

Reinhard Diestel

# Graphentheorie

---

Elektronische Ausgabe 2000

© Springer-Verlag Heidelberg 1996, 2000

Dies ist eine vollständige elektronische Fassung des gleichnamigen Springer-Lehrbuchs in seiner zweiten Auflage (2000). Die Querverweise im Text sind aktive Links.

Die gedruckte Ausgabe des Buches (ISBN 3-540-67656-2; DM 59,-) ist im Buchhandel erhältlich, oder direkt von Springer über

<http://www.math.uni-hamburg.de/home/diestel/books/graphentheorie/>

Diese Webseite enthält zudem Verweise auf weiteres Material wie Folien zur Vorlesung nach dem Buch und laufend aktualisierte Korrekturen.

Zu diesem Buch gibt es eine englische Parallelausgabe, die bei Springer in der Reihe *Graduate Texts in Mathematics* (173) erschienen ist und einige zusätzliche Beweise enthält, aber nicht alle Übungsaufgaben der deutschen Ausgabe.

# Vorwort

---

Etwa zwanzig Jahre sind vergangen seit dem Erscheinen derjenigen Lehrbücher der Graphentheorie, die bis heute für die meisten Grundvorlesungen den inhaltlichen Rahmen setzen. Der hierin geschaffene Kanon hat die Graphentheorie geprägt, und er wird sie weiter prägen.

Gerade in der Graphentheorie jedoch hat sich in den letzten Jahren einiges getan. Die Vernetzung von Methoden und Resultaten hat zugenommen, es sind tiefe neue Sätze bewiesen worden, ja ganze Zweige sind neu entstanden: man denke etwa an den Brückenschlag zwischen ehemals so unversöhnlichen Invarianten wie chromatischer Zahl und Durchschnittsgrad durch den Begriff der Listenfärbungen, an den Einzug probabilistischer Methoden und des Regularitätslemmas in die extremale Graphentheorie oder die Ramseytheorie, oder an die Theorie der Baumzerlegungen und Minoren mit ihren Verbindungen zur topologischen Graphentheorie – um nur einige Entwicklungen anzusprechen.

Die Zeit scheint daher reif für eine Neubesinnung: *was sind heute die Grundpfeiler der Graphentheorie, die einer einführenden und doch in die Tiefe zielenden Vorlesung das Fundament geben können?*

Dieses Buch möchte Material für eine solche Vorlesung anbieten. Ich habe dabei den Spagat versucht, die zur Orientierung notwendige Schlantheit und Konzentration auf Wesentliches mit so ausführlicher Darstellung im Detail zu verbinden, daß sowohl die wichtigsten übergreifenden Ideen als auch jeder einzelne Beweis dem Selbststudium und einer unabhängigen Vor- oder Nachbereitung zugänglich werden.

Mein Hauptanliegen war es also, die mir als besonders grundlegend erscheinenden Resultate und Methoden möglichst genau darzustellen und zu illustrieren. Fast jedes Kapitel enthält dementsprechend neben den Grundtatsachen seines Gebietes mindestens einen anspruchsvolleren Satz, dessen Beweis jedoch genauso im Detail dargestellt ist wie die kürzeren Beweise. Nicht ohne Unbehagen bemerkte ich dann bald, daß diese etwas anspruchsvolleren Beweise im Druck zuweilen in der Tat recht

lang aussehen! Ich hoffe jedoch, daß gerade die relative Ausführlichkeit ihrer Darstellung letztlich die Lesezeit minimiert. . .

Entsprechend dem genannten Doppelziel bin ich bei der Auswahl des dargestellten Materials recht restriktiv gewesen: im Zweifelsfall habe ich lieber für einen zentralen Satz zwei oder drei verschiedenartige Beweise dargestellt als zwei oder drei ähnliche Sätze mit ähnlichen Beweisen aneinanderzureihen. Besonders in dieser Hinsicht ist der Text also bewußt als einführendes Lehrbuch geschrieben, nicht als Monographie mit dem Anspruch einer umfassenden Darstellung und Einordnung des vorhandenen Materials.

Der Text ist einerseits unmittelbar verwendbar als Skriptum einer Vorlesung, läßt durch seine Konzentration in der Stoffwahl jedoch andererseits dem Vorlesenden bewußt Raum zur weiteren Ausgestaltung. Eine denkbare Alternative zu kapitelweisem Vorgehen ist es, in einer ersten Vorlesung nach Kapitel 0 die jeweils einfacheren Abschnitte der Folgekapitel durchzunehmen, ergänzt je nach Hörerkreis vielleicht durch Algorithmen, und die mathematisch tieferen Sätze einer weiterführenden Vorlesung vorzubehalten.

Die zum Verständnis des Textes nötigen Vorkenntnisse beschränken sich auf einige Grundbegriffe aus der linearen Algebra für Kapitel 0.9, aus der Topologie (wie man sie im Analysis-Grundstudium kennenlernt) für Kapitel 3, und aus der Wahrscheinlichkeitstheorie für Kapitel 9. (Genau genommen wird dort sogar nur der Begriff des Wahrscheinlichkeitsraumes selbst vorausgesetzt; alle anderen Begriffe und Hilfsmittel werden noch einmal knapp aber explizit eingeführt.)

Die Bezifferung der Sätze, Propositionen, Lemmas und Korollare erfolgt einheitlich im ganzen Buch durch drei Ziffern: Korollar 1.2.3 etwa findet sich in Kapitel 1, Abschnitt 2, und es folgt auf Satz 1.2.2. Mit dem Prädikat "Satz" bin ich sicher etwas sparsamer umgegangen, als es üblich ist – in der Absicht, zur besseren Orientierung die besonders zentralen Resultate entsprechend hervorzuheben. In den Notizen am Ende eines jeden Kapitels finden sich Hinweise auf weitere Literatur, darunter auf die Originalquellen aller Sätze, deren Quellenangabe nicht in einer der zitierten Monographien oder Übersichtsartikel zu finden ist. Das Symbol  $\square$  bezeichnet meist das Ende eines Beweises. Steht es direkt im Anschluß an die hervorgehobene Aussage selbst, so soll es andeuten, daß der Beweis dieser Aussage nach dem zuvor Gesagten klar sei – und ist eine Aufforderung, dies zu überprüfen! Tiefere Sätze, die ohne Beweis zitiert werden, sind entsprechend durch das Fehlen des  $\square$ -Symbols als solche zu erkennen.

Um die praktische Vorbereitung einer Vorlesung, die auf diesem Buch oder Teilen daraus aufbaut, zu erleichtern, sind zu Beginn eines jeden Beweises in der Randspalte die Nummern derjenigen Resultate aufgeführt, die in den Beweis eingehen und daher vorher behandelt oder zumindest erwähnt sein sollten. Diese Nummern sind in runde Klammern

mern gesetzt: der Verweis (3.1.2) im Rand neben dem Beweis von Satz 3.3.2 etwa besagt, daß das Lemma 3.1.2 in diesem Beweis verwendet wird. Entsprechend findet sich bereits in der Randspalte neben Lemma 3.1.2 in eckigen Klammern der Hinweis [3.3.2] darauf, daß dieses Lemma einmal im Beweis von Satz 3.3.2 Verwendung finden wird. Diese Verweise in den Randspalten berücksichtigen nur Abhängigkeiten zwischen Resultaten aus verschiedenen Abschnitten (sowohl desselben Kapitels als auch verschiedener Kapitel). Verweise innerhalb eines Abschnitts gibt es nicht; jeder Abschnitt bildet von der Darstellung her eine Einheit und sollte entsprechend von vorne gelesen werden. Wem all dies zu aufwendig ist, der kann sich einfach an die natürliche Reihenfolge der Kapitel und ihrer Abschnitte halten: mit zwei – deutlich im Text gekennzeichneten – Ausnahmen greifen Beweise stets nur auf früher behandelte Resultate zurück.

Wer ein Lehrbuch schreibt, muß sich für eine Terminologie entscheiden – und setzt damit die Freundschaft all jener aufs Spiel, deren Herz an einer anderen hängt. Ich habe lange überlegt, ob ich überhaupt eine deutsche Fassung dieses Buches schreiben sollte. Dies zu tun, dann aber die wohletablierte deutsche Terminologie weitgehend durch Anglizismen zu ersetzen (wie es im lockeren deutschen Sprachgebrauch ja durchaus verbreitet ist), erschien mir jedoch als absurd – und das Studium eines Anfängers auch nicht gerade erleichternd. Der Text folgt daher im wesentlichen der auf König und Wagner zurückgehenden deutschen Begriffsbildung;<sup>1</sup> Andersdenkende bitte ich um Nachsicht! Um dennoch ein wenig beim Brückenschlag zur englischen Terminologie zu helfen, gibt das Hauptregister am Ende des Buches zu jedem deutschen Fachwort in Klammern das in der englischen Fassung dieses Buches verwendete Wort, und der englisch-deutsche Index gibt für die gebräuchlichsten englischen Ausdrücke neben der Textstelle ihrer Definition auch ihre deutsche Entsprechung an.

Fast jedes Buch enthält Fehler, und dieses Buch wird kaum eine Ausnahme sein. Alle, denen verbliebene Fehler oder Verbesserungsmöglichkeiten auffallen, bitte ich herzlich, sie mir mitzuteilen: entweder direkt, oder über

<http://www.springer.de/catalog/html-files/deutsch/math/3540609180.html>

Dies ist die zu diesem Buch gehörige Web-Seite bei Springer: dort wird es neben der Verlagsinformation einen *link* geben zu einer von mir unterhaltene Seite, die unter anderem notwendig gewordene Korrekturen in möglichst lesbarer Form bereitstellen soll.

An einem Lehrbuch ist fast nichts wirklich neu; selbst Stil und Materialauswahl sind unumgänglich durch Vorbilder geprägt. Das Lehrbuch,

---

<sup>1</sup> mehr dazu in den Notizen zu Kapitel 0

welches mich geprägt hat wie kein anderes, ist jenes am Anfang dieses Vorworts bereits mit angedeutete Springer-Buch von B. Bollobás: in der Vorlesung seines Autors, die jenes Buch nachzeichnet, habe ich meine erste Graphentheorie gelernt. Alle, die jenes Buch kennen, werden seinen Einfluß hier spüren – bei allen Unterschieden in Stoff und Darbietung.

Weiter geht mein Dank an alle, die mir durch Rat bei der Stoffauswahl, durch Literaturhinweise, oder bei der Fehlersuche geholfen haben. Besonders profitiert habe ich von der Hilfe von N. Alon, Th. Andreae, W.A. Deuber, R. Halin, M. Hintz, A. Huck, R. Klimmek, D. Kühn, L. Lovász, W. Mader, J. Nešetřil, P. Niemyer, H.J. Prömel, A. Schrijver, A.D. Scott, D. Seese, P.D. Seymour, A. Steger, M. Stiebitz, Th. Szücs (für die Abbildungen), R. Thomas, C. Thomassen, B. Toft, W. Vogler, K. Waas und G.M. Ziegler. Ganz besonders danken aber möchte ich meinem Mitarbeiter und Kollegen Tommy R. Jensen: er hat die Entstehung dieses Buches kritisch begleitet von der Konzeption der am schwierigsten darzustellenden Beweise bis hin zu all den fehlenden Kommas, er hat mich viel über Färbungen gelehrt und alles, was ich über  $k$ -Flüsse weiß, und er hat bei all diesem nie seinen Gleichmut verloren, wenn ich mich einmal mehr entschied, einen von ihm gefundenen Fehler lieber großzügig zu ignorieren als durch seine Korrektur den vermeintlichen Textfluß zu hemmen. . .

So wünsche ich allen Lesern viel Freude an der hier dargestellten Mathematik, und ich selbst freue mich auf alle kritischen Kommentare.

RD, im Juni 1996

### Zur zweiten Auflage:

Die vorliegende zweite Auflage enthält neben Korrekturen, Glättungen im Text und einer Reihe von Vereinfachungen in den Beweisen einige Zusätze.

So bietet das Zusammenhangskapitel jetzt zwei wunderschöne und ganz kurze neue Beweise des Menger-Satzes von Göring (bzw. Böhme, Göring und Harant). Im ersten Kapitel gibt es eine formale Einführung normaler Spannbäume – den Informatikern als *Tiefensuchbäume* bekannt – sowie der durch Spannbäume induzierten Baumordnung auf der Eckenmenge eines Graphen. Das Paarungskapitel enthält zusätzlich einen direkten Beweis des Satzes von Tutte über 1-Faktoren, das Kapitel über Teilstrukturen einen Beweis von Lemma 6.5.3, der die Anwendung des Regularitätslemmas besonders schön illustriert, und das Minorenkapitel eine noch ausführlichere Behandlung von Baumzerlegungen und Baumweite.

Am deutlichsten verändert hat sich in der Tat das Minorenkapitel: unter anderem bietet es jetzt einen kurzen Beweis des Dualitätssatzes

zur Baumweite – einen Beweis, der nur in diesem Buch zu finden ist (und in der englischen Parallelausgabe).

Neu ist schließlich der Anhang mit Lösungshinweisen zu den Übungsaufgaben. Diese sind im wesentlichen von Tommy Jensen erarbeitet worden, dem ich dafür herzlich danke. Wer sich gleich nach dem Lesen einer Aufgabe den entsprechenden Hinweis anschaut, wird diesen vielleicht nicht immer besonders erhellend finden. Das ist durchaus so gemeint: Sinn der Hinweise ist natürlich nicht, die eigene Beschäftigung mit den Aufgaben zu ersetzen, sondern demjenigen auf die richtige Spur zu helfen, der die Fragestellung bereits verstanden und sich eine zeitlang mit der Aufgabe beschäftigt hat, aber vielleicht einem falschen Ansatz gefolgt ist. Insbesondere sind die Aufgaben auch mit den Hinweisen für die Übungsgruppenarbeit parallel zur Vorlesung geeignet.

Ergänzend sei noch auf die englische Ausgabe des Buchs verwiesen (Springer GTM 173). Dort finden sich unter anderem ein neuer Beweis (von Gasparian) des Satzes über perfekte Graphen von Lovász, ein Beweis des Regularitätslemmas, sowie in der zweiten Auflage ein kurzer Beweis (8 Seiten) des fundamentalen Satzes 10.4.3 von Robertson & Seymour, daß hohe Baumweite jeden plättbaren Graphen als Minor erzwingt.

Die Web-Seiten dieses Buchs sind mir nach Hamburg gefolgt und jetzt in

<http://www.math.uni-hamburg.de/home/diestel/books/graphentheorie/>

beheimatet. Dort finden sich, wie bisher, auch die aktuellen Korrekturen – übrigens nicht in ermüdendem Logbuch-Format sondern schön lesbar als Randbemerkungen im PDF-Bild der Originalseite.

Mein Dank geht an alle, die durch Anregungen und Kritik diese zweite Auflage haben verbessern helfen. Ich bleibe auch weiterhin an Verbesserungsvorschlägen und Korrekturen interessiert!

RD, im Juli 2000



# Inhalt

---

Vorwort .....	vii
0. Grundbegriffe .....	1
0.1 Graphen .....	2
0.2 Der Grad einer Ecke .....	5
0.3 Wege und Kreise .....	7
0.4 Zusammenhang .....	10
0.5 Bäume und Wälder .....	13
0.6 Bipartite Graphen .....	15
0.7 Kontraktion und Minoren .....	17
0.8 Eulersche Graphen .....	20
0.9 Algebraisches .....	21
0.10 Verwandte Begriffsbildungen .....	26
Übungen .....	28
Notizen .....	30
1. Paarungen .....	31
1.1 Paarungen in bipartiten Graphen .....	31
1.2 Paarungen in allgemeinen Graphen .....	36
1.3 Überdeckungen durch disjunkte Wege .....	41
Übungen .....	43
Notizen .....	44



2. Zusammenhang .....	45
2.1 2-zusammenhängende Graphen und Untergraphen .....	46
2.2 Die Struktur 3-zusammenhängender Graphen .....	47
2.3 Der Satz von Menger .....	52
2.4 Der Satz von Mader .....	58
2.5 Kantendisjunkte Spannbäume .....	60
2.6 Verbindungswege gegebener Endecken .....	63
Übungen .....	65
Notizen .....	68
3. Graphen in der Ebene .....	71
3.1 Topologische Voraussetzungen .....	71
3.2 Ebene Graphen .....	74
3.3 Zeichnungen .....	80
3.4 Plättbarkeit: der Satz von Kuratowski .....	84
3.5 Algebraische Plättbarkeitskriterien .....	89
3.6 Plättbarkeit und Dualität .....	91
Übungen .....	94
Notizen .....	97
4. Färbungen .....	99
4.1 Landkarten und das Färben ebener Graphen .....	100
4.2 Eckenfärbungen .....	102
4.3 Kantenfärbungen .....	107
4.4 Listenfärbungen .....	109
4.5 Perfekte Graphen .....	115
Übungen .....	120
Notizen .....	124
5. Flüsse .....	127
5.1 Flüsse und Rundflüsse .....	128
5.2 Netzwerke .....	129
5.3 Gruppenwertige Flüsse .....	133
5.4 $k$ -Flüsse für kleine $k$ .....	138
5.5 Flüsse und Färbungen .....	140
5.6 Die Tutte'schen Flußvermutungen .....	145
Übungen .....	149
Notizen .....	151

6. Teilstrukturen .....	153
6.1 Teilgraphen .....	153
6.2 Topologische Minoren .....	158
6.3 Minoren .....	167
6.4 Die Hadwiger-Vermutung .....	169
6.5 Szemerédi's Regularitätslemma .....	173
Übungen .....	179
Notizen .....	182
7. Ramseytheorie für Graphen .....	185
7.1 Der Satz von Ramsey .....	186
7.2 Ramseyzahlen von Graphen .....	190
7.3 Ramsey induziert .....	193
7.4 Ramseysätze und Zusammenhang .....	204
Übungen .....	206
Notizen .....	207
8. Hamiltonkreise .....	211
8.1 Einfache hinreichende Bedingungen .....	211
8.2 Hamiltonkreise und Gradsequenz .....	214
8.3 Hamiltonkreise im Quadrat eines Graphen .....	216
Übungen .....	225
Notizen .....	227
9. Zufallsgraphen .....	229
9.1 Der Begriff des Zufallsgraphen .....	230
9.2 Die probabilistische Methode .....	235
9.3 Eigenschaften fast aller Graphen .....	238
9.4 Schwellenfunktionen und zweite Momente .....	242
Übungen .....	248
Notizen .....	249

10. Minoren, Bäume und WQO .....	251
10.1 Wohlquasiordnung .....	252
10.2 Bäume: der Satz von Kruskal .....	253
10.3 Baumzerlegungen .....	255
10.4 Baumweite und verbotene Minoren .....	263
10.5 Der Minorensatz .....	270
Übungen .....	274
Notizen .....	277
Lösungshinweise für alle Übungen .....	281
Register .....	297
Englisch-deutscher Index .....	309
Symbolverzeichnis .....	313

In diesem Kapitel stellen wir in relativ kompakter Form die in der Graphentheorie üblichen Grundbegriffe zusammen. Glücklicherweise sind fast all diese Begriffe und ihre Bezeichnungen anschaulich und ganz leicht zu merken; schwierigere Begriffsbildungen, die erst vor dem Hintergrund gewisser Sachverhalte natürlich werden, führen wir dann jeweils später ein.

Bereits ab Abschnitt 0.2 werden wir schon laufend kleinere aber wichtige Tatsachen beweisen, um so die neuen Worthülsen gleich mit etwas Leben zu erfüllen. Häufig wird uns dabei die Frage leiten, wie verschiedene soeben definierte Grapheninvarianten voneinander abhängen: diese Frage zieht sich wie ein roter Faden durch wesentliche Teile der Graphentheorie, und es ist gut, von Anfang an ein Gespür dafür zu entwickeln.

Die Menge der natürlichen Zahlen, einschließlich der Null, bezeichnen wir mit  $\mathbb{N}$ . Mit  $\mathbb{Z}_n$  bezeichnen wir den Restklassenring  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$  der ganzen Zahlen modulo  $n$ ; seine Elemente schreiben wir kurz als  $\bar{i} := i + n\mathbb{Z}$ . Ist  $x$  eine reelle Zahl, so bezeichnet  $\lfloor x \rfloor$  die größte ganze Zahl  $\leq x$ , und  $\lceil x \rceil$  die kleinste ganze Zahl  $\geq x$ . Mit  $\log$  bezeichnete Logarithmen haben die Basis 2. Eine Menge  $\{A_1, \dots, A_k\}$  disjunkter Teilmengen einer Menge  $A$  ist eine *Partition* von  $A$ , wenn  $A = \bigcup_{i=1}^k A_i$  ist und  $A_i \neq \emptyset$  für jedes  $i$ . Mit  $[A]^k$  bezeichnen wir die Menge aller  $k$ -elementigen Teilmengen von  $A$ . Wir verwenden den Ausdruck “entweder ... oder” synonym mit “oder”, also im einschließenden Sinne; die längere Version dient lediglich dem Ziel größerer syntaktischer Klarheit.

 $\mathbb{N}$  $\mathbb{Z}_n$  $\lfloor x \rfloor, \lceil x \rceil$  $\log$ *Partition* $[A]^k$

## 0.1 Graphen

*Graph* Ein *Graph* ist ein Paar  $G = (V, E)$  disjunkter Mengen mit  $E \subseteq [V]^2$ ; die Elemente von  $E$  sind also 2-elementige Teilmengen von  $V$ . Die Elemente von  $V$  nennt man die *Ecken* (oder *Knoten*) des Graphen  $G$ , die Elemente von  $E$  seine *Kanten*. Bildlich kann man  $G$  darstellen, indem man seine Ecken als Punkte zeichnet und zwei dieser Punkte immer dann durch eine Linie verbindet, wenn die entsprechenden Ecken eine Kante sind (Abb. 0.1.1). Wie man diese Punkte und Linien zeichnet, ob gerade oder geschwungen, disjunkt oder überkreuz, ist eine Frage der Zweckmäßigkeit und der Ästhetik: die formale Definition eines Graphen ist jedenfalls von seiner bildlichen Darstellung unabhängig.

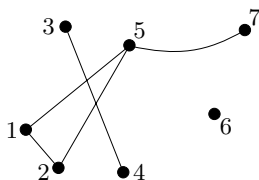


Abb. 0.1.1. Der Graph auf  $V = \{1, \dots, 7\}$  mit der Kantenmenge  $E = \{\{1, 2\}, \{1, 5\}, \{2, 5\}, \{3, 4\}, \{5, 7\}\}$

*auf* Wir sagen,  $G = (V, E)$  sei ein Graph *auf*  $V$ . Für  $V$  schreiben wir auch  $V(G)$ , für  $E$  auch  $E(G)$ . Je nach Zusammenhang identifizieren wir gelegentlich (um flüssigerer Darstellung willen)  $G$  mit  $V$  oder mit  $E$ ; so schreiben wir etwa statt  $v \in V(G)$  oder  $e \in E(G)$  auch kurz  $v \in G$  oder  $e \in G$ . Der Graph  $G$  heißt *endlich* bzw. *unendlich* je nachdem, ob  $V$  endlich oder unendlich ist; alle Graphen in diesem Buch sind, soweit nicht anders gesagt, endlich. Wir setzen dann häufig  $|V| =: n$  und  $|E| =: m$ . Statt  $|V(G)|$  schreiben wir auch  $|G|$  und nennen  $|G|$  die *Ordnung* von  $G$ ; statt  $|E(G)|$  schreiben wir  $\|G\|$ .

*Ordnung*  
 $|G|, \|G\|$   
 $\emptyset$   
*trivialer*  
*Graph*

Den *leeren* Graphen  $(\emptyset, \emptyset)$  bezeichnen wir kurz mit  $\emptyset$ . Einen Graphen der Ordnung 0 oder 1 nennen wir *trivial*. Manchmal, etwa bei Induktionsanfängen, kommen triviale Graphen gelegen; anderswo bilden sie lästige Ausnahmen. Um die Darstellung der wesentlichen Aussagen nicht unnötig zu verkomplizieren, werden wir solche Ausnahmen, insbesondere für den leeren Graphen  $\emptyset$ , in der Regel nicht explizit nennen sondern großzügig ignorieren.

*inzident* Eine Ecke  $v$  heißt mit einer Kante  $e$  *inzident*, wenn  $v \in e$  gilt. Die beiden mit einer Kante  $e$  inzidenten Ecken sind ihre *Endecken*, und  $e$  *verbindet* diese Ecken. Für eine Kante  $\{x, y\}$  schreiben wir kürzer auch  $xy$  (oder  $yx$ ). Ist  $x \in X \subseteq V$  und  $y \in Y \subseteq V$ , so ist  $xy$  eine  $X$ - $Y$ -Kante. Die Menge aller  $X$ - $Y$ -Kanten aus  $E$  bezeichnen wir mit  $E(X, Y)$ ; für  $E(\{x\}, Y)$  und  $E(X, \{y\})$  schreiben wir kurz  $E(x, Y)$  und  $E(X, y)$ .

