Eigenschaft von $\mathbb{R}$, und zwar gerade die Eigenschaft, in der sich $\mathbb{R}$ von $\mathbb{Q}$ unterscheidet. Sowohl $\mathbb{R}$ als $\mathbb{Q}$ sind angeordnete Körper. Der Unterschied läßt sich an der Zahlengeraden veranschaulichen. Die rationalen Zahlen besetzen zwar recht viele Punkte. (Zwischen zwei rationalen Zahlen $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$ liegt wieder eine rationale Zahl, zum Beispiel $\frac{1}{2}\left(\frac{a}{b}+\frac{c}{d}\right) = \frac{ad+bc}{2bd}$, folglich sogar unendlich viele rationale Zahlen, denn das Verfahren läßt sich beliebig oft wiederholen.) Aber es bleiben Punkte - sogar die meisten Punkte - unbesetzt. Das zeigen die folgenden Überlegungen.

Die rationalen Zahlen sind abzählbar; sie lassen sich mit den naürlichen Zahlen durchnumerieren. (Wir zählen sogar die ungekürzten Brüche.)

$$\begin{array}{ccccccccc}
\frac{1}{1} & \rightarrow & \frac{2}{1} & & \frac{3}{1} & \rightarrow & \frac{4}{1} & & \cdots \\
 & & \downarrow & & \uparrow & & \downarrow & & \\
\frac{1}{2} & \leftarrow & \frac{2}{2} & & \frac{3}{2} & & \frac{4}{2} & & \cdots \\
\downarrow & & & & \uparrow & & \downarrow & & \\
\frac{1}{3} & \rightarrow & \frac{2}{3} & \rightarrow & \frac{3}{3} & & \frac{4}{3} & & \cdots \\
 & & & & & & \downarrow & & \\
\frac{1}{4} & \leftarrow & \frac{2}{4} & \leftarrow & \frac{3}{4} & \leftarrow & \frac{4}{4} & & \cdots \\
\cdot & & \cdot & & \cdot & & \cdot & & \cdots
\end{array}$$

Erfinden Sie andere Abzählmuster.

Ordnen wir den positiven rationalen Zahlen die geraden natürlichen Zahlen zu, so bleiben die ungeraden natürlichen Zahlen für die negativen rationalen Zahlen.

Die reellen Zahlen dagegen sind nicht mehr abzählbar. (Ebenso die irrationalen Zahlen.) Nicht einmal die reellen Zahlen zwischen 0 und 1 sind abzählbar.

Annahme: Die unendlichen Dezimalbrüche zwischen 0 und 1 sind abzählbar. Wir denken uns *alle* in der Reihenfolge der Numerierung notiert.

$0{,}a_{11}a_{12}a_{13}a_{14}\ldots$

$0{,}a_{21}a_{22}a_{23}a_{24}\ldots$

$0{,}a_{31}a_{32}a_{33}a_{34}\ldots$

$0{,}a_{41}a_{42}a_{43}a_{44}\ldots$

$\cdots\cdot$

$\cdots\cdot$

$\cdots\cdot$

Nun betrachten wir den Dezimalbruch $0{,}b_1b_2b_3b_4\ldots$ mit

$b_i := \begin{cases} 1 & \text{für } a_{ii} \neq 1 \\ 2 & \text{für } a_{ii} = 1 \end{cases}$. Dann ist $b_i \neq a_{ii}$ für alle $i \in \mathbb{N}$.

10.1 Definition

Es sei $A \subset \mathbb{R}$. Ein Element g von A heißt **größtes Element von A**, wenn $x \leq g$ für alle $x \in A$. Analog definiert man kleinstes Element von A.

Ein Objekt $a \in A$ sei nicht größtes Element von A. Was bedeutet das ?

10.2 Satz

Eine Menge $A \subset \mathbb{R}$ besitzt höchstens ein größtes (kleinstes) Element.
Wir dürfen daher von *dem* größten bzw. *dem* kleinsten Element von A sprechen (falls es existiert) und dafür ein Zeichen einführen: **max A** bzw. **min A**.

