Brückenkurs Mathematik | Wintersemester 2025/26
Olaf Parczyk | Felix Funk, Zeno Schätzle

Übungsblatt 2

Aufgaben für Dienstag 30. September 2025

Aufgabe 1. Beweisen oder widerlegen Sie:
- (i) Die Summe zweier gerader Zahlen ist eine gerade Zahl.
- (ii) Das Quadrat einer geraden Zahl ist eine gerade Zahl.
- (iii) Die Summe zweier ungerader Zahlen ist ungerade.
- (iv) Das Produkt einer ungeraden Zahl mit einer geraden Zahl ist gerade.
- (v) Für jede natürliche Zahl n gilt: Ist n^2 gerade, so ist auch n gerade.
- (vi) Für jede natürliche Zahl n gilt: Ist n^2 ungerade, so ist auch n ungerade.

Aufgabe 2. Der Objektbereich enthalte genau die reellen Zahlen. Bilden Sie die Negation:
- (i) Es gibt ein x, so dass für alle y gilt $xy = y$.
- (ii) Zu jedem x gibt es ein y mit $xy > 1$.
- (iii) Es gibt kein x mit $x^2 = -1$.
- (iv) Zu jedem x gibt es ein y und ein z, so dass $y < x$ und $x < z$ gilt.

Aufgabe 3. Negieren Sie folgende Aussagen:
- (i) Jede natürliche Zahl, die durch 5 und 2 teilbar ist, ist durch 10 teilbar.
- (ii) Für jede natürliche Zahl gilt: Wenn sie durch 6 teilbar ist, dann ist sie durch 2 und 3 teilbar.
- (iii) Es gibt keine natürliche Zahl, die zugleich Primzahl und gerade ist.
- (iv) Jede natürliche Zahl, die gerade und größer als 3 ist, ist die Summe zweier Primzahlen.
- (v) Jede natürliche Zahl, die Summe zweier Primzahlen ist, ist gerade und größer als 3.
- (vi) Zu jeder natürlichen Zahl n gibt es eine Primzahl p, die größer als n ist.

Aufgabe 4. Formulieren Sie mit Hilfe von Quantoren unter Verwendung des Gleichheitszeichens die Aussage: Es gibt genau ein x mit $P(x)$.

Aufgabe 5. Formulieren Sie mit Hilfe von Quantoren unter Verwendung des Gleichheitszeichens die Aussage: Mindestens 3 verschiedene Elemente erfüllen $P(x)$.

Aufgabe 6. Eine Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist stetig in $x_0 \in \mathbb{R}$, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt, sodass für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt:

$$|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

Wann ist eine Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *unstetig* (d. h. nicht stetig) in $x_0 \in \mathbb{R}$?

Aufgabe 7. Eine Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist stetig in $x_0 \in \mathbb{R}$, wenn für jede Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, die gegen x_0 konvergiert, die Folge $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ gegen $f(x)$ konvergiert.

Wann ist eine Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *unstetig* (d. h. nicht stetig) in $x_0 \in \mathbb{R}$?

Aufgabe 8. Zwei Vektoren **a** und **b** sind *linear abhängig*, wenn es reelle Zahlen α, β gibt, die nicht beide gleich 0 sind, so dass $\alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{b} = \mathbf{0}$.

Wann sind zwei Vektoren a und b *linear unabhängig* (d. h. nicht linear abhängig)?