$E(X, Y)$

Die Menge  $E(v, V \setminus \{v\})$  aller mit  $v$  inzidenten Kanten bezeichnen wir mit  $E(v)$ .

 $E(v)$ 

Zwei Ecken  $x, y$  von  $G$  sind (*adjazent* oder) *benachbart* in  $G$  und heißen *Nachbarn* voneinander, wenn  $xy \in E(G)$  ist. Zwei Kanten  $e \neq f$  sind *benachbart*, falls sie eine gemeinsame Endecke haben. Sind je zwei Ecken von  $G$  benachbart, so heißt  $G$  *vollständig*. Einen vollständigen Graphen auf  $n$  Ecken bezeichnen wir mit  $K^n$ ; ein  $K^3$  ist ein *Dreieck*. Die größte Mächtigkeit einer Menge paarweise benachbarter Ecken in  $G$  ist die *Cliquenzahl*  $\omega(G)$  von  $G$ .

Nachbarn

vollständig

 $K^n$  $\omega(G)$ 

Paarweise nicht benachbarte Ecken oder Kanten von  $G$  nennen wir auch *unabhängig*. Formaler: eine Teilmenge von  $V$  oder von  $E$  heißt (*stabil* oder) *unabhängig*, wenn ihre Elemente paarweise nicht benachbart sind. Die größte Mächtigkeit einer unabhängigen Eckenmenge in  $G$  ist die (*Stabilitätszahl* oder) *Unabhängigkeitszahl*  $\alpha(G)$  von  $G$ .

unabhängig

 $\alpha(G)$ 

Im folgenden sei  $G' = (V', E')$  ein weiterer Graph.  $G$  heißt *isomorph* zu  $G'$ , geschrieben  $G \simeq G'$ , wenn es eine Bijektion  $\varphi: V \rightarrow V'$  gibt mit  $xy \in E \Leftrightarrow \varphi(x)\varphi(y) \in E'$  für alle  $x, y \in V$ . Eine solche Abbildung  $\varphi$  ist ein *Isomorphismus*; ist  $G = G'$ , so nennt man  $\varphi$  einen *Automorphismus* von  $G$ . Wir unterscheiden meist nicht zwischen isomorphen Graphen, schreiben also oft  $G = G'$  statt  $G \simeq G'$ , sprechen von “dem” vollständigen Graphen auf 17 Ecken usw. Eine Funktion mit Graphen als Argumenten, die isomorphen Graphen gleiche Werte zuordnet, nennt man eine (Graphen-) *Invariante*. Eckenzahl und Kantenzahl sind einfache Grapheninvarianten,  $\alpha$  und  $\omega$  sind zwei weitere.

isomorph

 $\simeq$ 

Invariante

Wir setzen  $G \cup G' := (V \cup V', E \cup E')$  und  $G \cap G' := (V \cap V', E \cap E')$ . Ist  $G \cap G' = \emptyset$ , so heißen  $G$  und  $G'$  *disjunkt*. Gilt  $V' \subseteq V$  und  $E' \subseteq E$ , so ist  $G'$  ein *Teilgraph* von  $G$  (und  $G$  ein *Obergraph* von  $G'$ ), geschrieben  $G' \subseteq G$ . Informell sagen wir häufig einfach, daß  $G$  den Graphen  $G'$  *enthält*. Der Teilgraph  $G'$  heißt *induziert* oder *aufgespannt* (von  $V'$  in  $G$ ), wenn er *alle* Kanten  $xy \in E$  mit  $x, y \in V'$  enthält. Einen solchen induzierten Teilgraphen nennen wir einen *Untergraphen*. Wir bezeichnen

 $G \cap G'$ 

Teilgraph

 $G' \subseteq G$ 

induziert

Untergraph

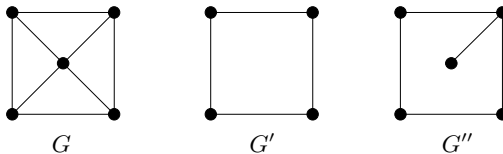


Abb. 0.1.2. Ein Graph  $G$  mit Teilgraphen  $G'$  und  $G''$ :  
 $G'$  ist Untergraph von  $G$ ,  $G''$  ist es nicht.

$G'$  dann auch mit  $G[V']$ ; dies ist also der Graph auf  $V'$ , dessen Kanten genau die Kanten von  $G$  sind, deren Endecken beide in  $V'$  liegen. Ist  $G'$  ein Teilgraph von  $G$  (aber nicht notwendig ein Untergraph), so schreiben wir statt  $G[V(G')]$  auch kürzer  $G[G']$ . Umgekehrt nennt man  $G' \subseteq G$

 $G[V']$

auf-  
spannend

einen *aufspannenden* Teilgraphen von  $G$ , wenn  $V'$  ganz  $G$  aufspannt, d.h. wenn  $V' = V$  ist.

$G - U$

Ist  $U$  eine beliebige Menge (meist eine Teilmenge von  $V$ ), so schreiben wir  $G - U$  statt  $G[V \setminus U]$ ; mit anderen Worten,  $G - U$  entsteht aus  $G$  durch *Löschen* aller Ecken in  $U \cap V$  und aller mit diesen Ecken inzidenten Kanten. Ist  $U = \{v\}$  einelementig, so schreiben wir

$G - H$

statt  $G - v$  statt  $G - \{v\}$ . Ist  $H$  ein weiterer Graph, so schreiben wir statt

$G - F$

$G - V(H)$  kurz  $G - H$ . Ist  $F$  irgendeine Teilmenge von  $[V]^2$ , so setzen wir

$G + F$

$G - F := (V, E \setminus F)$  und  $G + F := (V, E \cup F)$ ; statt  $G - \{e\}$  und

kanten-  
maximal

$G + \{e\}$  schreiben wir  $G - e$  und  $G + e$ . Wir nennen  $G$  *kantenmaximal*

mit einer gegebenen Grapheneigenschaft, wenn  $G$  selbst die Eigenschaft hat, aber kein  $G + xy$  für nicht benachbarte Ecken  $x, y \in G$ .

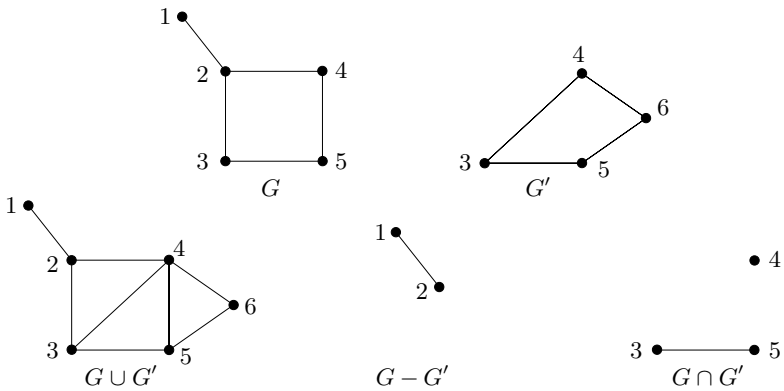


Abb. 0.1.3. Vereinigung, Differenz, Schnitt; die Ecken 2,3,4 spannen in  $G \cup G'$  ein Dreieck auf, nicht aber in  $G$

minimal  
maximal

Sagen wir allgemeiner, ein gegebener Graph sei *minimal* oder *maximal* mit irgendeiner Eigenschaft, so meinen wir (wenn nichts anderes gesagt ist) die Minimalität oder Maximalität hinsichtlich der Teilgraphenbeziehung. Häufig werden wir auch von minimalen oder maximalen Ecken- oder Kantenmengen sprechen; hier ist die zugrundeliegende Relation natürlich einfach die Teilmengenbeziehung.

$G * G'$

Sind  $G$  und  $G'$  disjunkt, so bezeichnet  $G * G'$  den Graphen auf  $V \cup V'$  mit der Kantenmenge  $E \cup E' \cup \{vv' \mid v \in V \text{ und } v' \in V'\}$ . Das *Komplement*  $\bar{G}$  von  $G$  ist der Graph auf  $V$ , in dem zwei Ecken genau dann benachbart sind, wenn sie es in  $G$  nicht sind. Der *Kantengraph*  $L(G)$  von  $G$  ist der Graph auf  $E$ , in dem  $x, y \in E$  genau dann als Ecken benachbart sind, wenn sie es als Kanten in  $G$  sind.

Komple-  
ment  $\bar{G}$

Kanten-  
graph  $L(G)$

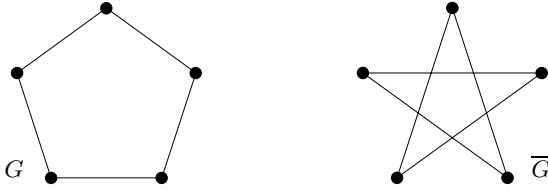


Abb. 0.1.4. Ein Graph, der zu seinem Komplement isomorph ist

## 0.2 Der Grad einer Ecke

Es sei  $G = (V, E)$  ein (nicht leerer) Graph. Die Menge der Nachbarn einer Ecke  $v$  bezeichnen wir mit  $N_G(v)$ , oder kurz mit  $N(v)$ .<sup>1</sup> Allgemeiner bezeichnet  $N(U)$  für  $U \subseteq V$  die Menge aller Nachbarn in  $V \setminus U$  von Ecken aus  $U$ .

$N(v)$

Der *Grad* (oder die *Valenz*)  $d_G(v) = d(v)$  einer Ecke  $v$  ist die Anzahl  $|E(v)|$  der mit  $v$  inzidenten Kanten; nach unserer Definition eines Graphen<sup>2</sup> ist dies gerade die Anzahl der Nachbarn von  $v$ . Eine Ecke vom Grad 0 ist *isoliert*. Die Zahl  $\delta(G) := \min \{ d(v) \mid v \in V \}$  heißt *Minimalgrad* von  $G$ , und  $\Delta(G) := \max \{ d(v) \mid v \in V \}$  ist sein *Maximalgrad*. Hat jede Ecke von  $G$  den gleichen Grad  $k$ , so heißt  $G$  *regulär*, oder *k-regulär*. Einen 3-regulären Graphen nennt man auch *kubisch*.

Grad  $d(v)$

*isoliert*

$\delta(G), \Delta(G)$

regulär

kubisch

Die Zahl

$$d(G) := \sum_{v \in V} d(v) / |V|$$

$d(G)$

nennt man den *Durchschnittsgrad* von  $G$ . Offenbar gilt

*Durchschnittsgrad*

$$\delta(G) \leq d(G) \leq \Delta(G).$$

Der Durchschnittsgrad mißt global, was lokal durch die einzelnen Eckengrade ausgedrückt wird: die ungefähre Anzahl der Kanten von  $G$  pro Ecke. Manchmal ist es natürlich, dieses Verhältnis direkt auszudrücken; wir schreiben dazu  $\varepsilon(G) := |E|/|V|$ .

$\varepsilon(G)$

Natürlich sind die Größen  $d$  und  $\varepsilon$  lediglich zwei Seiten derselben Medaille. Zählen wir nämlich alle Eckengrade in  $G$  zusammen, so zählen wir dabei jede Kante  $vw$  genau zweimal: einmal von  $v$  und einmal von  $w$  aus. Es gilt also

$$|E| = \frac{1}{2} \sum_{v \in V} d(v) = \frac{1}{2} d(G) \cdot |V|,$$

<sup>1</sup> Auch bei anderen Bezeichnungen, die den Bezugsgraphen als Index angeben, lassen wir diesen Index häufig fort, wenn der Bezug klar ist.

<sup>2</sup> nicht jedoch bei Multigraphen; vgl. Abschnitt 0.10



und somit

$$\varepsilon(G) = \frac{1}{2}d(G).$$

[8.3.3] **Proposition 0.2.1.** *Die Anzahl der Ecken ungeraden Grades in  $G$  ist stets gerade.*

*Beweis.* Wegen  $|E| = \frac{1}{2} \sum_{v \in V} d(v)$  ist  $\sum d(v)$  eine gerade Zahl.  $\square$

Hat ein Graph einen hohen Minimalgrad, lokal betrachtet also überall viele Kanten, so hat er auch global gesehen viele Kanten (gemessen an seiner Eckenzahl):  $\varepsilon(G) = \frac{1}{2}d(G) \geq \frac{1}{2}\delta(G)$ . Umgekehrt erzwingt ein hoher Durchschnittsgrad natürlich keinen hohen Minimalgrad: auch global gesehen "dichte" Graphen können etwa isolierte Ecken haben. Jeder Graph enthält jedoch einen Teilgraphen, dessen Durchschnittsgrad nicht kleiner ist und dessen Minimalgrad mehr als die Hälfte seines Durchschnittsgrades beträgt:

[2.6.1] **Proposition 0.2.2.** *Jeder Graph  $G$  mit mindestens einer Kante hat einen Teilgraphen  $H$  mit  $\delta(H) > \varepsilon(H) \geq \varepsilon(G)$ .*

*Beweis.* Um  $H$  aus  $G$  zu konstruieren, wollen wir sukzessive Ecken geringen Grades löschen, bis nur noch Ecken hohen Grades übrig sind. Bis zu welchem Grad  $d(v)$  können wir eine Ecke  $v$  löschen, ohne daß  $\varepsilon$  sinkt? Offenbar bis höchstens  $d(v) = \varepsilon$ : dann löschen wir genau eine Ecke und mit ihr höchstens  $\varepsilon$  Kanten, d.h. das Verhältnis  $\varepsilon$  der Kanten zur Eckenzahl wird nicht sinken.

Formal konstruieren wir, ausgehend von  $G =: G_0$ , eine Folge  $G_0 \supseteq G_1 \supseteq \dots$  von Untergraphen von  $G$  wie folgt. Hat  $G_i$  eine Ecke  $v_i$  vom Grad  $d(v_i) \leq \varepsilon(G_i)$ , so setzen wir  $G_{i+1} := G_i - v_i$ ; hat  $G_i$  keine solche Ecke, so beenden wir die Folge mit diesem  $G_i$  und setzen  $G_i =: H$ . Nach Wahl von  $v_i$  gilt  $\varepsilon(G_{i+1}) \geq \varepsilon(G_i)$  für alle  $i$ , und damit insbesondere  $\varepsilon(H) \geq \varepsilon(G)$ .

Mit welchem  $G_i = H$  kann unsere Folge von Untergraphen enden? Wegen  $\varepsilon(K^1) = 0 < \varepsilon(G)$  tritt  $K^1$  nicht unter den  $G_i$  auf; insbesondere ist  $H$  also nicht leer. Daß  $H$  dennoch keine zur Definition eines weiteren Untergraphen  $G_{i+1}$  geeignete Ecke  $v_i$  enthält, impliziert somit  $\delta(H) > \varepsilon(H)$ , wie behauptet.  $\square$

## 0.3 Wege und Kreise

Ein *Weg* ist ein nicht leerer Graph  $P = (V, E)$  der Form

Weg

$$V = \{x_0, x_1, \dots, x_k\} \quad E = \{x_0x_1, x_1x_2, \dots, x_{k-1}x_k\},$$

wobei die  $x_i$  paarweise verschieden sind. Die Ecken  $x_0$  und  $x_k$  sind die *Endecken* von  $P$ ; sie sind durch  $P$  *verbunden*. Die Ecken  $x_1, \dots, x_{k-1}$  sind die *inneren Ecken* von  $P$ . Die Anzahl der Kanten eines Weges ist seine *Länge*; den Weg der Länge  $k$  bezeichnen wir mit  $P^k$ .

Länge  
 $P^k$

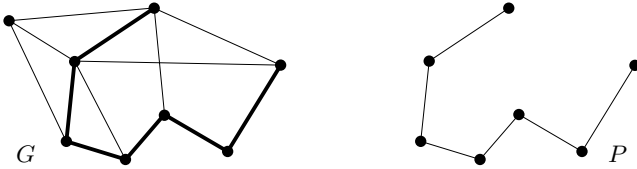


Abb. 0.3.1. Ein Weg  $P = P^6$  in  $G$

Oft bezeichnen wir einen Weg durch die natürliche Folge seiner Ecken,<sup>3</sup> schreiben also etwa  $P = x_0x_1 \dots x_k$ . Wir sprechen dann auch von  $x_0$  als der *Anfangsecke* und von  $x_k$  als der *Endecke* von  $P$  und nennen  $P$  einen Weg *von  $x_0$  nach  $x_k$*  (oder auch *zwischen* diesen Ecken).

Für  $0 \leq i \leq j \leq k$  schreiben wir

$$\begin{aligned} Px_i &:= x_0 \dots x_i \\ x_i P &:= x_i \dots x_k \\ x_i P x_j &:= x_i \dots x_j \end{aligned}$$

und

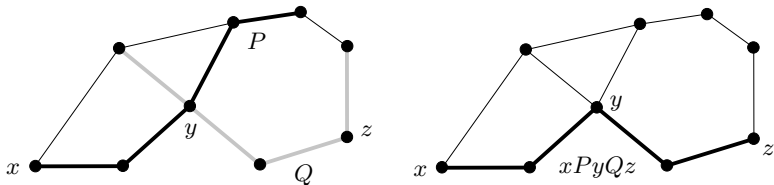
$$\begin{aligned} \overset{\circ}{P} &:= x_1 \dots x_{k-1} \\ P \overset{\circ}{x}_i &:= x_0 \dots x_{i-1} \\ \overset{\circ}{x}_i P &:= x_{i+1} \dots x_k \\ \overset{\circ}{x}_i P \overset{\circ}{x}_j &:= x_{i+1} \dots x_{j-1} \end{aligned}$$

für die entsprechenden Teilwege von  $P$ . Ähnliche offensichtliche Schreibweisen, wie etwa  $PxQyR$  statt  $Px \cup xQy \cup yR$ , verwenden wir für Wege, die aus anderen Wegen durch Aneinanderhängen gewonnen worden sind.

Für Eckenmengen  $A, B$  nennen wir  $P$  einen *A-B-Weg*, wenn  $V(P) \cap A = \{x_0\}$  ist und  $V(P) \cap B = \{x_k\}$ . Einen  $\{a\}$ - $B$ -Weg bezeichnen wir kürzer als *a-B-Weg*, usw. Zwei oder mehr Wege heißen

A-B-Weg

<sup>3</sup> Genauer, durch eine der beiden natürlichen Folgen: auch  $x_k \dots x_0$  bezeichnet den Weg  $P$ . Dennoch ist es oft nützlich, sich informell auf eine dieser beiden linearen Ordnungen von  $V(P)$  beziehen zu können, und zu deren Festlegung dient die informelle Schreibweise  $P = x_0 \dots x_k$ .

Abb. 0.3.2. Wege  $P$ ,  $Q$  und  $xPyQz$ 

*kreuzungs-*  
*frei*

*kreuzungsfrei*, wenn keiner eine innere Ecke eines anderen enthält. Zwei  $a$ - $b$ -Wege etwa sind genau dann kreuzungsfrei, wenn sie bis auf  $a$  und  $b$  disjunkt sind.

*H*-Weg

Ist  $H$  ein Graph, so nennen wir  $P$  einen *H*-Weg, wenn  $P$  den Graphen  $H$  genau in seinen Endecken  $x_0, x_k$  trifft und diese verschieden sind (also  $P$  nicht trivial). Insbesondere liegt die Kante eines *H*-Weges der Länge 1 nicht in  $H$ .

*Kreis*

Ist  $P = x_0 \dots x_{k-1}$  ein Weg und  $k \geq 3$ , so ist der Graph  $C := P + x_{k-1}x_0$  ein *Kreis*. Auch einen Kreis bezeichnen wir häufig kurz durch seine (zyklische) Eckenfolge, im obigen Beispiel also etwa  $C = x_0 \dots x_{k-1}x_0$ . Die *Länge* eines Kreises ist wieder die Anzahl seiner Kanten, und den Kreis der Länge  $k$  bezeichnen wir mit  $C^k$ .

*Länge*  
 $C^k$

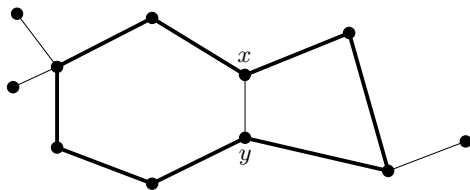
*Taillen-*  
*weite  $g(G)$*

Die Länge eines kürzesten Kreises in ( $\subseteq$ ) einem Graphen  $G$  ist die *Taillenweite*  $g(G)$  von  $G$ , die Länge eines längsten Kreises der *Umfang*.

*Umfang*

(Enthält  $G$  keinen Kreis, so habe  $G$  Taillenweite  $\infty$  und Umfang null.) Eine Kante von  $G$ , die zwei Ecken eines Kreises in  $G$  verbindet aber nicht selbst Kante des Kreises ist, ist eine *Sehne* dieses Kreises; ein Kreis in  $G$  ist also genau dann sehnenlos, wenn er als Teilgraph in  $G$  induziert ist.

*Sehne*

Abb. 0.3.3. Ein  $C^8$  mit Sehne  $xy$ , und induzierte  $C^6, C^4$ 

Hat  $G$  hohen Minimalgrad, so enthält  $G$  lange Wege und Kreise:

[2.6.1]

**Proposition 0.3.1.** *Jeder Graph  $G$  enthält einen Weg der Länge  $\delta(G)$  und einen Kreis der Länge mindestens  $\delta(G) + 1$  (für  $\delta(G) \geq 2$ ).*

*Beweis.* Es sei  $x_0 \dots x_k$  ein längster Weg in  $G$ . Alle Nachbarn von  $x_k$  in  $G$  liegen dann auf diesem Weg (Abb. 0.3.4). Es folgt  $k \geq d(x_k) \geq \delta(G)$ . Ist  $i < k$  minimal mit  $x_i x_k \in E(G)$ , so ist  $x_i \dots x_k x_i$  ein Kreis der Länge mindestens  $\delta(G) + 1$ .  $\square$

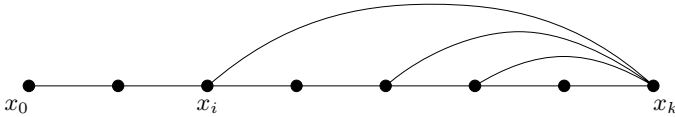


Abb. 0.3.4. Ein längster Weg  $x_0 \dots x_k$ , und die Nachbarn von  $x_k$

Minimalgrad und Tailenweite hängen (bei variabler Eckenzahl) hingegen nicht zusammen; wie wir in Kapitel 9 sehen werden, gibt es Graphen, die gleichzeitig beliebig hohen Minimalgrad und beliebig hohe Tailenweite haben.

Der *Abstand* zweier Eckenmengen  $X, Y$  in  $G$  ist die geringste Länge eines  $X$ - $Y$ -Weges in  $G$ ; existiert kein solcher Weg, so sei ihr Abstand unendlich. Den Abstand zweier einzelner Ecken  $x$  und  $y$  bezeichnen wir mit  $d_G(x, y)$ . Der größte Abstand zweier Ecken in  $G$  ist der *Durchmesser*  $\text{diam } G$  von  $G$ .

*Abstand*

$d_G(x, y)$

*Durchmesser*  
 $\text{diam } G$

Durchmesser und Tailenweite eines Graphen hängen natürlich zusammen:

**Proposition 0.3.2.** Für jeden Graphen  $G$ , der einen Kreis enthält, gilt  $g(G) \leq 2 \text{diam } G + 1$ .

*Beweis.* Es sei  $C$  ein kürzester Kreis in  $G$ . Ist  $g(G) \geq 2 \text{diam } G + 2$ , so enthält  $C$  zwei Ecken, die in  $C$  einen Abstand von mindestens  $\text{diam } G + 1$  haben. In  $G$  haben diese Ecken geringeren Abstand; ein kürzester Weg  $P$  zwischen ihnen liegt somit nicht in  $C$ . Folglich enthält  $P$  einen  $C$ -Weg  $xPy$ . Zusammen mit dem kürzeren der beiden  $x$ - $y$ -Wegen in  $C$  ergibt  $xPy$  einen kürzeren Kreis als  $C$ , mit Widerspruch.  $\square$

Eine Ecke heißt *zentral* in  $G$ , wenn ihr größter Abstand von anderen Ecken möglichst klein ist. Dieser Abstand ist der *Radius* von  $G$ , geschrieben  $\text{rad } G$ ; formal ist also  $\text{rad } G = \min_{x \in V(G)} \max_{y \in V(G)} d_G(x, y)$ . Wie man leicht sieht (Übung), gilt

*zentral*

*Radius*  
 $\text{rad } G$

$$\text{rad } G \leq \text{diam } G \leq 2 \text{rad } G.$$

Durchmesser und Radius hängen nicht wesentlich mit Minimal- und Durchschnittsgrad zusammen: es gibt Graphen, die trotz hohen Minimalgrades großen Durchmesser haben, oder trotz niedrigen Durchschnittsgrades einen geringen Durchmesser (Beispiele?).