Eine Teilmenge von $\mathbb{R}$ braucht weder ein kleinstes noch ein größten Element zu haben, z. B. $\mathbb{R}$ oder $]0,1[$.

Beweis:

g_1, g_2 seien größte Elemente von A. Dann gilt:

$$\left.\begin{array}{l} x \leq g_1 \text{ für alle } x \in A, \text{ also insbesondere } g_2 \leq g_1. \\ x \leq g_2 \text{ für alle } x \in A, \text{ also insbesondere } g_1 \leq g_2. \end{array}\right\} \Rightarrow g_1 = g_2.$$

❑

10.3 Definition

Es sei $A \subset \mathbb{R}$. Dann heißt $s \in \mathbb{R}$ eine **obere Schranke** von A in $\mathbb{R}$, wenn gilt:

$$x \leq s \text{ für alle } x \in A.$$

Das kleinste Element der Menge der oberen Schranken von A heißt die **kleinste obere Schranke** oder das **Supremum** von A in $\mathbb{R}$. (Zeichen: sup A.)

Analog definiert man: eine **untere Schranke** von A; die **größte untere Schranke von A** oder das **Infimum** von A.

Besitzt eine Menge eine obere (untere) Schranke, so heißt diese Menge **nach oben (unten) beschränkt**. Eine Menge heißt **beschränkt**, wenn sie nach oben und unten beschränkt ist.

Das größte Element von A ist also eine obere Schranke von A, die zu A gehört.

Als kleinstes Element (der Menge der oberen Schranken) ist das Supremum - falls es existiert - eindeutig bestimmt.

Ist $\emptyset \subset \mathbb{R}$ beschränkt ? Besitzt $\emptyset \subset \mathbb{R}$ eine kleinste obere Schranke ?

Es sei $A \subset \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$, und $t \in \mathbb{R}$ sei nicht obere Schranke von A in $\mathbb{R}$. Was folgt daraus ?

Aufgabe: Eine Teilmenge A von $\mathbb{R}$ ist genau dann beschränkt, wenn es ein $M \in \mathbb{R}$, $M > 0$, gibt mit $|x| \leq M$ für alle $x \in A$.

10.4 Satz

$s \in \mathbb{R}$ ist genau dann das Supremum von $A \subset \mathbb{R}$, wenn gilt:

S1) Für alle $x \in A$ gilt $x \leq s$.

S2) Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es ein $x \in A$ mit $s - \varepsilon < x$.

Beweis:

S1 besagt: s ist eine obere Schranke von A.
S2 besagt: s ist die kleinste obere Schranke von A, denn für jedes $\varepsilon > 0$ ist $s - \varepsilon$ nicht obere Schranke von A.

❑

Wie lauten die S1, S2 entsprechenden Aussagen I1, I2 für das Infimum?

10.5 Vollständigkeitsaxiom (auch: Supremumsaxiom)
Für jede nichtleere, nach oben beschränkte Teilmenge von $\mathbb{R}$ existiert das Supremum.

In $(\mathbb{Q}^+, \leq)$ besitzt z. B. die Menge $A := \{x \mid x \in \mathbb{Q}^+ \wedge x^2 < 2\}$ kein Supremum. Ist s eine obere Schranke von A, also $s \in \mathbb{Q}^+$ und $s^2 > 2$, dann ist $\frac{2s+2}{s+2} \in \mathbb{Q}^+$ und es gilt:

$s \in \mathbb{Q}^+ \wedge s^2 > 2 \Rightarrow 2 + 2s < s^2 + 2s \Rightarrow \frac{2s+2}{s+2} < s$ und

$s \in \mathbb{Q}^+ \wedge s^2 > 2 \Rightarrow (2s+2)^2 > 2(s+2)^2 \Rightarrow \left(\frac{2s+2}{s+2}\right)^2 > 2.$

10.6 Satz
Für jede nichtleere, nach unten beschränkte Teilmenge von $\mathbb{R}$ existiert das Infimum.

Ist A nichtleer und nach unten beschränkt, so betrachte man die Menge $-A := \{-x \mid x \in A\}$, und überlege sich, daß $\sup(-A)$ existiert, und $\inf A = -\sup(-A)$ gilt.