Brückenkurs Mathematik
Olaf Parczyk

Wintersemester 2025/26
Felix Funk, Zeno Schätzle

Übungsblatt 3

Aufgaben für Mittwoch 1. Oktober 2025

Aufgabe 1. Entscheiden Sie, ob $A = B$ oder $A \neq B$ gilt:
(i) $A = \{1, 2, 3\}, \quad B = \{2, 1, 3\}$
(ii) $A = \{1, 1, 2\}, \quad B = \{2, 2, 1\}$
(iii) $A = \{x \mid x \in \mathbb{R} \wedge x \neq x\}, \quad B = \{x \mid x \in \mathbb{N} \wedge x < 0\}$

Aufgabe 2. Welche der folgenden Aussagen sind wahr?

(i) $\varnothing \in \varnothing$
(ii) $\varnothing \subseteq \varnothing$
(iii) $\varnothing \in \{\varnothing\}$
(iv) $\varnothing \subseteq \{\varnothing\}$
(v) $\{\varnothing\} \subseteq \varnothing$
(vi) $\{\varnothing\} \in \{\varnothing, \{\varnothing\}\}$
(vii) $\{\varnothing\} \subseteq \{\varnothing, \{\varnothing\}\}$
(viii) $\{\varnothing, \varnothing\} \subseteq \{\varnothing\}$
(ix) $\{\varnothing, \varnothing\} \in \{\{\varnothing\}\}$
(x) $\varnothing = \{\varnothing\}$
(xi) $\{\varnothing\} = \{\{\varnothing\}\}$

Aufgabe 3. Geben Sie Beispiele für Mengen A, B, C an, sodass:
(i) $A \in B$ und $A \subseteq B$
(ii) $A \in B \in C$ und $A \in C$
(iii) $A \in B \in C$ und $A \notin C$

Aufgabe 4. Seien A, B, C, X Mengen. Beweisen Sie:

(i) $A \cup B = B \cup A$
(ii) $(A \cap B) \cap C = A \cap B \cap C$
(iii) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
(iv) $X \setminus (A \cup B) = (X \setminus A) \cap (X \setminus B)$

Aufgabe 5. A, B, C seien Mengen. Beweisen oder widerlegen Sie:

(i) $A \cap (B \setminus C) = (A \cap B) \setminus (A \cap C)$
(ii) $((A \cap B) = B) \Leftrightarrow B \subseteq A$

Aufgabe 6. Untersuchen Sie die logischen Beziehungen folgender Aussagen:

(i) $A \subseteq B$
(ii) $A \cap B = A$
(iii) $A \cup B = B$
(iv) $A \cap B = \varnothing$
(v) $A = \varnothing \wedge B = \varnothing$
(vi) $A = \varnothing \vee B = \varnothing$
(vii) $A \setminus B = A$
(viii) $A \setminus B = B$
(ix) $A \setminus B = \varnothing$

Beweisen Sie die Äquivalenz der Aussagen (i) bis (iii).

Aufgabe 7. Seien A, B Mengen mit:

(i) $A \cap B = A \cup B$
(ii) $A \cap B = A \setminus B$
(iii) $A \cup B = A \setminus B$

Was kann man im Fall (i) über A und B, im Fall (ii) über A und im Fall (iii) über B aussagen?

Aufgabe 8. Es sei X eine Menge. Für $A \subseteq X$ definiere man das Komplement von A (bezüglich X) durch

$$\overline{A} = \{\, x \in X \mid \neg(x \in A) \,\}.$$

Zeigen Sie für $A \subseteq X,\ B \subseteq X$:

(i) $\overline{\varnothing} = X$, $\overline{X} = \varnothing$
(ii) $A \cap \overline{A} = \varnothing$, $A \cup \overline{A} = X$
(iii) $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$
(iv) $\overline{\overline{A}} = A$
(v) $A \subseteq B \;\Leftrightarrow\; \overline{B} \subseteq \overline{A}$
(vi) $A \cap \overline{B} = \varnothing \wedge B \cap \overline{A} = \varnothing \;\Rightarrow\; A = B$

Aufgabe 9. Gegeben seien Mengen A, B. Zeigen Sie, dass genau eine Menge X existiert mit:

$$A \cup B = A \cup X \quad \text{und} \quad A \cap X = \varnothing.$$