Etwas anders verhält es sich mit dem Maximalgrad: ein Graph kann bei hoher Eckenzahl nur dann geringen Radius haben, wenn er hohen Maximalgrad hat. Dies wird in der folgenden Proposition quantifiziert:

**Proposition 0.3.3.** Ein Graph  $G$  mit Radius  $\leq k$  und Maximalgrad höchstens  $d \geq 3$  hat weniger als  $\frac{d}{d-2}(d-1)^k$  Ecken.

[7.4.1]  
[7.4.2]

*Beweis.* Es sei  $z$  eine zentrale Ecke in  $G$ . Bezeichnet  $D_i$  die Menge der Ecken von  $G$  mit Abstand  $i$  von  $z$ , so ist  $V(G) = \bigcup_{i=0}^k D_i$ , und es gilt  $|D_0| = 1$  und  $|D_1| \leq d$ . Für  $i \geq 2$  gilt  $|D_i| \leq (d-1)|D_{i-1}|$ , da jede Ecke aus  $D_i$  Nachbar einer Ecke in  $D_{i-1}$  ist, und jede Ecke in  $D_{i-1}$  höchstens  $d-1$  Nachbarn in  $D_i$  hat (da sie einen weiteren Nachbarn in  $D_{i-2}$  hat). Induktiv gilt damit  $|D_i| \leq d(d-1)^{i-1}$  für alle  $i \geq 1$ , und somit

$$|G| \leq 1 + d \sum_{i=1}^k (d-1)^{i-1} = 1 + \frac{d}{d-2} ((d-1)^k - 1) < \frac{d}{d-2} (d-1)^k. \quad \square$$

*Kantenzug*

Ein *Kantenzug* (der *Länge*  $k$ ) in einem Graphen  $G$  ist eine nicht leere Folge  $v_0 e_0 v_1 e_1 \dots e_{k-1} v_k$  von abwechselnd Ecken und Kanten aus  $G$  mit  $e_i = \{v_i, v_{i+1}\}$  für alle  $i < k$ . Ist  $v_0 = v_k$ , so heißt der Kantenzug *geschlossen*. Ein Kantenzug definiert auf natürliche Weise einen Weg in  $G$ , wenn seine Ecken  $v_i$  paarweise verschieden sind. Allgemein enthält<sup>4</sup> jeder Kantenzug zwischen zwei Ecken einen Weg zwischen diesen Ecken (Beweis?).

## 0.4 Zusammenhang

*zusammenhängend*

Ein nicht leerer Graph heißt *zusammenhängend*, wenn er für je zwei seiner Ecken  $x, y$  einen  $x$ - $y$ -Weg enthält. Ist  $U \subseteq V(G)$  und  $G[U]$  zusammenhängend, so nennen wir auch  $U$  selbst zusammenhängend (in  $G$ ).

[0.5.2]

**Proposition 0.4.1.** *Die Eckenmenge eines zusammenhängenden Graphen  $G$  besitzt stets eine Aufzählung  $(v_1, \dots, v_n)$  mit der Eigenschaft, daß  $G_i := G[v_1, \dots, v_i]$  für jedes  $i$  zusammenhängend ist.*

*Beweis.* Wähle  $v_1$  beliebig. Es seien nun  $v_1, \dots, v_i$  bereits gewählt und  $i < |G|$ . Wähle eine Ecke  $v \in G - G_i$  beliebig. Da  $G$  zusammenhängend ist, enthält  $G$  einen  $v$ - $v_1$ -Weg  $P$ . Wähle als  $v_{i+1}$  die letzte Ecke von  $P$  in  $G - G_i$ ; dann hat  $v_{i+1}$  einen Nachbarn in  $G_i$ . Daß jedes  $G_i$  zusammenhängend ist, folgt hieraus mit Induktion nach  $i$ .  $\square$

*Komponente*

Es sei  $G = (V, E)$  ein Graph. Ein maximaler zusammenhängender Teilgraph von  $G$  ist eine *Komponente* von  $G$ . Beachte, daß Komponenten als zusammenhängende Graphen nicht leer sind; der leere Graph (aber nur dieser) hat somit keine Komponenten. Ein minimaler aufspannender

---

<sup>4</sup> Für Graphen definierte Bezeichnungen verwenden wir informell gelegentlich auch für Kantenzüge, wenn ihre Bedeutung offensichtlich ist.

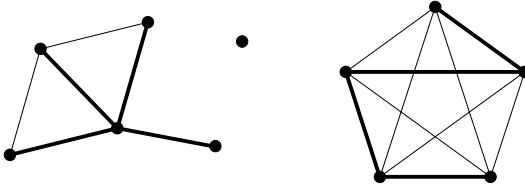


Abb. 0.4.1. Ein Graph mit drei Komponenten und Gerüst  $(K^1 * K^4) \cup K^1 \cup P^4$

Teilgraph von  $G$ , dessen Schnitt mit jeder Komponente von  $G$  zusammenhängend ist, heißt *Gerüst* von  $G$ .

Gerüst

Sind  $A, B \subseteq V$  und  $X \subseteq V \cup E$ , und enthält jeder  $A$ - $B$ -Weg in  $G$  eine Ecke oder Kante aus  $X$ , so *trennt*  $X$  die Mengen  $A$  und  $B$  in  $G$  und ist ein  $A$ - $B$ -*Trenner*; insbesondere gilt dann  $A \cap B \subseteq X$ . Allgemeiner *trennt*  $X$  den Graphen  $G$ , wenn  $X$  in  $G$  zwei Ecken aus  $G - X$  trennt. Eine Ecke, die zwei andere Ecken der gleichen Komponente trennt, heißt *Artikulation*. Eine Kante heißt *Brücke*, wenn sie ihre Endecken trennt; dies ist offenbar genau dann der Fall, wenn sie auf keinem Kreis liegt.

trennt

Trenner

Artikulation

Brücke

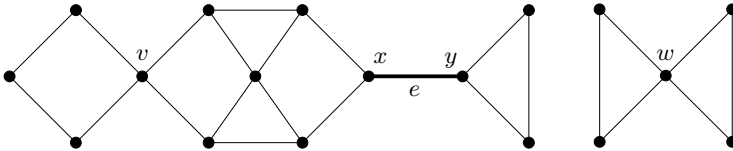


Abb. 0.4.2. Ein Graph mit Artikulationen  $v, w, x, y$  und Brücke  $e = xy$

$G$  heißt  $k$ -*zusammenhängend* (für  $k \in \mathbb{N}$ ), wenn  $|G| > k$  gilt und  $G - X$  für jede Eckenmenge  $X \subseteq V$  der Mächtigkeit  $< k$  zusammenhängend ist, also keine zwei Ecken von  $G$  durch weniger als  $k$  andere Ecken getrennt werden.

$k$ -  
zusammen-  
hängend

Jeder (nicht leere) Graph ist somit 0-zusammenhängend, und die 1-zusammenhängenden Graphen sind gerade die nicht trivialen zusammenhängenden Graphen. Die größte natürliche Zahl  $k < |G|$ , für die  $G$   $k$ -zusammenhängend ist, ist der *Zusammenhang*  $\kappa(G)$  von  $G$ . Insbesondere ist  $\kappa(G) = 0$  genau dann, wenn  $G$  nicht zusammenhängend oder ein  $K^1$  ist, und es gilt  $\kappa(K^n) = n - 1$  für alle  $n \geq 1$ .

$\kappa(G)$

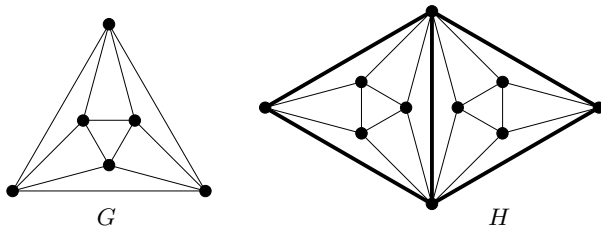
Ist  $|G| > 1$ , so heißt  $G$   $\ell$ -*kantenzusammenhängend*, wenn  $G - F$  für jede Kantenmenge  $F \subseteq E$  der Mächtigkeit  $< \ell$  zusammenhängend ist. Das größte  $\ell \in \mathbb{N}$ , für das  $G$   $\ell$ -kantenzusammenhängend ist, ist der *Kantenzusammenhang*  $\lambda(G)$  von  $G$ ; insbesondere ist  $\lambda(G) = 0$ , wenn  $G$  nicht zusammenhängend ist.

$\ell$ -kanten-  
zusammen-  
hängend

$\lambda(G)$

Für nicht triviales  $G$  gilt stets

$$\kappa(G) \leq \lambda(G) \leq \delta(G)$$



Oktaeder

Abb. 0.4.3. Das Oktaeder  $G$  (links) mit  $\kappa(G) = \lambda(G) = 4$ , und ein Graph  $H$  mit  $\kappa(H) = 2$  und  $\lambda(H) = 4$

(Beweis als Übung). Hoher Zusammenhang setzt also hohen Minimalgrad voraus. Umgekehrt sichert hoher Minimalgrad keinen hohen Zusammenhang, ja nicht einmal hohen Kantenzusammenhang. (Beispiele?)

Bereits aus hohem Durchschnittsgrad folgt aber die Existenz eines Teilgraphen hohen Zusammenhangs:

**Satz 0.4.2.** (Mader 1972)

Jeder Graph mit Durchschnittsgrad mindestens  $4k$  hat einen  $k$ -zusammenhängenden Teilgraphen.

[6.2.1]  
[9.2.3]

*Beweis.* Für  $k \in \{0, 1\}$  ist die Behauptung trivial; es sei  $G = (V, E)$  ein Graph mit  $|V| =: n$  und  $|E| =: m$ , sowie  $k \geq 2$ . Aus Induktionsgründen ist es einfacher, die folgende stärkere Behauptung zu zeigen:  $G$  enthält stets einen  $k$ -zusammenhängenden Teilgraphen, wenn

- (i)  $n \geq 2k - 1$  und
- (ii)  $m \geq (2k - 3)(n - k + 1) + 1$ .

(Daß dies eine stärkere Behauptung ist, daß also (i) und (ii) aus unserer Annahme von  $d(G) \geq 4k$  folgen, ist klar: (i) gilt wegen  $n > \Delta(G) \geq d(G) \geq 4k$ , und (ii) folgt aus  $m = \frac{1}{2}d(G)n \geq 2kn$ .)

Wir verwenden Induktion nach  $n$ . Ist  $n = 2k - 1$ , so ist  $k = \frac{1}{2}(n + 1)$ , und daher mit (ii)  $m \geq \frac{1}{2}n(n - 1)$ . Damit ist  $G = K^n \supseteq K^{\frac{n+1}{2}}$ , und die Behauptung wahr. Wir nehmen nun  $n \geq 2k$  an. Ist  $v$  eine Ecke mit  $d(v) \leq 2k - 3$ , so können wir die Induktionsannahme auf  $G - v$  anwenden und sind fertig; es gelte daher  $\delta(G) \geq 2k - 2$ . Ist  $G$   $k$ -zusammenhängend, so gibt es nichts zu zeigen. Anderenfalls hat  $G$  die Form  $G = G_1 \cup G_2$  mit  $|G_1 \cap G_2| < k$  und  $|G_1|, |G_2| < n$ . Da jede Kante von  $G$  eine Kante von  $G_1$  oder von  $G_2$  ist, hat  $G$  keine Kante zwischen  $G_1 - G_2$  und  $G_2 - G_1$ . Jede Ecke in diesen Untergraphen hat nach Annahme  $\delta(G) \geq 2k - 2$  Nachbarn, und so gilt  $|G_1|, |G_2| \geq 2k - 1$ . Damit erfüllt aber mindestens einer der Graphen  $G_1$  und  $G_2$  die Induktionsannahme (und wir sind wiederum fertig): sonst gälte

$$\|G_i\| \leq (2k - 3)(|G_i| - k + 1)$$

für  $i = 1, 2$ , und daher

$$\begin{aligned} m &\leq \|G_1\| + \|G_2\| \\ &\leq (2k-3)(|G_1| + |G_2| - 2k + 2) \\ &\leq (2k-3)(n-k+1) \quad (\text{wegen } |G_1 \cap G_2| \leq k-1) \end{aligned}$$

mit Widerspruch zu (ii).  $\square$

## 0.5 Bäume und Wälder

Ein Graph, der keinen Kreis enthält, ist ein *Wald*. Ein zusammenhängender Wald ist ein *Baum*. (Ein Wald ist somit ein Graph, dessen Komponenten Bäume sind.) Die Ecken vom Grad 1 eines Baumes sind seine *Blätter*. Jeder nicht triviale Baum hat mindestens zwei Blätter – etwa die Endecken eines längsten Weges. Dies kann bei Induktionsbeweisen für Bäume nützlich sein: entfernt man von einem Baum ein Blatt, so ist der Rest immer noch ein Baum.

*Wald*

*Baum*

*Blatt*

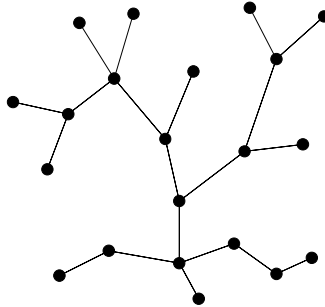


Abb. 0.5.1. Ein Baum

**Satz 0.5.1.** Die folgenden Aussagen sind äquivalent für einen Graphen  $T$ :

- (i)  $T$  ist ein Baum;
- (ii) zwischen je zwei Ecken enthält  $T$  genau einen Weg;
- (iii)  $T$  ist minimal zusammenhängend, d.h.  $T$  ist zusammenhängend aber für jede Kante  $e$  von  $T$  ist  $T - e$  nicht zusammenhängend;
- (iv)  $T$  ist maximal kreislos, d.h.  $T$  ist kreislos aber für je zwei nicht benachbarte Ecken  $x, y$  enthält  $T + xy$  einen Kreis.  $\square$

[0.6.1]  
[0.9.6]  
[3.2.9]

Der Beweis von Satz 0.5.1 ist ganz einfach und eine gute Übung zum Umgang mit den in ihm auftretenden Begriffen. Für zwei Ecken  $x, y \in T$  bezeichnen wir (die Notation aus Abschnitt 0.3 erweiternd) mit  $xTy$  den nach Satz 0.5.1 (ii) bestimmten  $x$ - $y$ -Weg in  $T$ .

$xTy$



[10.4.4] **Korollar 0.5.2.** Die Eckenmenge eines Baumes hat stets eine Aufzählung  $(v_1, \dots, v_n)$  mit der Eigenschaft, daß  $v_i$  für jedes  $i \geq 2$  genau einen Nachbarn in  $\{v_1, \dots, v_{i-1}\}$  hat.

(0.4.1) *Beweis.* Verwende die Eckenaufzählung aus Proposition 0.4.1.  $\square$

[0.9.6]  
[2.5.1]  
[2.5.4]  
[3.2.9]  
[6.3.2] **Korollar 0.5.3.** Ein zusammenhängender Graph mit  $n$  Ecken ist genau dann ein Baum, wenn er  $n - 1$  Kanten hat.

*Beweis.* Daß jeder Baum mit  $n$  Ecken  $n - 1$  Kanten hat, folgt induktiv aus Korollar 0.5.2. Ist umgekehrt  $G$  ein beliebiger zusammenhängender Graph mit  $n$  Ecken und  $n - 1$  Kanten, so betrachten wir ein Gerüst  $G'$  von  $G$ . Nach Satz 0.5.1 ist  $G'$  ein Baum und hat damit bereits selbst  $n - 1$  Kanten. Es folgt  $G = G'$ , d.h. auch  $G$  ist ein Baum.  $\square$

[7.2.1]  
[7.2.3] **Korollar 0.5.4.** Ist  $T$  ein Baum und  $G$  ein Graph mit  $\delta(G) \geq |T| - 1$ , so gilt  $T \subseteq G$ , d.h.  $G$  hat einen zu  $T$  isomorphen Teilgraphen.

*Beweis.* Finde eine Kopie von  $T$  in  $G$  induktiv entlang einer Eckenaufzählung von  $T$  aus Korollar 0.5.2.  $\square$

*Spannbaum*  
Ein Baum  $T \subseteq G$  heißt *Spannbaum* von  $G$ , wenn er ganz  $G$  aufspannt, d.h. wenn  $V(T) = V(G)$  ist. Ein Spannbaum ist nach Satz 0.5.1 also nichts anderes als ein Gerüst eines zusammenhängenden Graphen; insbesondere besitzt jeder zusammenhängende Graph einen Spannbaum.

*Wurzel*  
Gelegentlich ist es hilfreich, eine spezielle Ecke eines Baumes besonders auszuzeichnen, indem man sie seine *Wurzel* nennt. Einen Baum mit fest gewählter Wurzel nennt man einen *Wurzelbaum*. Die Wahl einer Wurzel  $r$  aus der Eckenmenge eines Baumes  $T$  definiert eine Ordnungsrelation auf  $V(T)$ : wir schreiben  $x \leq y$ , wenn  $x \in rTy$  gilt. Dies ist die zu  $T$  und  $r$  gehörige *Baumordnung*. Offenbar ist  $r$  in dieser Halbordnung kleinstes Element, jedes Blatt  $x \neq r$  ist ein maximales Element, die Endecken einer Kante sind stets vergleichbar, und jede Eckenmenge der Form  $\{x \mid x \leq y\}$  (wobei  $y$  irgendeine feste Ecke ist) ist eine *Kette*, d.h. eine Menge paarweise vergleichbarer Elemente. (Beweise?)

*normaler Baum*  
Ein Wurzelbaum  $T$  in einem Graphen  $G$  heißt *normal* in  $G$ , wenn die Endecken eines jeden  $T$ -Weges in  $G$  in der Baumordnung von  $T$  vergleichbar sind. Ist  $T$  ein Spannbaum von  $G$ , so heißt dies nichts weiter, als daß zwei Ecken von  $T$  stets vergleichbar sein müssen, wenn sie in  $G$  benachbart sind (Abb. 0.5.2). Normale Spann bäume werden in der Informatik meist *Tiefensuchbäume* genannt; siehe dazu Übung 16.

Normale Spann bäume bilden ein wertvolles Hilfsmittel in der Graphentheorie. Dazu trägt bei, daß sie immer existieren:

[5.5.3] **Proposition 0.5.5.** Jeder zusammenhängende Graph enthält einen normalen Spannbaum, mit beliebig vorgebar Ecke als Wurzel.

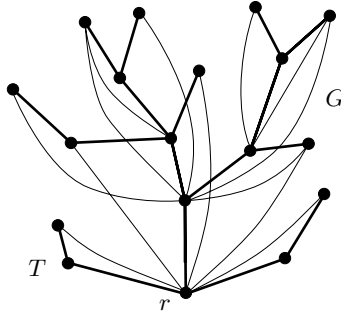


Abb. 0.5.2. Ein normaler Spannbaum mit Wurzel  $r$

*Beweis.* Es sei  $G$  ein zusammenhängender Graph,  $r \in G$  eine beliebige Ecke, und  $T \subseteq G$  ein maximaler in  $G$  normaler Baum mit Wurzel  $r$ . Wir zeigen, daß  $T$  alle Ecken von  $G$  enthält.

Wenn nicht, so betrachten wir eine Komponente  $C$  von  $G - T$ . Da  $T$  in  $G$  normal ist, bildet  $N(C)$  eine Kette in  $T$ ; deren größtes Element heiße  $x$ . Wir erweitern nun  $T$  zu einem Baum  $T'$ , indem wir einen Nachbarn  $y \in C$  von  $x$  hinzufügen und mit  $x$  verbinden. Die von  $T'$  auf  $V(T)$  induzierte Baumordnung stimmt dann mit der Baumordnung von  $T$  selbst überein. Um einen Widerspruch zur Maximalwahl von  $T$  herzuleiten, zeigen wir jetzt, daß auch  $T'$  in  $G$  normal ist.

Sei dazu  $P$  ein  $T'$ -Weg in  $G$ . Liegen beide Endecken von  $P$  in  $T$ , so sind sie in der Baumordnung von  $T$  (und somit in der von  $T'$ ) vergleichbar;  $P$  ist ja dann auch ein  $T$ -Weg, und  $T$  ist nach Annahme normal in  $G$ . Liegen nicht beide Endecken von  $P$  in  $T$ , so ist  $y$  eine davon, und bis auf seine andere Ecke  $z$  liegt  $P$  ganz in  $C$ . Die Ecke  $z$  liegt dann in  $N(C)$ , und es gilt  $z \leq x$  nach Wahl von  $x$ . Für unseren Nachweis der Vergleichbarkeit von  $y$  und  $z$  reicht es somit zu zeigen, daß  $x < y$  ist. Nach Definition der Baumordnung von  $T'$  ist dies gleichbedeutend mit  $x \in rT'y$ , was schon deshalb gilt, weil  $x$  der einzige Nachbar von  $y$  in  $T'$  ist.  $\square$

## 0.6 Bipartite Graphen

Es sei  $r \geq 2$  eine natürliche Zahl. Ein Graph  $G = (V, E)$  heißt  $r$ -partit, wenn eine Partition von  $V$  in  $r$  Teile existiert, so daß die Endecken einer jeden Kante von  $G$  in verschiedenen Partitionsklassen liegen: Ecken aus der gleichen Klasse dürfen nicht benachbart sein. Ein 2-partiter Graph heißt auch *bipartit* (oder *paar*).

Ist  $G$  ein  $r$ -partiter Graph, in dem je zwei Ecken aus verschiedenen Klassen benachbart sind, so heißt  $G$  *vollständig  $r$ -partit* (bzw. *vollständig*

$r$ -partit

bipartit

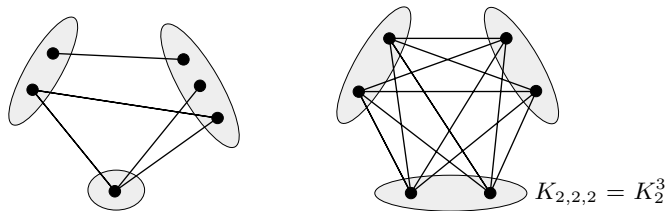


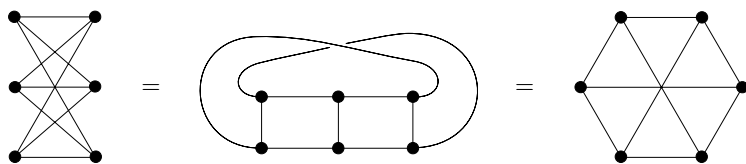
Abb. 0.6.1. Zwei 3-partite Graphen

vollständig  
multipartit

*bipartit*), oder allgemeiner *vollständig multipartit*. Sind  $n_1, \dots, n_r$  die Mächtigkeiten seiner  $r$  Partitionsklassen, so bezeichnen wir diesen (bis auf Isomorphie eindeutig bestimmten) Graphen  $\overline{K}^{n_1} * \dots * \overline{K}^{n_r}$  mit  $K_{n_1, \dots, n_r}$ . Ist  $n_1 = \dots = n_r = s$ , so bezeichnen wir den Graphen auch mit  $K_s^r$ ; dies ist also der vollständig  $r$ -partite Graph, in dem jede Partitionsklasse genau  $s$  Ecken enthält.<sup>5</sup> (Abb. 0.6.1 zeigt als Beispiel das Oktaeder  $K_2^3$ ; vergleiche diese Darstellung mit der aus Abb. 0.4.3!) Graphen der Form  $K_{1,n}$  nennt man *Sterne*.

$K_{n_1, \dots, n_r}$   
 $K_s^r$

Stern

Abb. 0.6.2. Drei Darstellungen des bipartiten Graphen  $K_{3,3} = K_3^2$ 

Offenbar kann ein bipartiter Graph keinen Kreis ungerader Länge enthalten. Diese Eigenschaft charakterisiert die bipartiten Graphen sogar:

[4.3.1]  
[5.4.2]

**Proposition 0.6.1.** *Ein Graph ist genau dann bipartit, wenn er keinen Kreis ungerader Länge enthält.*

(0.5.1)

*Beweis.* Es sei  $G = (V, E)$  ein Graph ohne Kreise ungerader Länge; wir zeigen, daß  $G$  bipartit ist. Da ein Graph bipartit ist, wenn all seine Komponenten es sind, dürfen wir  $G$  als zusammenhängend voraussetzen. Es sei  $T \subseteq G$  ein Spannbaum,  $r$  dessen Wurzel, und  $\leq_T$  die entsprechende Baumordnung auf  $V$ . Für jedes  $v \in V$  hat der eindeutig bestimmte Weg  $rTv$  gerade oder ungerade Länge; dies definiert eine Partition von  $V$  in zwei Teile. Wir zeigen, daß diese Partition  $G$  als bipartit erweist.

Es sei  $e = xy$  eine beliebige Kante von  $G$ . Ist  $e \in T$ , etwa mit  $x <_T y$ , so gilt  $rTy = rTxy$ , und  $x, y$  liegen in verschiedenen Partitionsklassen. Ist andererseits  $e \notin T$ , so ist  $C_e := xTy + e$  ein Kreis (Abb. 0.6.3), und

<sup>5</sup> Umgekehrt entsteht jeder  $K_s^r$  aus einem  $K^r$  durch Aufblähung von dessen Ecken zu unabhängigen  $s$ -Mengen; diese Beziehung soll in der Notation  $K_s^r$  anklingen.

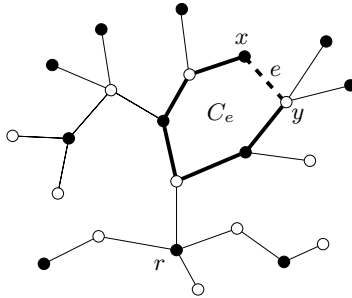


Abb. 0.6.3. Der Kreis  $C_e$  in  $T + e$

nach dem bereits behandelten Fall liegen die Ecken des Weges  $xTy$  abwechselnd in den beiden Partitionsklassen. Da  $C_e$  nach Annahme gerade Länge hat, liegen wiederum auch  $x, y$  in verschiedenen Klassen.  $\square$

## 0.7 Kontraktion und Minoren

Neben der in Abschnitt 0.1 definierten Teil- und Untergraphenbeziehung gibt es noch eine weitere wichtige Relation zwischen Graphen: die sogenannte Minorenrelation.

Ist  $e = xy$  Kante eines Graphen  $G = (V, E)$ , so bezeichnet  $G/e$  den durch *Kontraktion* von  $e$  aus  $G$  entstehenden Graphen: wir kontrahieren  $e$  zu einer neuen Ecke  $v_e$ , und diese erhält als Nachbarn all die Ecken, die vorher zu  $x$  oder zu  $y$  benachbart waren (Abb. 0.7.1). Formal ist  $G/e$  ein Graph  $(V', E')$  mit Eckenmenge  $V' := (V \setminus \{x, y\}) \cup \{v_e\}$  (wobei  $v_e$  eine "neue" Ecke ist, also  $v_e \notin V \cup E$ ) und Kantenmenge

$G/e$   
Kanten-  
kontraktion  
 $v_e$

$$E' := \left\{ vw \in E \mid \{v, w\} \cap \{x, y\} = \emptyset \right\} \cup \left\{ v_e w \mid xw \in E \setminus \{e\} \text{ oder } yw \in E \setminus \{e\} \right\}.$$

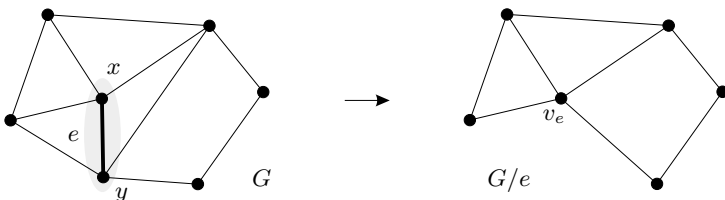


Abb. 0.7.1. Kontraktion der Kante  $e = xy$

Ist allgemeiner  $X$  ein weiterer Graph und  $\{V_x \mid x \in V(X)\}$  eine Partition von  $V$  in zusammenhängende Teilmengen mit der Eigenschaft, daß  $G$  für je zwei Ecken  $x, y \in X$  genau dann eine  $V_x - V_y$ -Kante enthält wenn  $xy \in E(X)$  ist, so nennen wir  $G$  einen  $MX$  und schreiben<sup>6</sup>  $G = MX$  (Abb. 0.7.2). Die Mengen  $V_x$  sind die *Verzweigungsmengen* dieses  $MX$ . Anschaulich entsteht  $X$  aus  $G$  also durch Kontraktion der Mengen  $V_x$  auf jeweils eine Ecke, unter Löschung dabei entstehender “Mehrfachkanten” und “Schlingen”.

 $MX$ 

Verzweigungsmengen

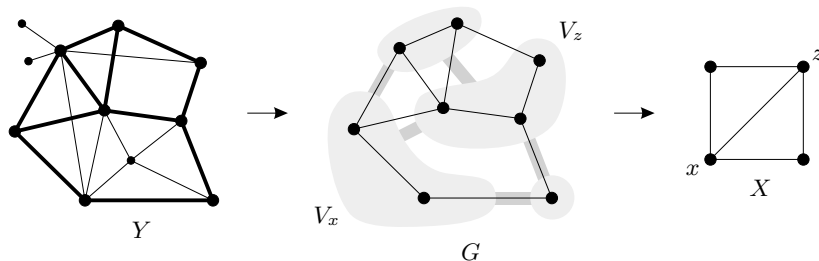


Abb. 0.7.2.  $Y \supseteq G = MX$ , d.h.  $X$  ist ein Minor von  $Y$

Ist  $V_x = U \subseteq V$  eine Verzweigungsmenge, und enthält jede andere Verzweigungsmenge nur eine Ecke, so schreiben wir statt  $X$  auch  $G/U$ , bezeichnen die aus  $U$  kontrahierte Ecke  $x \in X$  als  $v_U$ , und denken uns den Rest von  $X$  einfach als Untergraphen von  $G$ . Die oben definierte Kontraktion einer einzelnen Kante  $uu'$  entspricht dann dem Spezialfall  $U = \{u, u'\}$ .

 $G/U$   
 $v_U$ 

**Proposition 0.7.1.**  $G$  ist genau dann ein  $MX$ , wenn  $X$  aus  $G$  durch eine Reihe von Kantenkontraktionen gewonnen werden kann, wenn also Graphen  $G_0, \dots, G_n$  und Kanten  $e_i \in G_i$  existieren mit  $G_0 = G$ ,  $G_n \simeq X$ , und  $G_{i+1} = G_i/e_i$  für alle  $i < n$ .

*Beweis* mit Induktion nach  $|G| - |X|$ . □

Ist  $G = MX$  Teilgraph eines weiteren Graphen  $Y$ , so nennt man  $X$  einen *Minor* von  $Y$  und schreibt  $X \preceq Y$ . Beachte, daß jeder Teilgraph eines Graphen auch sein Minor ist; insbesondere ist jeder Graph ein Minor seiner selbst. Nach Proposition 0.7.1 entsteht jeder Minor eines Graphen dadurch, daß wir zunächst Ecken und Kanten löschen und dann weitere Kanten kontrahieren. Umgekehrt ist jeder Graph, der aus einem anderen Graphen durch wiederholtes Löschen und Kontrahieren entsteht (in beliebiger Reihenfolge; siehe Proposition 0.7.3), sein Minor.

Minor;  $\preceq$ 

<sup>6</sup> Der Ausdruck  $MX$  – das  $M$  steht für “Minor”; s.u. – bezeichnet also eine ganze Klasse von Graphen, und unsere Schreibweise “ $G = MX$ ” bedeutet (leider etwas irreführend), daß  $G$  dieser Klasse angehört.

Ersetzen wir in  $X$  jede Kante  $xy$  so durch einen  $x$ - $y$ -Weg, daß die Ersetzungswege keine inneren Ecken mit  $X$  oder miteinander gemeinsam haben, so nennen wir den entstandenen Graphen  $G$  eine *Unterteilung* von  $X$  und schreiben  $G = TX$ .<sup>7</sup> Ist  $G = TX$  Teilgraph eines weiteren Graphen  $Y$ , so heißt  $X$  *topologischer Minor* von  $Y$  (Abb. 0.7.3).

Unterteilung  
 $TX$   
topologischer  
Minor

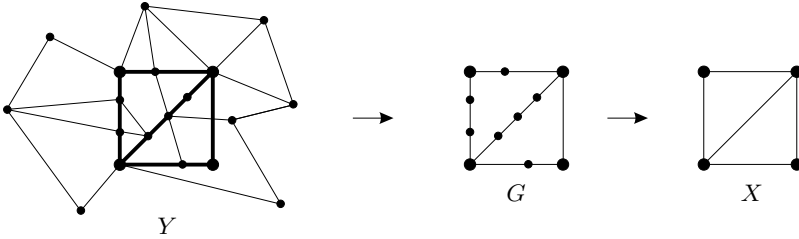


Abb. 0.7.3.  $Y \supseteq G = TX$ , d.h.  $X$  ist topologischer Minor von  $Y$

Ist  $G = TX$ , so fassen wir  $V(X)$  als Teilmenge von  $V(G)$  auf und nennen diese Ecken die *Verzweigungsecken* von  $G$ ; die anderen Ecken von  $G$  sind seine *Unterteilungsecken*. (Diese haben also den Grad 2, während die Verzweigungsecken von  $G$  den gleichen Grad wie in  $X$  haben.)

Verzweigungs-  
ecken  
Unterteilungs-  
ecken

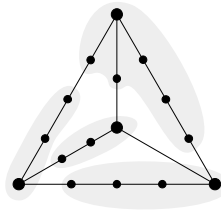


Abb. 0.7.4. Eine Unterteilung des  $K^4$  als  $MK^4$

**Proposition 0.7.2.**

[3.4.2]  
[6.4.1]

- (i) Jeder  $TX$  ist auch ein  $MX$  (Abb. 0.7.4); jeder topologische Minor eines Graphen ist somit auch sein (gewöhnlicher) Minor.
- (ii) Ist  $\Delta(X) \leq 3$ , so enthält jeder  $MX$  einen  $TX$ ; jeder Minor mit Maximalgrad  $\leq 3$  eines Graphen ist somit auch sein topologischer Minor. □

**Proposition 0.7.3.** Die Relationen “ $X$  ist Minor von  $Y$ ” und “ $X$  ist topologischer Minor von  $Y$ ” sind Ordnungsrelationen auf der Klasse der endlichen Graphen, d.h. sie sind reflexiv, antisymmetrisch und transitiv. □

[10.4.1]

<sup>7</sup> Auch  $TX$  bezeichnet also eine ganze Klasse von Graphen: all diejenigen, die, als simplizialer Komplex der Dimension 1 aufgefaßt, zu  $X$  homöomorph sind. Das  $T$  in  $TX$  steht für “topologisch”.

## 0.8 Eulersche Graphen

Wer sich als Mathematiker einmal in der ehemals ostpreussischen Stadt Königsberg (und dazu im 18. Jahrhundert) findet, wird sich umgehend – so jedenfalls gebietet es eine durch den großen Mathematiker Leonhard Euler begründete Tradition – nach einer Möglichkeit erkundigen, die in Abb. 0.8.1 dargestellten Brücken über den Pregel in einem einzigen Rundgang jeweils genau einmal zu überschreiten.

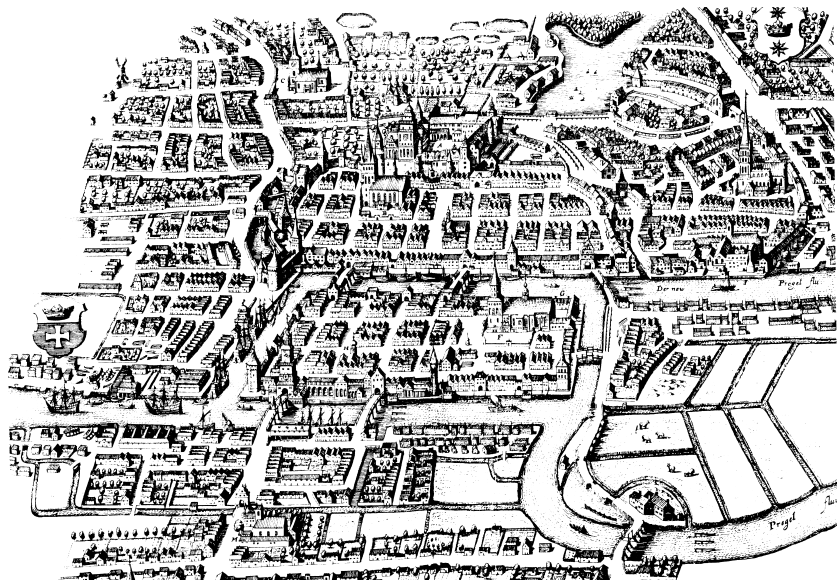


Abb. 0.8.1. Die Königsberger Brücken (anno 1736)

Hiervon inspiriert<sup>8</sup> nennen wir einen geschlossenen Kantenzug in einem Graphen *eulersch*, wenn er jede Kante des Graphen genau einmal enthält. Ein Graph heißt *eulersch*, wenn er einen solchen Kantenzug enthält.

*eulersch*

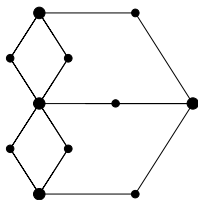


Abb. 0.8.2. Der Graph zum Brückenproblem

<sup>8</sup> Wer diese Inspiration auch nach Betrachtung von Abb. 0.8.2 als zu sprunghaft empfindet, mag in dem *Multigraphen* aus Abb. 0.10.1 seine Zuflucht finden.

**Satz 0.8.1.** (Euler 1736)

Ein zusammenhängender Graph ist genau dann eulersch, wenn jede seiner Ecken geraden Grad hat.

[1.1.5]  
[8.3.3]

*Beweis.* Die Gradbedingung ist offensichtlich notwendig; tritt eine Ecke  $k$ -mal in einem eulerschen Kantenzug auf (bzw.  $k+1$ -mal, wenn sie erste und letzte Ecke des Kantenzugs ist), so ist ihr Grad  $2k$ .

Umgekehrt sei nun  $G$  ein zusammenhängender Graph, in dem alle Eckengrade gerade sind. Es sei

$$W = v_0 e_0 \dots e_{\ell-1} v_\ell$$

ein Kantenzug maximaler Länge in  $G$ , der keine Kante mehrfach enthält. Da wir  $W$  nicht mehr verlängern können, liegen alle mit  $v_\ell$  inzidenten Kanten auf  $W$ . Da nach Annahme die Anzahl dieser Kanten gerade ist, folgt  $v_\ell = v_0$ , d.h. der Kantenzug  $W$  ist geschlossen.

Ist  $W$  nicht eulersch in  $G$ , so hat  $G$  eine nicht auf  $W$  liegende Kante  $e$ , die mit einer Ecke von  $W$  inzidiert, etwa  $e = uv_i$ . (Hier geht ein, daß  $G$  zusammenhängend ist; siehe den Beweis von Proposition 0.4.1.) Der Kantenzug

$$uev_i e_i \dots e_{\ell-1} v_\ell e_0 \dots e_{i-1} v_i$$

ist dann länger als  $W$ , mit Widerspruch. □

## 0.9 Algebraisches

Es sei  $G = (V, E)$  ein Graph mit  $n$  Ecken und  $m$  Kanten, etwa  $V = \{v_1, \dots, v_n\}$  und  $E = \{e_1, \dots, e_m\}$ . Mit  $\mathcal{V}(G)$  bezeichnen wir den  $\mathbb{F}_2$ -Vektorraum aller Funktionen  $V \rightarrow \mathbb{F}_2$ ; dabei bezeichnet  $\mathbb{F}_2$  wie üblich den Körper  $\{0, 1\}$ . Wir nennen diesen Vektorraum den *Eckenraum* von  $G$ . Seine Elemente entsprechen in natürlicher Weise den Teilmengen von  $V$ : einer Eckenmenge  $U \subseteq V$  entspricht die Indikatorfunktion  $V \rightarrow \mathbb{F}_2$ , die den Ecken aus  $U$  die Eins aus  $\mathbb{F}_2$  zuordnet und allen anderen Ecken die Null. Im folgenden unterscheiden wir begrifflich nicht mehr zwischen den Eckenmengen  $U \subseteq V$  und ihren Indikatorfunktionen, sondern fassen die Eckenmengen selbst als die Elemente von  $\mathcal{V}(G)$  auf. Für  $U, U' \subseteq V$  ist dann  $U + U'$  gerade die symmetrische Differenz der Mengen  $U$  und  $U'$  (warum?), und es gilt  $U = -U$  für alle  $U \subseteq V$ . Das neutrale Element von  $\mathcal{V}(G)$  ist die leere Eckenmenge  $\emptyset$ , und  $\{\{v_1\}, \dots, \{v_n\}\}$  ist eine Basis von  $\mathcal{V}(G)$ , seine *Standardbasis*. Insbesondere ist also  $\dim \mathcal{V}(G) = n$ .

Eckenraum  
 $\mathcal{V}(G)$

+

Analog zum Eckenraum bilden die Funktionen  $E \rightarrow \mathbb{F}_2$  den *Kantenraum*  $\mathcal{E}(G)$  von  $G$ : seine Elemente sind die Teilmengen von  $E$ , die Vektoraddition ist die symmetrischen Differenz dieser Teilmengen, und

Kantenraum  
 $\mathcal{E}(G)$



Standard-  
basis

$\emptyset \subseteq E$  ist das neutrale Element. Wiederum gilt  $F = -F$  für alle  $F \subseteq E$ , und  $\{\{e_1\}, \dots, \{e_m\}\}$  ist die *Standardbasis* von  $\mathcal{E}(G)$ ; insbesondere ist  $\dim \mathcal{E}(G) = m$ .

Wir wenden uns zunächst dem Kantenraum zu. Sind  $\lambda_1, \dots, \lambda_m$  und  $\lambda'_1, \dots, \lambda'_m$  die Koeffizienten zweier Kantenmengen  $F, F' \in \mathcal{E}(G)$  bezüglich der Standardbasis, so schreiben wir wie üblich

$$\langle F, F' \rangle \quad \langle F, F' \rangle := \lambda_1 \lambda'_1 + \dots + \lambda_m \lambda'_m \in \mathbb{F}_2.$$

Beachte, daß  $\langle F, F' \rangle = 0$  auch für  $F = F' \neq \emptyset$  gelten kann: offenbar gilt  $\langle F, F' \rangle = 0$  genau dann, wenn  $F$  und  $F'$  eine gerade Anzahl von Kanten gemeinsam haben. Für einen Unterraum  $\mathcal{F}$  von  $\mathcal{E}(G)$  schreiben wir wie gewohnt

$$\mathcal{F}^\perp := \{D \in \mathcal{E}(G) \mid \langle F, D \rangle = 0 \text{ für alle } F \in \mathcal{F}\};$$

dies ist dann ebenfalls ein Unterraum von  $\mathcal{E}(G)$  (der Lösungsraum eines geeigneten homogenen linearen Gleichungssystems – welches?), und es gilt<sup>9</sup>

$$\dim \mathcal{F} + \dim \mathcal{F}^\perp = m.$$

$\mathcal{C}(G)$

Mit  $\mathcal{C} = \mathcal{C}(G)$  bezeichnen wir den Unterraum von  $\mathcal{E}(G)$ , der von den Kreisen in  $G$  (genauer:<sup>10</sup> von ihren Kantenmengen) aufgespannt wird. Die Elemente von  $\mathcal{C}$  heißen *Zyklen* in  $G$ ;  $\mathcal{C}$  selbst ist der *Zyklusraum*, und seine Dimension die *zykломatische Zahl* von  $G$ .

Zyklus-  
raum

[2.2.3] **Proposition 0.9.1.** *Die induzierten Kreise in  $G$  erzeugen seinen gesamten Zyklusraum.*

*Beweis.* Nach Definition von  $\mathcal{C}(G)$  reicht es zu zeigen, daß jeder Kreis  $C \subseteq G$  im Erzeugnis der induzierten Kreise in  $G$  liegt. Dies folgt sofort mit Induktion nach der Länge von  $C$ . Hat nämlich  $C$  eine Sehne  $e$ , so gibt es zwei Kreise  $C_1, C_2 \subseteq C + e$ , die  $e$  aber sonst keine Kante gemeinsam haben. Nach Induktionsannahme liegen  $C_1$  und  $C_2$  im Erzeugnis der induzierten Kreise, und wegen  $C = C_1 + C_2$  gilt dies dann auch für  $C$ .  $\square$

[3.5.1] **Proposition 0.9.2.** *Eine Kantenmenge  $F \subseteq E$  ist genau dann ein Zyklus, wenn jede Ecke von  $(V, F)$  geraden Grad hat.*

<sup>9</sup> Dies ist etwas bekannter für reelle und komplexe Vektorräume (wo  $\mathcal{F}$  und  $\mathcal{F}^\perp$  eine direkte Summe bilden), gilt hier aber genauso; Literaturhinweise dazu am Ende des Kapitels.

<sup>10</sup> Der Einfachheit halber werden wir im Zusammenhang mit dem Zyklusraum begrifflich auch nicht zwischen Kreisen und ihren Kantenmengen unterscheiden.

*Beweis.* Die Vorwärtsrichtung folgt mit Induktion nach der Anzahl der erzeugenden Kreise von  $F$ , die Rückrichtung mit Induktion nach der Anzahl der Kreise in  $(V, F)$ .  $\square$

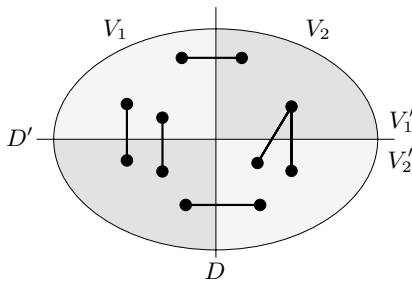
Ist  $\{V_1, V_2\}$  eine Partition von  $V$ , so nennen wir die Menge  $E(V_1, V_2)$  aller diese Partition *kreuzenden* Kanten von  $G$  einen *Schnitt*. Für  $v \in V$  schreiben wir wie gehabt  $E(v)$  statt  $E(\{v\}, V \setminus \{v\})$ .

Schnitt

**Proposition 0.9.3.** *Die Schnitte in  $G$  bilden zusammen mit  $\emptyset$  einen Unterraum von  $\mathcal{E}(G)$ . Dieser wird erzeugt durch die Schnitte der Form  $E(v)$ .*

[3.6.3]

*Beweis.* Es sei  $\mathcal{C}^*$  die Menge der Schnitte in  $G$ , zusammen mit  $\emptyset$ . Zum Beweis, daß  $\mathcal{C}^*$  ein Unterraum ist, ist zu zeigen, daß für alle  $D, D' \in \mathcal{C}^*$  auch  $D + D'$  ( $= D - D'$ ) in  $\mathcal{C}^*$  liegt. Wegen  $D + D = \emptyset \in \mathcal{C}^*$  und  $D + \emptyset = D \in \mathcal{C}^*$  dürfen wir annehmen, daß  $D$  und  $D'$  voneinander und von  $\emptyset$  verschieden sind. Sind solche Schnitte  $D, D' \in \mathcal{C}^*$  gegeben, etwa zu Partitionen  $\{V_1, V_2\}$  und  $\{V'_1, V'_2\}$  von  $V$ , so enthält  $D + D'$  gerade die Kanten, die genau eine der beiden Partitionen kreuzen (Abb. 0.9.1). Dies aber sind gerade die Kanten zwischen  $(V_1 \cap V'_1) \cup (V_2 \cap V'_2)$  und  $(V_1 \cap V'_2) \cup (V_2 \cap V'_1)$ , und diese beiden Mengen bilden (wegen  $D \neq D'$ ) erneut eine Partition von  $V$ . Somit ist  $D + D' \in \mathcal{C}^*$ , d.h.  $\mathcal{C}^*$  ist in der Tat ein Unterraum von  $\mathcal{E}(G)$ .

Abb. 0.9.1. Schnittkanten zu  $D + D'$ 

Daß die Schnitte der Form  $E(v)$  ganz  $\mathcal{C}^*$  erzeugen, liegt daran, daß jede Kante  $xy \in G$  in genau zwei solchen Schnitten liegt (in  $E(x)$  und in  $E(y)$ ); ist  $\{V_1, V_2\}$  eine beliebige Partition von  $V$ , so gilt deshalb  $E(V_1, V_2) = \sum_{v \in V_1} E(v)$ .  $\square$

Den Unterraum  $\mathcal{C}^* =: \mathcal{C}^*(G)$  von  $\mathcal{E}(G)$  aus Proposition 0.9.3 nennt man den *Schnitttraum* von  $G$ . Es ist nicht schwer, aus den Schnitten  $E(v)$  eine explizite Basis und damit die Dimension von  $\mathcal{C}^*$  zu bestimmen (Übung); zusammen mit Satz 0.9.5 erhält man so einen unabhängigen Beweis von Satz 0.9.6.

Schnitt-  
raum  $\mathcal{C}^*(G)$

Das folgende Lemma werden wir in Kapitel 3.6 zur Dualität ebener Graphen brauchen:

[3.6.2] **Lemma 0.9.4.** *In einem zusammenhängenden Graphen erzeugen die minimalen Schnitte den gesamten Schnittraum.*

*Beweis.* Beachte zunächst, daß in einem zusammenhängenden Graphen  $G = (V, E)$  ein Schnitt genau dann minimal ist, wenn beide der zugehörigen Eckenpartitions Mengen in  $G$  zusammenhängend sind. Ist nun  $C \subseteq G$  nicht leer und zusammenhängend, und  $D$  eine Komponente von  $G - C$ , so ist auch  $G - D$  zusammenhängend (Abb. 0.9.2). Die Kanten zwischen  $D$  und  $G - D$  bilden daher einen minimalen Schnitt. Nach Wahl von  $D$  ist dies genau die Menge  $E(C, D)$  aller  $C$ - $D$ -Kanten.

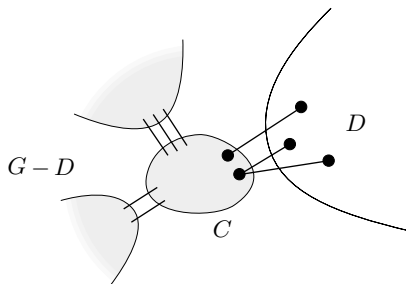


Abb. 0.9.2.  $G - D$  ist zusammenhängend, und  $E(C, D)$  ein minimaler Schnitt

Es sei nun  $\{V_1, V_2\}$  eine beliebige Partition von  $V$ . Ist  $C$  eine Komponente von  $G[V_1]$ , so ist  $E(C, V_2) = E(C, G - C)$  die disjunkte Vereinigung der Kantenmengen  $E(C, D)$  über alle Komponenten  $D$  von  $G - C$ , und somit nach der Vorüberlegung die disjunkte Vereinigung minimaler Schnitte. Die disjunkte Vereinigung der Kantenmengen  $E(C, V_2)$  über alle Komponenten  $C$  von  $G[V_1]$  ist aber gerade der betrachtete Schnitt  $E(V_1, V_2)$ . Dieser liegt somit im Erzeugnis der minimalen Schnitte  $E(C, D)$ .  $\square$

**Satz 0.9.5.** *Ist  $\mathcal{C}$  der Zyklenraum eines Graphen und  $\mathcal{C}^*$  sein Schnittraum, so gilt*

$$\mathcal{C} = \mathcal{C}^{*\perp} \quad \text{und} \quad \mathcal{C}^* = \mathcal{C}^\perp.$$

*Beweis.* Betrachten wir einen Graphen  $G = (V, E)$ . Offenbar enthält jeder Kreis in  $G$  aus jedem Schnitt eine gerade Anzahl von Kanten. Hieraus folgt  $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{C}^{*\perp}$ .

Zu jeder Kantenmenge  $F$ , die kein Zyklus ist, gibt es andererseits nach Proposition 0.9.2 eine Ecke  $v$ , die mit einer ungeraden Anzahl von

Kanten aus  $F$  inzident ist. Es gilt also  $\langle E(v), F \rangle = 1$ , und wegen  $E(v) \in \mathcal{C}^*$  folgt  $F \notin \mathcal{C}^{*\perp}$ . Damit ist  $\mathcal{C} = \mathcal{C}^{*\perp}$  bewiesen.

Zum Beweis von  $\mathcal{C}^* = \mathcal{C}^\perp$  reicht wegen  $\mathcal{C} = \mathcal{C}^{*\perp}$  ein Beweis von  $\mathcal{C}^* = (\mathcal{C}^{*\perp})^\perp$ . Davon folgt  $\mathcal{C}^* \subseteq (\mathcal{C}^{*\perp})^\perp$  direkt aus der Definition von  $\perp$ . Wegen

$$\dim \mathcal{C}^* + \dim \mathcal{C}^{*\perp} = m = \dim \mathcal{C}^{*\perp} + \dim (\mathcal{C}^{*\perp})^\perp$$

kann  $\mathcal{C}^*$  aber nicht echt kleiner sein als  $(\mathcal{C}^{*\perp})^\perp$ ; es gilt also  $\mathcal{C}^* = (\mathcal{C}^{*\perp})^\perp$  wie behauptet.  $\square$

**Satz 0.9.6.** Ist  $G = (V, E)$  ein zusammenhängender Graph mit  $|V| =: n$  und  $|E| =: m$ , so gilt [3.5.1]

$$\dim \mathcal{C}(G) = m - n + 1 \quad \text{und} \quad \dim \mathcal{C}^*(G) = n - 1.$$

*Beweis.* Nach Satz 0.9.5 gilt  $\dim \mathcal{C} + \dim \mathcal{C}^* = m$ . Es reicht daher,  $m - n + 1$  linear unabhängige Vektoren in  $\mathcal{C}$  und  $n - 1$  linear unabhängige Vektoren in  $\mathcal{C}^*$  zu finden: da  $(m - n + 1) + (n - 1) = m$  ist, kann dann die Dimension weder von  $\mathcal{C}$  noch von  $\mathcal{C}^*$  echt größer sein. (0.5.1)  
(0.5.3)

Es sei  $T$  ein Spannbaum von  $G$ . Nach Korollar 0.5.3 hat  $T$  genau  $n - 1$  Kanten; genau  $m - n + 1$  Kanten von  $G$  liegen also nicht auf  $T$ . Zu jeder dieser  $m - n + 1$  Kanten  $e \in E \setminus E(T)$  enthält  $T + e$  nach Satz 0.5.1 (iv) einen Kreis  $C_e$  (siehe Abb. 0.6.3). Da keine der Kanten  $e$  auf einem Kreis  $C_{e'}$  mit  $e' \neq e$  liegt, sind diese  $m - n + 1$  Kreise linear unabhängig.

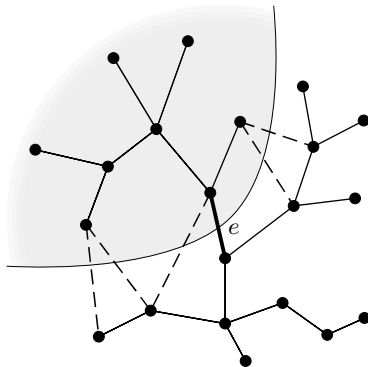


Abb. 0.9.3. Der Schnitt  $D_e$

Zu jeder der  $n - 1$  Kanten  $e \in T$  hat  $T - e$  nach Satz 0.5.1 (iii) genau zwei Komponenten, und die Menge  $D_e$  der Kanten von  $G$  zwischen diesen beiden Komponenten ist ein Schnitt in  $G$  (Abb. 0.9.3). Da keine Kante  $e \in T$  in einem Schnitt  $D_{e'}$  mit  $e' \neq e$  liegt, sind auch die Schnitte  $D_e$  linear unabhängig.  $\square$

Inzidenz-  
matrix

Die *Inzidenzmatrix*  $B = (b_{ij})_{n \times m}$  eines Graphen  $G = (V, E)$  mit  $V = \{v_1, \dots, v_n\}$  und  $E = \{e_1, \dots, e_m\}$  ist definiert über  $\mathbb{F}_2$  durch

$$b_{ij} := \begin{cases} 1 & \text{falls } v_i \in e_j \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

$B^t$  bezeichne wie üblich die zu  $B$  transponierte Matrix. Die Matrizen  $B$  und  $B^t$  definieren, bezüglich der Standardbasen, Homomorphismen  $B: \mathcal{E}(G) \rightarrow \mathcal{V}(G)$  und  $B^t: \mathcal{V}(G) \rightarrow \mathcal{E}(G)$ .

**Proposition 0.9.7.**

(i) Der Kern von  $B$  ist  $\mathcal{C}(G)$ .

(ii) Das Bild von  $B^t$  ist  $\mathcal{C}^*(G)$ . □

Adjazenz-  
matrix

Die *Adjazenzmatrix*  $A = (a_{ij})_{n \times n}$  von  $G$  ist definiert durch

$$a_{ij} := \begin{cases} 1 & \text{falls } v_i v_j \in E \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Unsere letzte Proposition zeigt einen einfachen Zusammenhang zwischen  $A$  und  $B$  (nunmehr als reelle Matrizen aufgefaßt). Mit  $D$  bezeichnen wir die reelle Diagonalmatrix  $(d_{ij})_{n \times n}$  mit  $d_{ii} = d(v_i)$  und  $d_{ij} = 0$  sonst.

**Proposition 0.9.8.**  $BB^t = A + D$ . □

## 0.10 Verwandte Begriffsbildungen

Der Übersicht halber erwähnen wir in diesem Abschnitt noch einige Begriffe, die im Text nicht oder nur am Rande vorkommen.

Hyper-  
graph

Ein *Hypergraph* ist ein Paar  $(V, E)$  disjunkter Mengen, bei dem jedes Element von  $E$  eine nicht leere Teilmenge (beliebiger Mächtigkeit) von  $V$  ist. Jeder Graph ist also ein spezieller Hypergraph.

gerichteter  
Graph

Ein *gerichteter Graph* ist ein Paar  $(V, E)$  disjunkter Mengen (von *Ecken* und *Kanten*) zusammen mit zwei Funktionen  $\text{init}: E \rightarrow V$  und  $\text{ter}: E \rightarrow V$ , die jeder Kante  $e$  eine *Anfangsecke*  $\text{init}(e)$  und eine *Endecke*  $\text{ter}(e)$  zuordnen; die Kante  $e$  heißt dann *von*  $\text{init}(e)$  *nach*  $\text{ter}(e)$  *gerichtet*. Man beachte, daß ein gerichteter Graph zwischen zwei Ecken  $x, y$  durchaus mehrere Kanten haben kann. Solche Kanten nennt man *Mehrfachkanten*; haben zwei Mehrfachkanten die gleiche Richtung (etwa beide von  $x$  nach  $y$ ), so sind sie *parallel*. Ist  $\text{init}(e) = \text{ter}(e)$ , so ist  $e$  eine *Schlinge*.

Mehrfach-  
kanten

Schlinge

Orientierung

Ein gerichteter Graph  $D$  ist eine *Orientierung* eines (ungerichteten) Graphen  $G$ , wenn  $V(D) = V(G)$  und  $E(D) = E(G)$  ist und  $\{\text{init}(e), \text{ter}(e)\} = \{x, y\}$  gilt für jede Kante  $e = xy$ . Ein solcher *orientierter Graph* entsteht also aus einem ungerichteten Graphen einfach

orientierter  
Graph

dadurch, daß jede Kante  $xy$  nachträglich “gerichtet” wird: entweder von  $x$  nach  $y$  oder von  $y$  nach  $x$  (aber nicht beides). Orientierte Graphen sind also gerichtete Graphen ohne Mehrfachkanten und Schlingen.

Ein *Multigraph* ist ein Paar  $(V, E)$  disjunkter Mengen (von *Ecken* und *Kanten*) zusammen mit einer Funktion  $E \rightarrow V \cup [V]^2$ , die jeder Kante ihre – ein oder zwei – *Endecken* zuordnet. Auch ein Multigraph kann also Mehrfachkanten und Schlingen haben; wir können ihn auffassen als einen gerichteten Graphen, bei dem wir die Richtungen seiner Kanten “vergessen” haben. Um auszudrücken, daß  $x$  und  $y$  die Endecken einer Kante  $e$  sind, schreiben wir auch bei Multigraphen  $e = xy$ ; die Kante  $e$  ist dadurch jedoch im allgemeinen nicht mehr eindeutig bestimmt.

Ein Graph ist im wesentlichen dasselbe wie ein Multigraph ohne Mehrfachkanten und Schlingen. Einen Satz über Graphen allgemeiner für Multigraphen zu zeigen, vereinfacht jedoch zuweilen den Beweis. Überdies gibt es Zusammenhänge, in denen Multigraphen natürlich auftreten und eine Beschränkung auf Graphen künstlich und technisch kompliziert wäre; das vielleicht wichtigste Beispiel hierfür ist die Dualität bei ebenen Graphen (Kapitel 3.6 und 5.5). Wir werden deshalb gelegentlich Multigraphen betrachten und dabei für Graphen definierte Begriffe informell weiterbenutzen, solange die gemeinte Bedeutung offensichtlich ist. Auf eine Besonderheit sei schon hier hingewiesen: in einem Multigraphen gelten sowohl Schlingen als auch Doppelkanten als Kreise, der Länge 1 bzw. 2.

Eine besondere Vereinfachung ergibt sich bei Kontraktionen. Kontrahieren wir eine Kante  $e = xy$  eines Multigraphen  $G = (V, E)$  zu einer neuen Ecke  $v_e$ , so verschwindet dabei zwar die Kante  $e$ , doch alle anderen Kanten bleiben erhalten: zu  $e$  parallele  $x$ - $y$ -Kanten werden zu Schlingen an  $v_e$ ; Kanten  $xw$  und  $yw$  werden zu Mehrfachkanten zwischen  $v_e$  und  $w$  (Abb. 0.10.1). Somit gilt ganz formal  $E(G/e) = E \setminus \{e\}$ ; nur die Inzidenzfunktion  $e' \mapsto \{\text{init}(e'), \text{ter}(e')\}$  wird bei der Übertragung auf

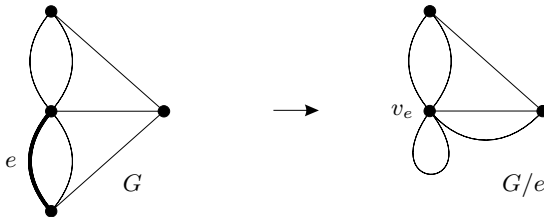


Abb. 0.10.1. Kontraktion einer Kante  $e$  in dem zu Abb. 0.8.1 gehörigen Multigraphen

$G/e$  der veränderten Eckenmenge angepaßt. Entsprechend vereinfacht sich der Begriff eines Minors.

Der größeren Klarheit halber sei noch bemerkt, daß in der Literatur dort, wo regelmäßig Multigraphen betrachtet werden, diese meist einfach

“Graphen” genannt werden; unsere Graphen heißen dort dann “schlichte Graphen”.

## Übungen

- 1.− Wieviele Kanten hat ein  $K^n$ ?
2. Es sei  $n \in \mathbb{N}$  und  $V := \{0, 1\}^n$ , d.h.  $V$  sei die Menge aller 0–1-Folgen der Länge  $n$ . Der Graph auf  $V$ , bei dem zwei Ecken genau dann benachbart sind, wenn sie sich in genau einer Koordinate unterscheiden, heißt  *$n$ -dimensionaler Würfel*. Bestimme Durchschnittsgrad, Kantenzahl, Durchmesser, Taillenweite und Umfang dieses Graphen.  
(Tip zum Umfang: Induktion nach  $n$ .)
3. Ein Graph  $G$  enthalte einen Kreis  $C$  und einen Weg  $P$  der Länge  $\geq k$  zwischen zwei Ecken von  $C$ . Zeige, daß  $G$  einen Kreis der Länge  $\geq \sqrt{k}$  enthält. Ist dies bestmöglich?
- 4.− Ist die Abschätzung in Proposition 0.3.2 bestmöglich?
5. Zeige, daß jeder Graph  $G$  die Ungleichung  $\text{rad } G \leq \text{diam } G \leq 2 \text{ rad } G$  erfüllt.
- 6.− Zeige, daß die Eckenmengen der Komponenten eines Graphen eine Partition seiner gesamten Eckenmenge bilden. (Mit anderen Worten: jede Ecke ist in genau einer Komponente enthalten.)
- 7.− Zeige, daß jeder 2-zusammenhängende Graph einen Kreis enthält.
8. (i)− Bestimme  $\kappa(G)$  und  $\lambda(G)$  für  $G = P^k, C^k, K^k, K_{m,n}$  ( $k, m, n \geq 3$ ).  
(ii)<sup>+</sup> Bestimme den Zusammenhang des  $n$ -dimensionalen Würfels (siehe Übung 2).  
(Tip zu (ii): Induktion nach  $n$ .)
9. Zeige, daß für nicht triviale Graphen  $G$  stets  $\kappa(G) \leq \lambda(G) \leq \delta(G)$  gilt.
- 10.− Gibt es eine Funktion  $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ , so daß Graphen mit Minimalgrad mindestens  $f(k)$  stets  $k$ -zusammenhängend sind?
11. Es seien  $\alpha, \beta$  zwei Grapheninvarianten mit Werten in  $\mathbb{N}$ . Formalisiere die folgenden beiden Aussagen und zeige dann, daß sie äquivalent sind:
  - (i)  $\alpha$  ist nach oben durch eine Funktion in  $\beta$  beschränkt;
  - (ii) wir können beliebig große Werte von  $\beta$  allein dadurch erzwingen, daß wir  $\alpha$  groß genug machen.
 Zeige, daß die Aussage
  - (iii)  $\beta$  ist nach unten durch eine Funktion in  $\alpha$  beschränkt
 nicht äquivalent zu (i) und (ii) ist. Durch welche kleine Änderung wird (iii) äquivalent zu (i) und (ii)?
- 12.<sup>+</sup> Wo liegt der tiefere Grund dafür, daß im Beweis von Satz 0.4.2 statt einer unteren Schranke für  $\varepsilon(G)$  eine Annahme der Form  $m \geq cn - b$  zugrundegelegt wird?

13. Beweise Satz 0.5.1.
14. Zeige, daß ein Baum  $T$  mindestens  $\Delta(T)$  Blätter hat.
15. Zeige, daß die mit einem Wurzelbaum  $T$  assoziierte ‘Baumordnung’ in der Tat eine partielle Ordnung auf  $V(T)$  ist, und beweise ihre im Text behaupteten Eigenschaften.
16. Es sei  $G$  ein zusammenhängender Graph und  $r \in G$  eine Ecke. Von  $r$  ausgehend, durchlaufe Kanten von  $G$  wie folgt: in jedem Schritt gehe wenn möglich zu einer noch nicht besuchten Ecke; ansonsten gehe zurück entlang der Kante, durch die die gegenwärtige Ecke erstmals erreicht wurde. Zeige, daß die insgesamt durchschrittenen Kanten einen normalen Spannbaum in  $G$  mit Wurzel  $r$  bilden.  
(Dieses Verfahren hat den normalen Spannbäumen die Bezeichnung *Tiefensuchbaum* eingetragen.)
17. Es sei  $\mathcal{T}$  eine Menge von Teilbäumen eines Baumes  $T$ . Je zwei Bäume aus  $\mathcal{T}$  haben einen nicht leeren Schnitt. Zeige, daß auch der Durchschnitt  $\bigcap \mathcal{T}$  aller Bäume aus  $\mathcal{T}$  nicht leer ist.
18. Zeige, daß jeder Automorphismus eines Baumes eine Ecke oder eine Kante festläßt.
19. Sind die Partitionsklassen eines regulären bipartiten Graphen stets gleich groß?
20. Zeige, daß ein Graph genau dann bipartit ist, wenn jeder *induzierte* Kreis gerade Länge hat.
- 21.<sup>+</sup> Finde eine Funktion  $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  mit der Eigenschaft, daß für alle  $k \in \mathbb{N}$  jeder Graph mit Durchschnittsgrad  $\geq f(k)$  einen bipartiten Teilgraphen mit Minimalgrad  $\geq k$  hat.
22. Zeige, daß die Minorenrelation  $\preccurlyeq$  eine Ordnungsrelation ist. Gilt dies auch für unendliche Graphen?
23. Beweise oder widerlege, daß in jedem zusammenhängenden Graphen ein Kantenzug existiert, der jede Kante in jeder ihrer beiden Richtungen genau einmal durchläuft.
- 24.<sup>-</sup> Zeige, daß jeder Zyklus eine Vereinigung kantendisjunkter Kreise ist.
25. Finde zu einem gegebenem Graphen unter den Schnitten der Form  $E(v)$  eine Basis für seinen Schnittraum.
26. Zeige, daß die Kreise und Schnitte eines Graphen zusammen seinen gesamten Kantenraum erzeugen – oder finde ein Gegenbeispiel.
27. Zeige direkt, daß die im Beweis von Satz 0.9.6 definierten Kreise  $C_e$  den ganzen Zyklenraum des Graphen erzeugen.
28. Zeige direkt, daß die im Beweis von Satz 0.9.6 definierten Schnitte  $D_e$  den ganzen Schnittraum des Graphen erzeugen.



29. Welche Dimension haben Zyklenraum und Schnittraum in einem Graphen mit  $k$  Komponenten?

## Notizen

Die in diesem Buch verwendete Terminologie steht in der von König, Wagner und Halin begründeten deutschsprachigen Tradition der Graphentheorie. Angelsächsische Rückimporte wie “adjazent” statt “benachbart” oder “Matching” statt “Paarung” sind bei den Definitionen und im Index zwar mit genannt, doch verwenden wir meist das deutsche Wort, wenn es schlichter oder leichter zu merken ist. (Zum Trost für Internationalisten: wer englische Wörter mag, findet in der entsprechenden Ausgabe dieses Buches davon mehr. . .)

Bei den Symbolen andererseits halten wir uns an die mittlerweile internationale üblichen Fassungen; so bezeichnet etwa  $E(G)$  die Kantenmenge (*the edge set*) von  $G$ , nicht seine Eckenmenge. Auch bei Konventionen verwenden wir englischen Standard – in der Hoffnung, damit den Zugang zu weiterführender Literatur und Originalarbeiten zu erleichtern. So heißen Wege typischerweise  $P$  (für *path*), Bäume  $T$ , usw.

In einem kleinen Punkt weicht unsere Notation vom internationalen Standard ab: statt unserer Bezeichnungen  $K^n$ ,  $P^n$ ,  $C^n$  etc. ist es in der Literatur üblich,  $K_n$ ,  $P_n$ ,  $C_n$  usw. zu schreiben. Abgesehen von einer gewissen Natürlichkeit, eine an Dimension erinnernde Größe durch einen oberen Index zu beziffern, hat unser kleiner Sonderweg hier im wesentlichen einen praktischen Grund: die unteren Indizes bleiben so frei für den ad-hoc-Gebrauch, d.h. wir können von Wegen  $P_1, \dots, P_k$  sprechen, oder von Komponenten  $C_1$  und  $C_2$ .

Satz 0.4.2 ist von W. Mader, Existenz  $n$ -fach zusammenhängender Teilgraphen in Graphen genügend großer Kantendichte, *Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg* **37** (1972) 86–97; Satz 0.8.1 aus L. Euler, *Solutio problematis ad geometriam situs pertinentis*, *Comment. Acad. Sci. I. Petropolitanae* **8** (1736), 128–140. Zur Geschichte des Königsberger Brückenproblems (und zu Eulers tatsächlichem Anteil an seiner Lösung) vergleiche N.L. Biggs, E.K. Lloyd & R.J. Wilson, *Graph Theory 1736–1936*, Oxford University Press 1976.

Von dem weiten Gebiet der Algebraischen Graphentheorie vermittelt Abschnitt 0.9 kaum einen angemessenen Eindruck. Ein Klassiker hierzu ist N.L. Biggs, *Algebraic Graph Theory* (2. Auflage), Cambridge University Press 1993. Eine weitere umfassende Darstellung geben C.D. Godsil & G.F. Royle, *Algebraic Graph Theory* (in Vorbereitung). Auch das *Handbook of Combinatorics* (R.L. Graham, M. Grötschel & L. Lovász, Hrsg.), North-Holland 1995, enthält interessante Artikel über algebraische Methoden in der Graphentheorie. Die im Text verwendete Identität  $\dim W + \dim W^\perp = \dim V$  für beliebige Vektorräume  $V$  und Unterräume  $W$  findet man etwa in G. Fischer, *Lineare Algebra* (10. Auflage), Vieweg 1995 bewiesen (Kap. 6.1, oder Kor. 2.3.1(1) mit Satz 2.6.6).

Eine Menge  $M$  unabhängiger Kanten in einem Graphen  $G = (V, E)$  nennt man ein *Matching* oder eine *Paarung*.  $M$  ist eine Paarung von  $U \subseteq V$ , wenn jede Ecke aus  $U$  mit einer Kante aus  $M$  inzident ist. Die Ecken aus  $U$  heißen dann (in  $M$ ) *gepaart*; mit keiner Kante aus  $M$  inzidente Ecken sind *ungepaart*.

*Paarung*

*gepaarte  
Ecken*

Einen  $k$ -regulären aufspannenden Teilgraphen nennt man einen  $k$ -*Faktor*. Ein Teilgraph  $H \subseteq G$  ist also genau dann ein 1-Faktor von  $G$ , wenn  $E(H)$  eine Paarung von  $V$  ist.

*Faktor*

Das Problem, welche Graphen einen 1-Faktor haben, d.h. eine Paarung ihrer gesamten Eckenmenge, ist die Leitfrage dieses Kapitels.

## 1.1 Paarungen in bipartiten Graphen

Für diesen gesamten Abschnitt sei  $G = (V, E)$  ein fester bipartiter Graph mit Eckenpartition  $\{A, B\}$ . Als  $a, a'$  usw. bezeichnete Ecken von  $G$  liegen generell in  $A$ , als  $b$  usw. bezeichnete in  $B$ .

$G = (V, E)$

$A, B$

$a, b$  etc.

Wie finden wir in  $G$  eine Paarung größtmöglicher Mächtigkeit? Betrachten wir zunächst eine beliebige Paarung  $M$  in  $G$ . Ein Weg in  $G$ , der in einer ungepaarten Ecke aus  $A$  beginnt und dann abwechselnd Kanten aus  $E \setminus M$  und aus  $M$  enthält, ist ein *alternierender Weg* (bezüglich  $M$ ). Einen alternierenden Weg  $P$ , der in einer ungepaarten Ecke aus  $B$  endet, nennt man einen *Verbesserungsweg* (Abb. 1.1.1). Die symmetrische Differenz  $M'$  von  $M$  mit  $E(P)$  ist nämlich eine Paarung in  $G$  von größerer Mächtigkeit als  $|M|$ : jede innere Ecke von  $P$  ist in  $M'$  wie in  $M$  gepaart, und zusätzlich sind in  $M'$  die beiden Endecken von  $P$  gepaart.

*alternierend*

*Verbesserungsweg*

Alternierende Wege spielen bei der praktischen Suche nach möglichst großen Paarungen eine wesentliche Rolle. Wie man leicht zeigt (Übung), gibt es nämlich zu jeder Paarung, die weniger Kanten enthält

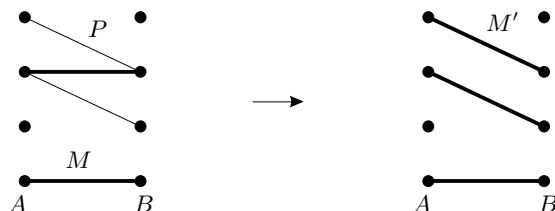


Abb. 1.1.1. Verbesserung von  $M$  zu  $M'$  durch den alternierenden Weg  $P$

als möglich, einen Verbesserungsweg; durch sukzessives Verbessern einer beliebigen Anfangspaarung läßt sich somit eine Paarung maximaler Mächtigkeit gewinnen.

Unser erster Satz charakterisiert die größte Mächtigkeit einer Paarung in  $G$  durch eine Art Dualitätsbedingung. Wir nennen eine Menge  $U \subseteq V$  eine *Eckenüberdeckung* von  $G$ , wenn jede Kante von  $G$  mit einer Ecke aus  $U$  inzident ist.

**Satz 1.1.1.** (König 1931)

Die größte Mächtigkeit einer Paarung in  $G$  ist gleich der geringsten Mächtigkeit einer Eckenüberdeckung.

*Beweis.* Es sei  $M$  eine Paarung in  $G$  von maximaler Mächtigkeit. Wir wählen aus jeder Kante von  $M$  eine Ecke aus: ihre Ecke in  $B$ , falls in dieser Ecke ein alternierender Weg endet, und sonst ihre Ecke in  $A$  (Abb. 1.1.2). Wir zeigen, daß die Menge  $U$  der  $|M|$  so ausgewählten Ecken eine Eckenüberdeckung von  $G$  ist: da jede Eckenüberdeckung alle Kanten von  $M$  treffen muß, kann es keine Überdeckung durch weniger Ecken geben, und so folgt hieraus die Behauptung.

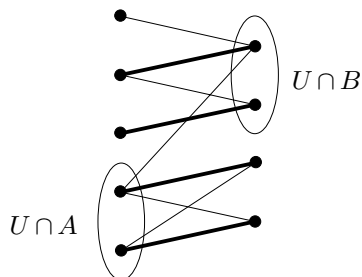


Abb. 1.1.2. Die Eckenüberdeckung  $U$

Es sei  $ab \in E$  eine beliebige Kante; wir zeigen, daß  $a$  oder  $b$  in  $U$  liegt. Ist  $ab \in M$ , so gilt dies nach Definition von  $U$ ; es sei also  $ab \notin M$ . Wegen seiner Maximalität enthält  $M$  eine Kante  $a'b'$  mit  $a = a'$  oder  $b = b'$ . Wir dürfen  $a = a'$  annehmen: ist nämlich  $a$  ungepaart (und  $b = b'$ ),

Eckenüber-  
deckung

$M$

$U$

so ist  $ab$  ein alternierender Weg, und aus der Kante  $a'b' \in M$  wurde die Ecke  $b' = b$  für  $U$  gewählt. Liegt  $a' = a$  nicht in  $U$ , so ist  $b' \in U$ , d.h. in  $b'$  endet ein alternierender Weg  $P$ . Dann endet auch in  $b$  ein alternierender Weg  $P'$ : entweder  $P' := Pb$  (falls  $b \in P$ ) oder  $P' := Pb'a'b$ . Da  $P'$  wegen der Maximalität von  $M$  kein Verbesserungsweg sein kann, ist  $b$  gepaart und wurde aus seiner Paarungskante für  $U$  gewählt.  $\square$

Was leistet Satz 1.1.1 zur Beantwortung der speziellen Frage, wann  $G$  eine Paarung von ganz  $A$  enthält? Offensichtlich notwendig hierfür ist, daß es für jede Teilmenge von  $A$  genügend Nachbarn in  $B$  gibt, daß also gilt:

$$|N(S)| \geq |S| \quad \text{für alle } S \subseteq A.$$

Heirats-  
bedingung

Der folgende sogenannte *Heiratssatz* besagt, daß diese einfache notwendige Bedingung auch hinreichend ist zur Existenz einer Paarung von  $A$ :

**Satz 1.1.2.** (Hall 1935)

$G$  enthält genau dann eine Paarung von  $A$ , wenn  $|N(S)| \geq |S|$  gilt für alle Eckenmengen  $S \subseteq A$ .

Heiratssatz

Wir geben drei Beweise, daß aus der genannten "Heiratsbedingung" die Existenz einer Paarung von  $A$  folgt. Der erste Beweis fußt auf dem Satz von König; der zweite ist ein direkter konstruktiver Beweis mittels alternierender Wege; der dritte Beweis ist unabhängig von allen bisherigen Betrachtungen.

**Erster Beweis.** Enthält  $G$  keine Paarung von  $A$ , so hat  $G$  nach Satz 1.1.1 eine Eckenüberdeckung  $U$  durch weniger als  $|A|$  Ecken, sagen wir  $U = A' \cup B'$  mit  $A' \subseteq A$  und  $B' \subseteq B$ . Dann gilt

$$|A'| + |B'| = |U| < |A|,$$

und somit

$$|B'| < |A| - |A'| = |A \setminus A'|$$

(Abb. 1.1.3). Nach Definition von  $U$  hat  $G$  aber keine Kante zwischen

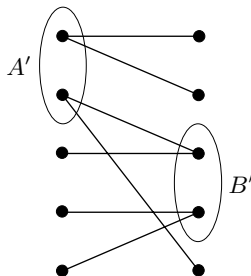


Abb. 1.1.3. Eine Überdeckung durch weniger als  $|A|$  Ecken

$A \setminus A'$  und  $B \setminus B'$ , d.h.

$$|N(A \setminus A')| \leq |B'| < |A \setminus A'|.$$

Für  $S := A \setminus A'$  ist die Heiratsbedingung also nicht erfüllt.  $\square$

$M$

**Zweiter Beweis.** Es sei  $M$  eine Paarung von  $G$ , in der nicht alle Ecken aus  $A$  gepaart sind; wir konstruieren zu  $M$  einen Verbesserungsweg. Es sei  $a_0, b_1, a_1, b_2, a_2, \dots$  eine maximale Folge verschiedener Ecken  $a_i \in A$  und  $b_i \in B$  mit den folgenden Eigenschaften für alle  $i \geq 1$  (Abb. 1.1.4):

(i)  $a_0$  ist ungepaart;

$f(i)$

(ii)  $b_i$  ist zu einer Ecke  $a_{f(i)} \in \{a_0, \dots, a_{i-1}\}$  benachbart;

(iii)  $a_i b_i \in M$ .

Aufgrund der Heiratsbedingung kann unsere Folge nicht in einer Ecke aus  $A$  enden: die  $i$  Ecken  $a_0, \dots, a_{i-1}$  haben insgesamt mindestens  $i$  Nachbarn in  $B$ , also nicht nur die Ecken  $b_1, \dots, b_{i-1}$ . Es sei  $b_k \in B$  die letzte Ecke der Folge. Nach (i)–(iii) ist

$k$

$P$

$$P := b_k a_{f(k)} b_{f(k)} a_{f^2(k)} b_{f^2(k)} a_{f^3(k)} \dots a_{f^r(k)}$$

mit  $f^r(k) = 0$  ein alternierender Weg.

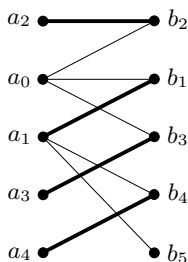


Abb. 1.1.4. Zum zweiten Beweis des Heiratsatzes

Woran kann es liegen, daß unsere Eckenfolge nicht verlängerbar ist? Gibt es ein  $a \in A$  mit  $ab_k \in M$ , so könnten wir sie mit  $a_k := a$  verlängern – es sei denn, es ist bereits  $a = a_i$  mit  $0 < i < k$ . Nach (iii) wäre dann jedoch  $b_k = b_i$ , mit Widerspruch. Daß wir die Folge nicht verlängern können, kann also nur den Grund haben, daß  $b_k$  nicht gepaart ist. Dann aber ist  $P$  ein Verbesserungsweg zwischen  $b_k$  und  $a_0$ .  $\square$

**Dritter Beweis.** Wir verwenden Induktion nach  $|A|$ . Für  $|A| = 1$  ist die Behauptung wahr. Es sei nun  $|A| \geq 2$ , und für kleinere  $|A|$  sei die Heiratsbedingung hinreichend zur Existenz einer Paarung von  $A$ .

Gilt  $|N(S)| \geq |S| + 1$  für jedes nicht leere  $S \subsetneq A$ , so wählen wir irgendeine Kante  $ab \in G$  und betrachten  $G' := G - \{a, b\}$ . Für jedes nicht leere  $S \subseteq A \setminus \{a\}$  gilt dann

$$|N_{G'}(S)| \geq |N_G(S)| - 1 \geq |S|,$$

d.h. nach Induktionsannahme enthält  $G'$  eine Paarung von  $A \setminus \{a\}$ . Zusammen mit der Kante  $ab$  ergibt dies eine Paarung von  $A$  in  $G$ .

Es gebe also ein nicht leeres  $A' \subsetneq A$  mit  $|B'| = |A'|$  für  $B' := N(A')$ . Nach Induktionsannahme enthält  $G' := G[A' \cup B']$  eine Paarung von  $A'$ . Nun erfüllt aber auch  $G - G'$  die Heiratsbedingung: gäbe es ein  $S \subseteq A \setminus A'$  mit  $|N_{G-G'}(S)| < |S|$ , so wäre  $|N_G(S \cup A')| < |S \cup A'|$ , mit Widerspruch. Nach Induktionsannahme enthält somit auch  $G - G'$  eine Paarung von  $A \setminus A'$ , und wir können die beiden Paarungen zu einer Paarung von  $A$  in  $G$  zusammensetzen.  $\square$

$A', B'$   
 $G'$

**Korollar 1.1.3.** Gilt  $|N(S)| \geq |S| - d$  für jede Menge  $S \subseteq A$  und ein festes  $d \in \mathbb{N}$ , so enthält  $G$  eine Paarung der Mächtigkeit  $|A| - d$ . [1.2.3]

*Beweis.* Füge  $d$  neue Ecken zu  $B$  hinzu und verbinde sie jeweils mit allen Ecken in  $A$ . Nach Satz 1.1.2 enthält der neue Graph eine Paarung von  $A$ , und mindestens  $|A| - d$  Kanten dieser Paarung sind Kanten von  $G$ .  $\square$

**Korollar 1.1.4.** Ist  $G$   $k$ -regulär mit  $k \geq 1$ , so hat  $G$  einen 1-Faktor.

*Beweis.* Ist  $G$   $k$ -regulär, so gilt offenbar  $|A| = |B|$ ; es reicht also, mit Satz 1.1.2 zu zeigen, daß  $G$  eine Paarung von  $A$  enthält. Nun gehen von jeder Menge  $S \subseteq A$  insgesamt  $k|S|$  Kanten nach  $N(S)$ , und diese Kanten gehören zu den  $k|N(S)|$  Kanten, die insgesamt mit  $N(S)$  inzident sind. Es gilt also  $k|S| \leq k|N(S)|$ , d.h.  $G$  erfüllt in der Tat die Heiratsbedingung.  $\square$

Zahlreichen Anwendungen des Heiratssatzes geht eine – zuweilen recht clevere – Aufbereitung des eigentlich zu lösenden Problems voraus, seine Umwandlung in die immerhin recht spezielle Form eines bipartiten Paarungsproblems. Als einfaches Beispiel leiten wir aus dem Heiratssatz einen der ältesten Sätze der Graphentheorie her, dessen Originalbeweis gar nicht so einfach (und gewiß nicht kurz) ist:

**Korollar 1.1.5.** (Petersen 1891)

Jeder reguläre Graph graden Grades  $> 0$  hat einen 2-Faktor.

(0.8.1) *Beweis.* Es sei  $G$  ein beliebiger  $2k$ -regulärer Graph ( $k \geq 1$ ), oBdA zusammenhängend. Nach Satz 0.8.1 enthält  $G$  einen eulerschen Kantenzug  $v_0 e_0 \dots e_{\ell-1} v_\ell$ , mit  $v_\ell = v_0$ . Wir ersetzen jetzt jede Ecke  $v$  durch ein Eckenpaar  $(v^-, v^+)$  und jede Kante  $e_i = v_i v_{i+1}$  durch die Kante  $v_i^+ v_{i+1}^-$  (Abb. 1.1.5). Der entstandene bipartite Graph ist  $k$ -regulär und hat somit nach Korollar 1.1.4 einen 1-Faktor. Identifizieren wir in diesem 1-Faktor jedes Eckenpaar  $(v^-, v^+)$  wieder zur ursprünglichen Ecke  $v$ , so erhalten wir einen 2-Faktor in  $G$ .  $\square$

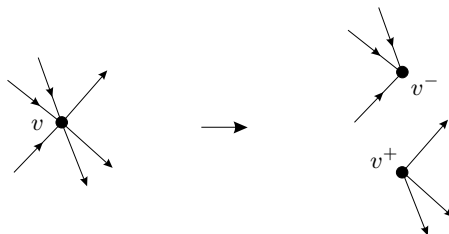


Abb. 1.1.5. Die Eckenpaltung im Beweis von Korollar 1.1.5

## 1.2 Paarungen in allgemeinen Graphen

$\mathcal{C}_G$   
 $q(G)$  Für einen Graphen  $G$  bezeichne  $\mathcal{C}_G$  die Menge seiner Komponenten und  $q(G)$  die Anzahl seiner *ungeraden Komponenten*, der Komponenten ungerader Ordnung. Hat  $G$  einen 1-Faktor, so gilt offenbar

*Tutte-*  
*Bedingung*

$$q(G - S) \leq |S| \quad \text{für alle } S \subseteq V(G).$$

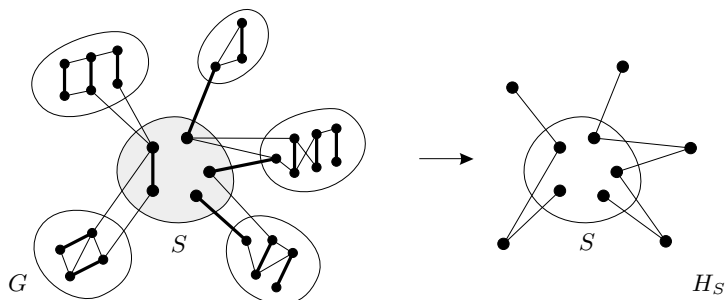


Abb. 1.2.1. Die Tutte-Bedingung  $q(G - S) \leq |S|$  für  $q = 3$ , und der kontrahierte Graph  $H_S$

Daß auch die Umkehrung dieser Implikation gilt, ist ein weiterer klassischer Satz der Graphentheorie:

**Satz 1.2.1.** (Tutte 1947)

Ein Graph  $G$  hat genau dann einen 1-Faktor, wenn  $q(G - S) \leq |S|$  gilt für alle  $S \subseteq V(G)$ .

*Beweis.* Es sei  $G = (V, E)$  ein Graph ohne 1-Faktor. Wir werden eine Menge  $S \subseteq V$  finden, die die Tutte-Bedingung verletzt; solche Mengen nennen wir *schlecht*.

$V, E$

*schlecht*

Wir dürfen annehmen, daß  $G$  kantenmaximal ist ohne 1-Faktor. Ist nämlich  $S \subseteq V$  schlecht in einem Graphen  $G' \supseteq G$ , der aus  $G$  durch Hinzufügung von Kanten entstanden ist, so ist  $S$  auch schlecht in  $G$ : jede ungerade Komponente von  $G' - S$  ist die Vereinigung von Komponenten von  $G - S$ , und von diesen muß dann auch jeweils eine ungerade sein.

Wie sieht  $G$  aus? Falls  $G$  eine schlechte Menge  $S$  enthält, dann hat  $G$  aufgrund seiner Kantenmaximalität und der trivialen Vorwärtsrichtung des Satzes die folgende Struktur:

Alle Komponenten von  $G - S$  sind vollständig, und jede Ecke aus  $S$  ist zu allen Ecken außer sich selbst benachbart. (\*)

Erfüllt umgekehrt eine Menge  $S \subseteq V$  die Bedingung (\*), so ist  $S$  auch notwendig schlecht (es sei denn, die leere Menge ist schlecht, was uns ja auch genügt): wäre  $S$  nicht schlecht, so könnten wir die ungeraden Komponenten von  $G - S$  disjunkt mit  $S$  verbinden und die restlichen Ecken zu Paaren benachbarter Ecken zusammenfassen – es sei denn,  $|G|$  ist ungerade, doch dann ist  $\emptyset$  schlecht in  $G$ .

Es reicht also, eine Menge  $S$  zu finden, die (\*) erfüllt. Dazu sei  $S$  die Menge derjenigen Ecken, die zu allen Ecken (außer sich selbst) benachbart sind. Erfüllt dieses  $S$  nicht (\*), so gibt es eine Komponente von  $G - S$  mit nicht benachbarten Ecken  $a, a'$ . Sind  $a, b, c$  die ersten drei Ecken auf einem kürzesten  $a-a'$ -Weg in dieser Komponente, so haben wir  $ab, bc \in E$  und  $ac \notin E$ . Wegen  $b \notin S$  gibt es überdies eine Ecke  $d \in V$  mit  $bd \notin E$ . Wegen der Kantenmaximalität von  $G$  gibt es dann eine Paarung  $M_1$  von  $V$  in  $G + ac$  und eine Paarung  $M_2$  von  $V$  in  $G + bd$ .

$S$

$a, b, c$

$d$

$M_1, M_2$

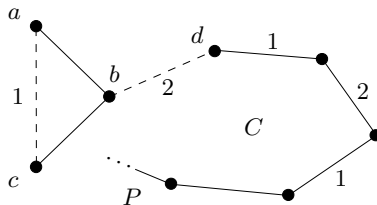


Abb. 1.2.2. Was passiert, wenn  $S$  nicht (\*) erfüllt

Es sei  $P = d \dots v$  ein maximaler Weg in  $G$ , der in  $d$  mit einer Kante aus  $M_1$  beginnt und dann abwechselnd Kanten aus  $M_1$  und  $M_2$  enthält. Liegt die letzte Kante von  $P$  in  $M_1$ , so gilt  $v = b$ , da wir  $P$  sonst

$v$



fortsetzen könnten; wir setzen dann  $C := P + bd$ . Liegt die letzte Kante von  $P$  in  $M_2$ , so muß wegen der Maximalität von  $P$  die mit  $v$  inzidente  $M_1$ -Kante die Kante  $ac$  sein; dann ist  $v \in \{a, c\}$ , und wir bezeichnen den Kreis  $dPvbd$  mit  $C$ . In beiden Fällen ist  $C$  ein Kreis gerader Länge, bei dem jede zweite Kante in  $M_2$  liegt, und dessen Kanten außer  $bd$  alle in  $G$  liegen. Indem wir in  $M_2$  die Kanten auf  $C$  durch die Kanten von  $C - M_2$  ersetzen, erhalten wir eine in  $E$  enthaltene Paarung von  $V$ , mit Widerspruch.  $\square$

**Korollar 1.2.2.** (Petersen 1891)

*Jeder brückenlose kubische Graph hat einen 1-Faktor.*

*Beweis.* Wir zeigen, daß jeder brückenlose kubische Graph  $G$  der Tutte-Bedingung genügt. Sei dazu  $S \subseteq V(G)$  gegeben und  $C$  eine ungerade Komponente von  $G - S$ . Da  $G$  kubisch ist, ist die Summe der Eckengrade (in  $G$ ) aller Ecken in  $C$  ungerade, aber nur ein gerader Anteil dieser Summe kommt von Kanten aus  $C$ . Somit hat  $G$  eine ungerade Anzahl von  $S$ - $C$ -Kanten. Da  $G$  keine Brücke hat, gibt es mindestens drei solche Kanten. Die Gesamtzahl der Kanten zwischen  $S$  und  $G - S$  beträgt somit mindestens  $3q(G - S)$ . Sie beträgt aber auch höchstens  $3|S|$ , da  $G$  kubisch ist. Es gilt daher  $q(G - S) \leq |S|$ , wie erwünscht.  $\square$

Um den Satz von Tutte noch von einer anderen Seite zu beleuchten, geben wir noch einen zweiten Beweis. Wir beweisen sogar einen etwas stärkeren Satz, der überdies interessante strukturelle Aussagen zur Lage sämtlicher größtmöglicher Paarungen in beliebigen Graphen impliziert – auch dann, wenn diese keinen 1-Faktor enthalten.

Ein Graph  $G = (V, E)$  heiße *faktorkritisch*, wenn  $G \neq \emptyset$  ist und  $G - v$  für jede Ecke  $v$  einen 1-Faktor hat.  $G$  selbst hat dann natürlich keinen 1-Faktor, da es ungerade Ordnung hat. Eine Eckenmenge  $S \subseteq V$  heiße *paarbar nach  $G - S$* , wenn der (bipartite<sup>1</sup>) Graph  $H_S$ , der aus  $G$  durch Kontraktion der Komponenten  $C \in \mathcal{C}_{G-S}$  und Löschen aller Kanten innerhalb von  $S$  entsteht, eine Paarung von  $S$  enthält. (Formal ist  $H_S$  der Graph mit Eckenmenge  $S \cup \mathcal{C}_{G-S}$  und Kantenmenge  $\{sC \mid \exists c \in C : sc \in E\}$ ; siehe Abb. 1.2.1.)

**Satz 1.2.3.** *Jeder Graph  $G = (V, E)$  enthält eine Eckenmenge  $S$  mit den folgenden beiden Eigenschaften:*

- (i)  $S$  ist paarbar nach  $G - S$ ;
- (ii) jede Komponente von  $G - S$  ist faktorkritisch.

*Für jedes solche  $S$  enthält  $G$  genau dann einen 1-Faktor, wenn  $|S| = |\mathcal{C}_{G-S}|$  ist.*

<sup>1</sup> abgesehen von dem – gestatteten – Fall, daß  $S$  oder  $\mathcal{C}_{G-S}$  leer ist

faktor-  
kritisch

paarbar

$H_S$

Für jedes gegebene  $G$  folgt die Aussage des Satzes von Tutte leicht aus der Aussage dieses Satzes. Mit (i) und (ii) gilt nämlich  $|S| \leq |\mathcal{C}_{G-S}| = q(G-S)$  (da faktorkritische Graphen ungerade Ordnung haben); aus der Tutte-Bedingung  $q(G-S) \leq |S|$  folgt somit  $|S| = |\mathcal{C}_{G-S}|$ , und damit nach der letzten Aussage des Satzes die Existenz eines 1-Faktors.

**Beweis von Satz 1.2.3.** Zunächst ist klar, daß die letzte Aussage des Satzes sofort aus den Eigenschaften (i) und (ii) von  $S$  folgt: hat  $G$  einen 1-Faktor, so gilt  $q(G-S) \leq |S|$  und damit wie oben die Identität  $|S| = |\mathcal{C}_{G-S}|$ ; gilt andererseits  $|S| = |\mathcal{C}_{G-S}|$ , so folgt die Existenz eines 1-Faktors direkt aus (i) und (ii). (1.1.3)

Wir beweisen jetzt die Existenz von  $S$ , mit Induktion nach  $|G|$ . Für  $|G| = 0$  leistet  $S = \emptyset$  das Gewünschte. Es sei nun  $|G| > 0$ , und die Behauptung gelte für Graphen kleinerer Ordnung.

Es sei  $d \geq 0$  minimal mit der folgenden Eigenschaft:  $d$

$$q(G-T) \leq |T| + d \quad \text{für jedes } T \subseteq V. \quad (*)$$

Es gibt dann ein  $T$ , für das in  $(*)$  Gleichheit gilt: dies folgt aus der Minimalwahl von  $d$ , falls  $d > 0$  ist, und aus  $q(G-\emptyset) \geq |\emptyset| + 0$ , falls  $d = 0$  ist. Es sei  $S$  ein solches  $T$  maximaler Mächtigkeit, und es sei  $\mathcal{C} := \mathcal{C}_{G-S}$  sowie  $H := H_S$ .  $S$   
 $\mathcal{C}, H$

Wir zeigen zunächst, daß jedes  $C \in \mathcal{C}$  ungerade Ordnung hat. Anderenfalls betrachte eine beliebige Ecke  $c \in C$ , und setze  $S' := S \cup \{c\}$  sowie  $C' := C - c$ . Dann hat  $C'$  ungerade Ordnung und somit mindestens eine ungerade Komponente; es gilt also  $|S'| = |S| + 1$  und  $q(G-S') \geq q(G-S) + 1$ . Da für  $T := S$  in  $(*)$  Gleichheit gilt, folgt

$$q(G-S') \geq q(G-S) + 1 = |S| + d + 1 = |S'| + d,$$

was entweder  $(*)$  oder der Maximalität von  $S$  widerspricht.

Als nächstes zeigen wir die Aussage (ii), daß jedes  $C \in \mathcal{C}$  faktorkritisch ist. Angenommen, es gibt ein  $C \in \mathcal{C}$  und  $c \in C$ , so daß  $C' := C - c$  keinen 1-Faktor enthält. Nach Induktionsannahme (und der vorweg gezeigten Tatsache, daß für festes  $G$  der Satz von Tutte aus unserem Satz folgt) existiert dann ein  $T' \subseteq V(C')$  mit

$$q(C' - T') > |T'|.$$

Da  $|C|$  ungerade und somit  $|C'|$  gerade ist, sind aber  $q(C' - T')$  und  $|T'|$  entweder beide gerade oder beide ungerade, unterscheiden sich also nicht um genau 1. Somit folgt schärfer

$$q(C' - T') \geq |T'| + 2.$$

Insgesamt haben wir dann für  $T := S \cup \{c\} \cup T'$

$$\begin{aligned} q(G - T) &= q(G - S) - 1 + q(C' - T') \\ &\geq |S| + d - 1 + |T'| + 2 \\ &= |T| + d, \end{aligned}$$

was entweder (\*) oder der Maximalität von  $S$  widerspricht.

Es bleibt zu zeigen, daß  $S$  nach  $G - S$  paarbar ist. Im Falle  $S = \emptyset$  ist dies trivial; es sei also  $S \neq \emptyset$ . Da für  $T = S$  in (\*) Gleichheit gilt, ist dann auch  $C \neq \emptyset$ . Wir wenden Korollar 1.1.3 “rückwärts” an, mit  $A := C$ . Es sei  $C' \subseteq C$  gegeben und  $S' := N_H(C') \subseteq S$ . Da jedes  $C \in C'$  ungerade Ordnung hat und auch eine Komponente von  $G - S'$  ist, folgt

$$|N_H(C')| = |S'| \underset{(*)}{\geq} q(G - S') - d \geq |C'| - d.$$

Nach Korollar 1.1.3 enthält  $H$  somit eine Paarung der Mächtigkeit

$$|C| - d = q(G - S) - d = |S|,$$

die dann offenbar eine Paarung von  $S$  ist. □

 $S$  $C$  $k_S, k_C$ 

Betrachten wir noch einmal die Menge  $S$  aus Satz 1.2.3, sowie eine beliebige Paarung  $M$  in  $G$ . Wir schreiben wieder  $C := C_{G-S}$ . Es sei  $k_S$  die Anzahl der Kanten aus  $M$  mit mindestens einer Endecke in  $S$ , und  $k_C$  die Anzahl der Kanten aus  $M$  mit beiden Endecken in  $G - S$ . Da jedes  $C \in C$  ungerade Ordnung hat, wird mindestens eine seiner Ecken von keiner Kante der zweiten Art getroffen. Für jedes  $M$  gilt somit

$$k_S \leq |S| \quad \text{und} \quad k_C \leq \frac{1}{2}(|V| - |S| - |C|). \quad (1)$$

 $M_0$ 

Überdies hat  $G$  eine Paarung  $M_0$ , für die hier in beiden Fällen Gleichheit gilt: wähle zuerst  $|S|$  Kanten von  $S$  nach  $\bigcup C$  gemäß (i), und sodann nach (ii) geeignete Mengen von  $\frac{1}{2}(|C| - 1)$  Kanten in jeder Komponente  $C \in C$ . Diese Paarung  $M_0$  hat also genau

$$|M_0| = |S| + \frac{1}{2}(|V| - |S| - |C|) \quad (2)$$

Kanten.

Aus (1) und (2) zusammen folgt nun, daß für *jede* Paarung  $M$  maximaler Mächtigkeit in den beiden Ungleichungen von (1) Gleichheit gelten muß: wegen  $|M| \geq |M_0|$  und (2) hat  $M$  mindestens  $|S| + \frac{1}{2}(|V| - |S| - |C|)$  Kanten, und mit (1) folgt hieraus, daß keine der beiden Ungleichungen in (1) echt sein kann. Gleichheit in (1) aber impliziert ihrerseits, daß  $M$  die obige Struktur hat: wegen  $k_S = |S|$  enthält  $M$  für jedes  $s \in S$

eine Kante  $st$  mit  $t \in G - S$ , und wegen  $k_C = \frac{1}{2}(|V| - |S| - |C|)$  enthält  $M$  für jedes  $C \in \mathcal{C}$  genau  $\frac{1}{2}(|C| - 1)$  Kanten aus  $C$ ; da letztere nur eine Ecke von  $C$  aussparen, liegen die Endecken  $t$  der Kanten  $st$  überdies in verschiedenen  $C$ .

Hinter Satz 1.2.3 versteckt sich mithin ein Struktursatz für alle Paarungen  $M$  maximaler Mächtigkeit, in beliebigen Graphen.

### 1.3 Überdeckungen durch disjunkte Wege

Betrachten wir noch einmal den Überdeckungssatz 1.1.1 von König für bipartite Graphen  $G$  (mit Eckenpartition  $\{A, B\}$ ). Richten wir in  $G$  jede Kante von  $A$  nach  $B$ , so gibt uns der Satz eine Antwort auf die Frage, wieviele disjunkte gerichtete Wege wir benötigen, um die ganze Eckenmenge von  $G$  zu überdecken: jeder gerichtete Weg hat die Länge 0 oder 1, und die Anzahl der Wege in einer solchen Überdeckung ist offenbar dann am geringsten, wenn sie möglichst viele Wege der Länge 1, also eine möglichst große Paarung enthält.

In diesem Abschnitt stellen wir diese Frage allgemeiner: wieviele Wege in einem gerichteten Graphen reichen aus, um seine gesamte Eckenmenge disjunkt zu überdecken? Daß wir hier ausnahmsweise gerichtete Graphen behandeln, hat außer der Analogie zum Satz von König noch einen weiteren Grund: der Satz, den wir beweisen werden, ist im ungerichteten Fall zwar auch wahr (Übung), aber wesentlich simpler und weniger folgenreich.

Ein *gerichteter Weg* ist ein gerichteter Graph  $P \neq \emptyset$  mit Eckenmenge  $\{x_0, \dots, x_k\}$  und Kantenmenge  $\{e_0, \dots, e_{k-1}\}$ , wobei die  $x_i$  alle verschieden sind und  $e_i$  jeweils von  $x_i$  nach  $x_{i+1}$  gerichtet ist. Die letzte Ecke  $x_k$  von  $P$  bezeichnen wir mit  $\text{ter}(P)$ . In diesem Abschnitt bedeutet "Weg" stets "gerichteter Weg". Eine Menge disjunkter Wege in einem gerichteten Graphen  $G$  mit der Eigenschaft, daß jede Ecke von  $G$  auf einem dieser Wege liegt, nennen wir eine *Wegüberdeckung* von  $G$ . Wie bei ungerichteten Graphen bezeichne  $\alpha(G)$  die größte Mächtigkeit einer unabhängigen Eckenmenge in  $G$ .

$\text{ter}(P)$

Weg

Wegüberdeckung

$\alpha(G)$

**Satz 1.3.1.** (Gallai & Milgram 1960)

Jeder gerichtete Graph  $G$  hat eine Wegüberdeckung durch höchstens  $\alpha(G)$  Wege.

*Beweis.* Für zwei Wegüberdeckungen  $\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2$  eines Graphen setzen wir  $\mathcal{P}_1 < \mathcal{P}_2$ , wenn  $\{\text{ter}(P) \mid P \in \mathcal{P}_1\} \subseteq \{\text{ter}(P) \mid P \in \mathcal{P}_2\}$  gilt und  $|\mathcal{P}_1| < |\mathcal{P}_2|$ . Wir zeigen folgendes:

$\mathcal{P}_1 < \mathcal{P}_2$

Ist  $\mathcal{P}$  eine  $<$ -minimale Wegüberdeckung von  $G$ , so enthält  $G$  eine Menge  $\{v_P \mid P \in \mathcal{P}\}$  unabhängiger Ecken mit  $v_P \in P$  für alle  $P \in \mathcal{P}$ . (\*)

Es ist klar, daß aus (\*) die Behauptung des Satzes folgt.

Wir beweisen (\*) mit Induktion nach  $|G|$ . Es sei  $\mathcal{P} = \{P_1, \dots, P_m\}$  wie in (\*) gegeben und  $v_i := \text{ter}(P_i)$ . Ist  $\{v_i \mid 1 \leq i \leq m\}$  unabhängig, so sind wir fertig. Wir dürfen daher annehmen, daß  $G$  eine Kante von  $v_2$  nach  $v_1$  enthält. Da auch  $P_2 v_2 v_1$  ein Weg ist, folgt aus der Minimalität von  $\mathcal{P}$ , daß  $v_1$  nicht die einzige Ecke von  $P_1$  ist; es sei  $v$  die letzte Ecke von  $P_1 \hat{v}_1$ . Damit ist  $\mathcal{P}' := \{P_1 v, P_2, \dots, P_m\}$  eine Wegüberdeckung von  $G' := G - v_1$  (Abb. 1.3.1). Wir zeigen zunächst, daß  $\mathcal{P}'$  mit dieser Eigenschaft  $<$ -minimal ist.

$\mathcal{P}, P_i, m$   
 $v_i$   
 $v$   
 $\mathcal{P}'$   
 $G'$

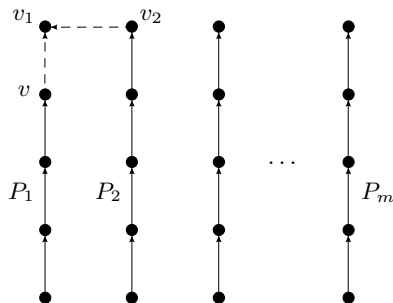


Abb. 1.3.1. Die Wegüberdeckung  $\mathcal{P}'$  von  $G'$

Angenommen,  $\mathcal{P}'' < \mathcal{P}'$  sei eine weitere Wegüberdeckung von  $G'$ . Endet ein Weg  $P \in \mathcal{P}''$  in  $v$ , so ersetzen wir  $P$  in  $\mathcal{P}''$  durch  $P v v_1$  und erhalten so eine kleinere Wegüberdeckung von  $G$  als  $\mathcal{P}$ , mit Widerspruch zur Minimalität von  $\mathcal{P}$ . Endet ein Weg  $P \in \mathcal{P}''$  in  $v_2$  (aber keiner in  $v$ ), so ersetzen wir  $P$  in  $\mathcal{P}''$  durch  $P v_2 v_1$  und erhalten erneut einen Widerspruch zur Minimalität von  $\mathcal{P}$ . Es gilt also  $\{\text{ter}(P) \mid P \in \mathcal{P}''\} \subseteq \{v_3, \dots, v_m\}$ , und insbesondere ist  $|\mathcal{P}''| \leq |\mathcal{P}| - 2$ . Die Menge  $\mathcal{P}''$  vermehrt um den trivialen Weg  $\{v_1\}$  überdeckt dann  $G$  und widerspricht der Minimalität von  $\mathcal{P}$ .

$\mathcal{P}'$  ist also minimal, wie behauptet. Nach Induktionsannahme hat  $\{V(P) \mid P \in \mathcal{P}'\}$  ein Repräsentantensystem aus unabhängigen Ecken. Dies ist auch ein Repräsentantensystem für  $\mathcal{P}$ , und somit ist (\*) bewiesen.  $\square$

Als Korollar zu Satz 1.3.1 erhalten wir ein klassisches Resultat der Ordnungstheorie. Eine Teilmenge  $A$  einer Halbordnung  $(P, \leq)$  ist eine *Kette* in  $P$ , wenn je zwei Elemente von  $A$  in  $P$  vergleichbar sind;  $A$  ist eine *Antikette*, wenn die Elemente von  $A$  paarweise unvergleichbar sind.

**Korollar 1.3.2.** (Dilworth 1950)

In jeder endlichen Halbordnung  $(P, \leq)$  ist die geringste Anzahl von Ketten, die ganz  $P$  überdecken, gleich der größten Mächtigkeit einer Antikette in  $P$ .

*Kette*  
*Antikette*

*Beweis.* Ist  $A$  eine Antikette maximaler Mächtigkeit in  $P$ , so ist  $P$  offenbar nicht durch weniger als  $|A|$  Ketten überdeckbar. Daß  $|A|$  Ketten zur Überdeckung von  $P$  ausreichen, folgt aus Satz 1.3.1, angewendet auf den gerichteten Graphen mit Eckenmenge  $P$  und Kantenmenge  $\{(x, y) \mid x < y\}$ .  $\square$

## Übungen

1. Zeige, daß ein bipartiter Graph zu jeder Paarung mit weniger als der größtmöglichen Anzahl von Kanten einen Verbesserungsweg enthält. Gilt die entsprechende Aussage auch in nicht bipartiten Graphen? (Ein *Verbesserungsweg* dort sei ein beliebiger Weg, der zwei nicht gepaarte Ecken verbindet und abwechselnd Kanten innerhalb und außerhalb der gegebenen Paarung enthält.)  
(Tip: symmetrische Differenz.)
2. Finde einen möglichst effizienten Algorithmus, der in bipartiten Graphen eine Paarung größter Mächtigkeit findet.
- 3.<sup>+</sup> Finde ein Gegenbeispiel zur Aussage des Heiratssatzes für unendliche Graphen.
4. Zeige, daß zwei Partitionen einer endlichen Menge in Teilmengen sämtlich gleicher Mächtigkeit stets ein gemeinsames Repräsentantensystem haben.
5. Es sei  $A$  eine endliche Menge mit Teilmengen  $A_1, \dots, A_n$ , und es seien  $d_1, \dots, d_n \in \mathbb{N}$ . Zeige, daß genau dann disjunkte Teilmengen  $D_k \subseteq A_k$  mit  $|D_k| = d_k$  für alle  $k \leq n$  existieren, wenn

$$\left| \bigcup_{i \in I} A_i \right| \geq \sum_{i \in I} d_i$$

gilt für jede Teilmenge  $I \subseteq \{1, \dots, n\}$ .

- 6.<sup>+</sup> Beweise das folgende *Lemma von Sperner*: in einer  $n$ -elementigen Menge  $X$  gibt es höchstens  $\binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}$  einander paarweise nicht enthaltende Teilmengen.  
(Tip: Offenbar reicht es, eine Überdeckung des Teilmengenverbandes von  $X$  durch  $\binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}$  Ketten zu finden.)
7. Finde eine Menge  $S$  für Satz 1.2.3, wenn  $G$  ein Wald ist.
8. Zeige mit Hilfe von Satz 1.2.3, daß jeder  $k$ -zusammenhängende Graph ( $k \in \mathbb{N}$ ) mit mindestens  $2k$  Ecken eine Paarung der Mächtigkeit  $k$  enthält. Ist dies bestmöglich?
9. Ein Graph  $G$  heißt (Ecken-) *transitiv*, wenn zu je zwei Ecken  $v, w$  ein Automorphismus von  $G$  existiert, der  $v$  auf  $w$  abbildet. Zeige mit Hilfe der Betrachtungen nach dem Beweis von Satz 1.2.3, daß jeder zusam-

menhängende transitive Graph entweder faktorkritisch ist oder einen 1-Faktor hat.

(Tip: Betrachte die Fälle  $S = \emptyset$  und  $S \neq \emptyset$  getrennt.)

10. Zeige, daß ein Graph  $G$  genau dann  $k$  unabhängige Kanten enthält, wenn  $q(G - S) \leq |S| + |G| - 2k$  gilt für alle Eckenmengen  $S \subseteq V(G)$ .
- 11.<sup>-</sup> Finde einen kubischen Graphen ohne 1-Faktor.
12. Leite den Heiratssatz aus dem Satz von Tutte her.
- 13.<sup>-</sup> Beweise die ungerichtete Version des Satzes von Gallai und Milgram, ohne diesen zu benutzen.
14. Leite den Heiratssatz aus dem Satz von Gallai und Milgram ab.
- 15.<sup>-</sup> Zeige, daß jede Halbordnung mit mindestens  $rs + 1$  Elementen entweder eine Antikette der Mächtigkeit  $s + 1$  oder eine Kette der Mächtigkeit  $r + 1$  enthält.
- 16.<sup>-</sup> Beweise die folgende zum Satz von Dilworth duale Aussage: in jeder Halbordnung  $(P, \leq)$  ist die geringste Anzahl von Antiketten, die ganz  $P$  überdecken, gleich der größten Mächtigkeit einer Kette in  $P$ .
17. Leite den Satz von König aus dem Satz von Dilworth her.
- 18.<sup>+</sup> Finde eine unendliche Halbordnung, in der jede Antikette endlich ist, die aber nicht durch endlich viele Ketten überdeckbar ist.  
(Tip:  $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ .)

## Notizen

Über Paarungen in endlichen Graphen gibt es eine gut lesbare und ausführliche Monographie: L. Lovász & M.D. Plummer, *Matching Theory*, Annals of Discrete Math. **29**, North Holland 1986. Alle relevanten Literaturhinweise finden sich dort.

Der Satz 1.1.1 von König (1931) ist eigentlich nur die bipartite Version des allgemeineren Satzes von Menger (1927) aus Kapitel 2, einem der Grundpfeiler der Graphentheorie insgesamt. Schnell bekannt wurde seinerzeit weder der eine noch der andere dieser Sätze, sondern statt dessen der leicht aus dem Satz von König ableitbare Heiratssatz 1.1.2 von Hall (1935). Der Heiratssatz zählt sicher zu den am meisten angewandten Sätzen der Graphentheorie.

Unser Beweis des Satzes von Tutte geht auf Lovász (1975) zurück. Unser Satz 1.2.3, einschließlich der darauf folgenden informellen Diskussion, ist eine schlanke Version des Struktursatzes von Gallai (1964) und Edmonds (1965) über Paarungen – insbesondere Paarungen maximaler Mächtigkeit – in beliebigen Graphen. Der gesamte Satz ist ein wenig aufwendig zu formulieren, aber tiefgreifend und interessant; siehe Lovász & Plummer.

Satz 1.3.1 ist von T. Gallai & A.N. Milgram, Verallgemeinerung eines graphentheoretischen Satzes von Rédei, *Acta Sci. Math. (Szeged)* **21** (1960), 181–186.

Unserer in Kapitel 0.4 gegebenen Definition von  $k$ -Zusammenhang mangelt es ein wenig an intuitiver Ausstrahlung. Wir wissen danach nicht besonders genau, in welcher vielfältiger Weise ein  $k$ -zusammenhängender Graph "zusammenhängt", sondern lediglich, daß es irgendwie schwer ist, ihn zu trennen: man muß dazu mindestens  $k$  Ecken entfernen. Anschaulicher wäre die folgende Definition gewesen, die überdies die obige Trennungseigenschaft impliziert: "ein Graph ist  $k$ -zusammenhängend, wenn je zwei seiner Ecken durch mindestens  $k$  kreuzungsfreie Wege verbunden sind".

Es ist eines der klassischen frühen Resultate der Graphentheorie, daß diese beiden Definitionen äquivalent sind, duale Aspekte also der gleichen Eigenschaft. Diesen Satz von Menger (1927) werden wir in Abschnitt 2.3 ausführlich studieren.

Zuvor, in den Abschnitten 2.1 und 2.2, untersuchen wir die Struktur 2-zusammenhängender und 3-zusammenhängender Graphen. Für diese niedrigen Werte von  $k$  ist es noch möglich, allgemein zu sagen, wie die  $k$ -zusammenhängenden Graphen konstruiert sind.

In den verbleibenden Abschnitten werden wir eine Reihe neuerer Zusammenhangsbegriffe kennenlernen, die sich als kaum weniger bedeutsam erwiesen haben als der klassische: die Anzahl der  $H$ -Wege in einem Graphen zu gegebenem Untergraphen  $H$ , seine Anzahl kantendisjunkter Spannbäume, und disjunkte Wegverbindungen zu gegebenen Eckenpaaren.



## 2.1 2-zusammenhängende Graphen und Untergraphen

*Block*

Einen maximalen zusammenhängenden nicht leeren Teilgraphen ohne Artikulation nennt man einen *Block*. Jeder Block eines Graphen  $G$  ist also entweder ein maximaler 2-zusammenhängender Teilgraph, oder eine Brücke, oder eine isolierte Ecke. Umgekehrt ist auch jeder solche Teilgraph ein Block von  $G$ . Wegen ihrer Maximalität schneiden sich verschiedene Blöcke von  $G$  in höchstens einer Ecke; diese ist dann notwendig eine Artikulation von  $G$ . Jede Kante von  $G$  liegt damit in genau einem Block, und  $G$  ist die Vereinigung seiner Blöcke.

Eine Zerlegung von  $G$  in seine Blöcke ist gewissermaßen das “2-zusammenhängende Gegenstück” zu seiner Zerlegung in Komponenten, seine maximalen 1-zusammenhängenden Teilgraphen. Während  $G$  jedoch vollständig bestimmt ist durch die Struktur seiner Komponenten, wird seine Struktur nicht vollständig durch die seiner Blöcke erfaßt: da diese nicht notwendig disjunkt sind, definiert die Weise, wie sie einander schneiden, eine eigene Struktur—eine Art Grobstruktur von  $G$ .

Die folgende Proposition beschreibt diese durch seine Blöcke definierte Grobstruktur von  $G$ . Es sei  $A$  die Menge der Artikulationen von  $G$ , und  $\mathcal{B}$  die Menge seiner Blöcke. Die Enthaltenseinsrelation zwischen den Elementen von  $A$  und denen von  $\mathcal{B}$  definiert einen bipartiten Graphen auf  $A \cup \mathcal{B}$ : zu  $a \in A$  und  $B \in \mathcal{B}$  sei  $aB$  genau dann eine Kante, wenn  $a \in B$  ist. Diesen Graphen nennt man den *Block-Graphen* von  $G$  (Abb. 2.1.1).

*Block-Graph*

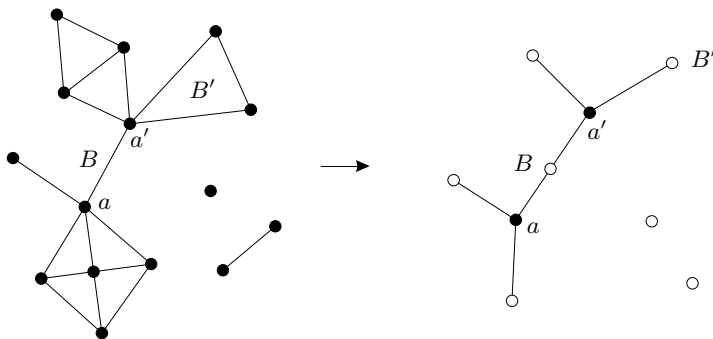


Abb. 2.1.1. Ein Graph und sein Block-Graph

**Proposition 2.1.1.** *Der Block-Graph eines zusammenhängenden Graphen ist ein Baum.*  $\square$

Proposition 2.1.1 führt die Struktur eines beliebigen Graphen auf die Struktur seiner Blöcke zurück. Welche Struktur aber haben die Blöcke selbst? Der folgende einfache Satz gibt eine Methode an, wie im Prinzip eine Liste aller 2-zusammenhängenden Graphen zu erstellen wäre:

**Proposition 2.1.2.** *Man erhält induktiv genau alle 2-zusammenhängenden Graphen, indem man von einem Kreis ausgehend jeweils zu einem bereits konstruierten Graphen  $H$  einen  $H$ -Weg hinzufügt (Abb. 2.1.2).*

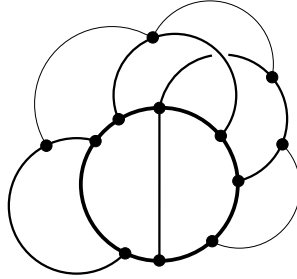


Abb. 2.1.2. Konstruktion 2-zusammenhängender Graphen

*Beweis.* Alle wie angegeben konstruierten Graphen sind offenbar 2-zusammenhängend. Umgekehrt sei  $G$  als 2-zusammenhängend gegeben. Dann enthält  $G$  einen Kreis, und somit auch einen maximalen Teilgraphen  $H$ , der wie angegeben konstruierbar ist. Da jede Kante  $xy \in E(G) \setminus E(H)$  mit  $x, y \in H$  einen  $H$ -Weg definierte, ist  $H$  ein Untergraph von  $G$ . Ist  $H \neq G$ , so hat  $G$  aufgrund seines Zusammenhangs eine Kante  $vw$  mit  $v \in G - H$  und  $w \in H$ . Da  $G$  2-zusammenhängend ist, enthält  $G - w$  einen  $v$ - $H$ -Weg  $P$ . Dann ist  $wvP$  ein  $H$ -Weg in  $G$ , und  $H \cup wvP$  ist ein größerer konstruierbarer Teilgraph als  $H$  (Widerspruch).  $\square$

$H$

## 2.2 Die Struktur 3-zusammenhängender Graphen

In diesem Abschnitt geben wir eine Methode an, nach der alle 3-zusammenhängenden Graphen schrittweise aus einem  $K^4$  konstruierbar sind. Weiter werden wir einen Struktursatz über den Zyklenraum 3-zusammenhängender Graphen beweisen, der auch in Kapitel 3.5 noch einmal wichtig werden wird (im Beweis von Satz 3.5.2).

**Lemma 2.2.1.** *Ist  $G$  3-zusammenhängend und  $|G| > 4$ , so hat  $G$  eine Kante  $e$  mit der Eigenschaft, daß  $G/e$  wiederum 3-zusammenhängend ist.*

[3.4.3]

*Beweis.* Angenommen, es gibt keine solche Kante  $e$ . Für jede Kante  $xy \in G$  enthält dann  $G/xy$  eine trennende Menge  $S$  von höchstens 2 Ecken. Wegen  $\kappa(G) \geq 3$  liegt die kontrahierte Ecke  $v_{xy}$  (siehe Kapitel 0.7) in  $S$  und es gilt  $|S| = 2$ , d.h.  $G$  hat eine Ecke  $z \notin \{x, y\}$ , so daß  $\{v_{xy}, z\}$  den Graphen  $G/xy$  trennt. Je zwei durch  $\{v_{xy}, z\}$  in  $G/xy$  getrennte Ecken

$xy$

$z$

sind dann in  $G$  durch  $T := \{x, y, z\}$  getrennt. Da keine echte Teilmenge von  $T$  den Graphen  $G$  trennt, hat jede Ecke aus  $T$  in jeder Komponente  $C$  von  $G - T$  einen Nachbarn.

Wir wählen nun die Kante  $xy$ , die Ecke  $z$  und die Komponente  $C$  so, daß  $|C|$  minimal ist. Es sei  $v$  ein Nachbar von  $z$  in  $C$  (Abb. 2.2.1).

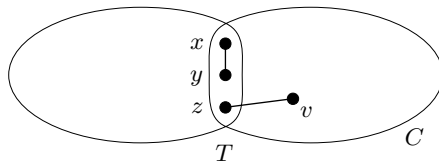


Abb. 2.2.1. Trennende Ecken im Beweis von Lemma 2.2.1

Da nach Annahme auch  $G/zv$  nicht 3-zusammenhängend ist, gibt es wiederum eine Ecke  $w$  mit der Eigenschaft, daß  $\{z, v, w\}$  den Graphen  $G$  trennt, und wie oben hat jede Ecke in  $\{z, v, w\}$  einen Nachbarn in jeder Komponente von  $G - \{z, v, w\}$ .

Da  $x$  und  $y$  benachbart sind, hat  $G - \{z, v, w\}$  eine Komponente  $D$  mit  $D \cap \{x, y\} = \emptyset$ . Jeder Nachbar von  $v$  in  $D$  ist dann in  $C$  (wegen  $v \in C$ ), d.h.  $D \cap C \neq \emptyset$  und somit  $D \subsetneq C$  nach Wahl von  $D$ . Dies widerspricht der Wahl von  $xy, z$  und  $C$ .  $\square$

**Satz 2.2.2.** (Tutte 1961)

Ein Graph  $G$  ist genau dann 3-zusammenhängend, wenn eine Folge  $G_0, \dots, G_n$  von Graphen existiert mit den folgenden Eigenschaften:

- (i)  $G_0 = K^4$  und  $G_n = G$ ;
- (ii) für jedes  $i < n$  enthält  $G_{i+1}$  eine Kante  $xy$  mit  $d(x), d(y) \geq 3$  und  $G_i = G_{i+1}/xy$ .

*Beweis.* Daß eine Folge der angegebenen Art existiert, wenn  $G$  3-zusammenhängend ist, folgt direkt aus Lemma 2.2.1. Wir bemerken, daß auch alle Graphen der Folge 3-zusammenhängend sind.

Umgekehrt sei  $G_i = G_{i+1}/xy$  wie in (ii); wir zeigen, daß mit  $G_i$  auch  $G_{i+1}$  3-zusammenhängend ist. Angenommen nicht; es sei  $S$  eine trennende Eckenmenge von  $G_{i+1}$  mit  $|S| \leq 2$ , und es seien  $C_1, C_2$  zwei Komponenten von  $G_{i+1} - S$ . Da  $x$  und  $y$  benachbart sind, dürfen wir  $\{x, y\} \cap V(C_1) = \emptyset$  annehmen (Abb. 2.2.2). Dann enthält  $C_2$  weder

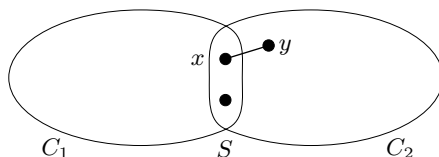


Abb. 2.2.2. Die Lage von  $xy$  im Beweis von Satz 2.2.2

beide Ecken  $x, y$  noch eine Ecke  $v \notin \{x, y\}$ : anderenfalls wäre  $v_{xy}$  bzw.  $v$  in  $G_i$  von  $C_1$  durch höchstens 2 Ecken getrennt, mit Widerspruch. Damit enthält  $C_2$  nur eine einzige Ecke: entweder  $x$  oder  $y$ . Dies widerspricht unserer Annahme von  $d(x), d(y) \geq 3$ .  $\square$

Satz 2.2.2 ist die Kernaussage des sogenannten Tutte'schen *Wheel Theorem*.<sup>1</sup> Wir können damit schrittweise genau alle 3-zusammenhängenden Graphen konstruieren, indem wir, mit  $K^4$  beginnend, in jedem Schritt eine Ecke  $v$  in zwei neue benachbarte Ecken  $v', v''$  aufspalten und diese beliebig so mit den ehemaligen Nachbarn von  $v$  verbinden, daß  $v'$  und  $v''$  beide mindestens den Grad 3 haben und jeder Nachbar von  $v$  zu mindestens einer der beiden neuen Ecken benachbart ist.

**Satz 2.2.3.** (Tutte 1963)

Der Zyklenraum eines 3-zusammenhängenden Graphen wird von seinen nicht trennenden induzierten Kreisen erzeugt. [3.5.2]

*Beweis.* Wir verwenden Induktion nach der Ordnung des betrachteten Graphen  $G$ . In  $K^4$  ist jeder Kreis entweder selbst ein Dreieck oder (kantenmäßig) die symmetrische Differenz zweier Dreiecke. Diese sind sowohl induziert als auch nicht trennend, und somit gilt die Behauptung für  $|G| = 4$ . (0.9.1)

Zum Induktionsschritt sei  $e = xy$  eine (nach Lemma 2.2.1 existierende) Kante von  $G$ , für die  $G' := G/e$  3-zusammenhängend ist. Jede Kante  $e' \in E(G') \setminus E(G)$  hat dann die Form  $e' = uv_e$ , und mindestens eine der beiden Kanten  $ux, uy$  liegt in  $G$ . Wir wählen von diesen beiden Kanten eine, die in  $G$  liegt, und identifizieren sie (sprachlich) mit  $e'$ . (Wir bezeichnen also mit  $e'$  jetzt sowohl die Kante  $uv_e$  von  $G'$  als auch genau eine der beiden Kanten  $ux, uy$ .) Mit dieser Konvention können wir  $E(G')$  als Teilmenge von  $E(G)$  auffassen und  $\mathcal{E}(G')$  als Teilraum von  $\mathcal{E}(G)$ ; insbesondere finden alle Vektoradditionen im folgenden in  $\mathcal{E}(G)$  statt.  $e = xy$   
 $G'$

Betrachten wir einen induzierten (also sehnlosen) Kreis  $C \subseteq G$ . Ist  $e \in C$  und  $C = C^3$ , so nennen wir  $C$  ein *Grunddreieck*; dann ist  $C/e = K^2$ . Ist  $e \in C$  aber  $C \neq C^3$ , so ist  $C/e$  ein Kreis in  $G'$ . Ist  $e \notin C$ , so liegen  $x$  und  $y$  nicht beide auf  $C$ , da  $e$  sonst eine Sehne wäre. Ersetzen wir dann  $x$  bzw.  $y$  durch  $v_e$ , so bilden die Ecken von  $C$  in ihrer natürlichen Reihenfolge auch in  $G'$  einen Kreis, den wir wiederum mit  $C/e$  bezeichnen. Solange  $C$  kein Grunddreieck ist, bezeichnet  $C/e$  damit in jedem Falle einen Kreis in  $G'$ . Beachte, daß auch im Falle  $e \notin C$  die Kantenmenge von  $C/e$  nicht notwendig gleich  $E(C)$  ist, ja noch nicht einmal einen Kreis in  $G$  induzieren muß; siehe dazu Abbildung 2.2.3. Grunddreieck  
 $C/e$

<sup>1</sup> Die Graphen der Form  $C^n * K^1$  nennt man *Räder*; ein  $K^4$  ist also das kleinste Rad. Rad

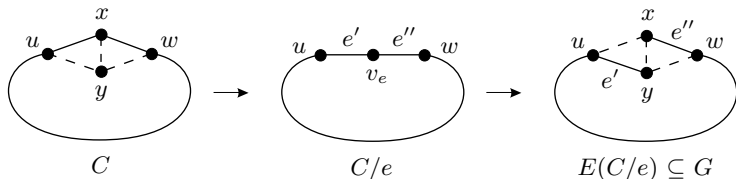


Abb. 2.2.3. Eine der vier Möglichkeiten für  $E(C/e)$  im Falle  $e \notin C$

guter Kreis  
erzeugbar

Die induzierten und nicht trennenden Kreise in  $G$  und  $G'$  nennen wir im folgenden kurz *gut*. Einen Zyklus in  $G$  nennen wir *erzeugbar*, wenn er eine Linearkombination guter Kreise aus  $G$  ist; wir wollen somit zeigen, daß alle Zyklen in  $G$  erzeugbar sind. Unsere Grundidee dabei ist, einen gegebenen Kreis  $C \in \mathcal{C}(G)$  zu einem Kreis  $C/e \subseteq G'$  zu kontrahieren, diesen nach Induktionsannahme durch gute Kreise in  $G'$  zu erzeugen, diese in gute Kreise von  $G$  zurückzuverwandeln, und dann zu hoffen, daß jene guten Kreise von  $G$  dort  $C$  erzeugen.

Wir beweisen zunächst drei Hilfsbehauptungen.

Jedes Grunddreieck ist gut. (1)

Als  $C^3$  ist ein Grunddreieck  $wxyw$  sicher induziert. Ferner kann es  $G$  nicht trennen, da sonst  $\{v_e, w\}$  eine trennende Eckenmenge von  $G'$  wäre, im Widerspruch zu  $\kappa(G') \geq 3$  nach Wahl von  $e$ . Damit ist (1) bewiesen.

Ist  $C \subseteq G$  ein induzierter Kreis aber kein Grunddreieck, so existiert ein erzeugbarer Zyklus  $D$  mit  $C + C/e + D \in \{\emptyset, \{e\}\}$ . (2)

Die Kernaussage von (2) ist, vom Standpunkt der Erzeugbarkeit aus, daß sich  $C$  und  $C/e$  nur wenig unterscheiden: abgesehen von einem zulässigen Korrekturterm  $D$  höchstens in der Kante  $e$ . In welchen anderen Kanten aber könnten sich  $C$  und  $C/e$  unterscheiden? Offenbar höchstens in den beiden mit  $v_e$  auf  $C/e$  inzidenten Kanten  $e_u = uv_e$  und  $e_w = v_e w$ ; vgl. Abb. 2.2.3. Diese beiden möglichen Differenzen werden jedoch genau durch die Addition der entsprechenden Grunddreiecke  $uxy$  bzw.  $xyw$  behoben (die ja nach (1) gut sind). Schreiben wir also  $D_u$  für  $uxy$  falls  $e_u \notin C$  ist (und  $D_u := \emptyset$  sonst), sowie  $D_w$  für  $xyw$  falls  $e_w \notin C$  ist (und  $D_w := \emptyset$  sonst), so ist  $D := D_u + D_w$  der in (2) gesuchte Zyklus.

Als nächstes untersuchen wir, wie wir gute erzeugende Kreise von  $G'$  nach  $G$  zurücktransportieren können:

Zu jedem guten Kreis  $C' \subseteq G'$  existiert ein guter Kreis  $C = C(C') \subseteq G$  mit  $C/e = C'$ . (3)

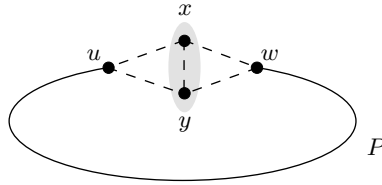


Abb. 2.2.4. Die Suche nach einem guten Kreis  $C$  mit  $C/e = C'$

Ist  $v_e \notin C'$ , so ist (3) mit  $C := C'$  erfüllt. Wir nehmen nun  $v_e \in C'$  an. Es seien  $u$  und  $w$  die beiden Nachbarn von  $v_e$  in  $C'$ , und  $P$  der  $u$ - $w$ -Weg in  $C'$ , der  $v_e$  vermeidet (Abb. 2.2.4). Dann gilt  $P \subseteq G$ .

$u, w$   
 $P$

Wir nehmen zuerst  $\{ux, uy, wx, wy\} \subseteq E(G)$  an und betrachten die Kreise  $C_x := uPwxu$  und  $C_y := uPwyu$  in  $G$ . Beide Kreise sind induziert in  $G$ , da  $C'$  induziert in  $G'$  ist, und offenbar gilt  $C_x/e = C_y/e = C'$ . Weiter trennt keiner der beiden Kreise zwei Ecken von  $G - (V(P) \cup \{x, y\})$  in  $G$ , da  $C'$  nach Annahme diese Ecken in  $G'$  nicht trennt. Ist nun etwa  $C_x$  dennoch ein trennender Kreis in  $G$ , so besteht eine der Komponenten von  $G - C_x$  nur aus der Ecke  $y$ ; Analoges gilt für  $C_y$ . Dies kann jedoch nicht für  $C_x$  und  $C_y$  gleichzeitig eintreten: da  $x$  und  $y$  auf  $C_x$  bzw.  $C_y$  nur zu  $u$  und  $w$  benachbart sind (sonst hätte  $C'$  eine Sehne), trennte dann  $\{u, w\}$  die Menge  $\{x, y\}$  vom Rest von  $G$ , im Widerspruch zu  $\kappa(G) \geq 3$ . Damit ist mindestens einer der beiden Kreise  $C_x, C_y$  gut in  $G$ .

$C_x, C_y$

Es bleibt oBdA der Fall zu betrachten, daß  $ux \notin E(G)$  ist. Dann ist wie oben entweder  $uPwyu$  oder  $uPwxyu$  ein guter Kreis in  $G$ , je nachdem ob  $wy \in E(G)$  ist oder nicht. Damit ist (3) bewiesen.

Wir kommen nun zum Hauptteil des Beweises: wir zeigen, daß jeder Zyklus  $C \in \mathcal{C}(G)$  erzeugbar ist. Nach Proposition 0.9.1 dürfen wir annehmen, daß  $C$  ein induzierter Kreis ist. Mit (1) nehmen wir weiter an, daß  $C$  kein Grunddreieck ist; damit ist  $C/e$  ein Kreis. Wir werden nun wie folgt argumentieren. Nach (2) unterscheidet sich  $C$  höchstens durch einen erzeugbaren Korrekturterm  $D$  (und möglicherweise in  $e$ ) von dem Kreis  $C/e$ . Diesen können wir nach Induktionsannahme durch gute Kreise  $C'_i$  in  $G'$  erzeugen, die wir nach (3) durch Kontraktion aus guten Kreisen in  $G$  gewinnen können. Diese unterscheiden sich wiederum nur durch erzeugbare Korrekturterme  $D_i$  (und möglicherweise in  $e$ ) von den  $C'_i$  und summieren sich daher zusammen mit allen Korrekturtermen zu  $C$  – bis auf möglicherweise die Kante  $e$ , die unserer besonderen Zuwendung bedürfen wird.

$C$

Nach Induktionsannahme hat  $C/e$  eine Darstellung

$$C/e = C'_1 + \dots + C'_k$$

$$C'_1, \dots, C'_k$$

in  $\mathcal{C}(G')$ , bei der jedes  $C'_i$  ein guter Kreis in  $G'$  ist. Für jedes  $i$  gibt es nach (3) einen guten Kreis  $C(C'_i) \subseteq G$  mit  $C(C'_i)/e = C'_i$  (damit ist

$C(C'_i)$  sicher kein Grunddreieck), und nach (2) einen erzeugbaren Zyklus  $D_i$  mit

$$C(C'_i) + C'_i + D_i \in \{\emptyset, \{e\}\}. \quad (4)$$

Wir setzen

$$C_1, \dots, C_k \quad C_i := C(C'_i) + D_i;$$

dann ist  $C_i$  erzeugbar, und wegen (4) unterscheiden sich die Kantenmengen  $C_i$  und  $C'_i$  höchstens in  $e$ . Nach (2) existiert weiter ein erzeugbarer Zyklus  $D$  mit

$$C + C/e + D \in \{\emptyset, \{e\}\};$$

wiederum unterscheidet sich also  $C + D$  von  $C/e$  höchstens in  $e$ . Damit unterscheidet sich dann  $C + D + C_1 + \dots + C_k$  von  $C/e + C'_1 + \dots + C'_k = \emptyset$  höchstens in  $e$ , d.h. es ist

$$C + D + C_1 + \dots + C_k \in \{\emptyset, \{e\}\}.$$

Wegen  $C + D + C_1 + \dots + C_k \in \mathcal{C}(G)$  und  $\{e\} \notin \mathcal{C}(G)$  gilt damit

$$C + D + C_1 + \dots + C_k = \emptyset,$$

also  $C = D + C_1 + \dots + C_k$  wie gewünscht.  $\square$

## 2.3 Der Satz von Menger

Der folgende Satz von Menger aus dem Jahre 1927 ist einer der klassischen Sätze der Graphentheorie.

**Satz 2.3.1.** (Menger 1927)

*Es sei  $G = (V, E)$  ein Graph und  $A, B \subseteq V$ . Die kleinste Mächtigkeit einer  $A$  von  $B$  in  $G$  trennenden Eckenmenge ist gleich der größten Mächtigkeit einer Menge disjunkter  $A$ - $B$ -Wege in  $G$ .*

Wir geben drei Beweise.<sup>2</sup> Interessant an diesen Beweisen ist ihre Verschiedenheit im Charakter. Während der erste Beweis der kürzeste ist, ist er gleichzeitig der undurchsichtigste: es ist schwer zu sehen, wie man ihn selbst finden könnte außer durch spielerisches Herumprobieren mit den beiden Induktionstechniken des Kontrahierens und Löschens einer Kante. Der dritte Beweis ist zwar am längsten, aber vielleicht

---

<sup>2</sup> Ein vierter ist in Übung 15 skizziert. In Kapitel 5 wird sich dann noch ein fünfter Beweis als Anwendung eines Satzes über Netzwerkflüsse ergeben (Übung 5.3).

[2.6.2]  
[6.2.2]  
[10.3.8]  
[10.4.4]

auch am natürlichsten: wer den bipartiten Fall (Satz 1.1.1) wirklich verstanden hat, wird diesen Beweis selbst entwickeln können. Der zweite Beweis schließlich ist ein kleiner Juwel eigener Art: auch er ist ganz natürlich, fußt aber auf einer besonders schönen Idee und ist dadurch kaum länger als der erste Beweis.

In allen drei Beweisen seien  $G, A, B$  wie im Satz gegeben, und wir bezeichnen jeweils mit  $k = k(G, A, B)$  die kleinste Mächtigkeit eines  $A$ - $B$ -Trenners in  $G$ . Es ist klar, daß  $G$  nicht mehr als  $k$  disjunkte  $A$ - $B$ -Wege enthalten kann; zu zeigen ist, daß  $k$  solche Wege existieren.

**Erster Beweis.** Wir verwenden Induktion nach  $\|G\|$ . Hat  $G$  keine Kante, so ist  $|A \cap B| = k$  und wir haben  $k$  triviale  $A$ - $B$ -Wege. Hat  $G$  eine Kante  $e = xy$  aber keine  $k$  disjunkten  $A$ - $B$ -Wege, so enthält auch  $G/e$  keine solchen Wege (wobei wir  $v_e$  als Ecke in  $A$  bzw.  $B$  auffassen, wenn  $x$  oder  $y$  in  $A$  bzw.  $B$  liegt). Nach Induktionsannahme enthält  $G/e$  dann einen  $A$ - $B$ -Trenner  $Y$  von weniger als  $k$  Ecken; unter diesen ist  $v_e$ , da sonst  $Y \subseteq V$  ein  $A$ - $B$ -Trenner in  $G$  wäre. Dann ist  $X := (Y \setminus \{v_e\}) \cup \{x, y\}$  ein  $A$ - $B$ -Trenner in  $G$  aus genau  $k$  Ecken.

Wir betrachten nun den Graphen  $G - e$ . Wegen  $x, y \in X$  trennt jeder  $A$ - $X$ -Trenner in  $G - e$  auch  $A$  von  $B$  in  $G$  und enthält somit mindestens  $k$  Ecken. Nach Induktionsannahme enthält  $G - e$  daher  $k$  disjunkte  $A$ - $X$ -Wege. Analog enthält  $G - e$  auch  $k$  disjunkte  $X$ - $B$ -Wege, und da  $X$  ein  $A$ - $B$ -Trenner ist, treffen diese die  $A$ - $X$ -Wege nur in  $X$ . Zusammen bilden die beiden Wegesysteme die gesuchten  $A$ - $B$ -Wege in  $G$ .  $\square$

**Zweiter Beweis.** Wir zeigen die folgende stärkere Aussage:

*Zu jeder Menge  $\mathcal{P}$  von weniger als  $k$  disjunkten  $A$ - $B$ -Wegen in  $G$  gibt es eine Menge  $\mathcal{Q}$  von  $|\mathcal{P}| + 1$  disjunkten  $A$ - $B$ -Wegen in  $G$ , unter deren Endecken sich alle Endecken der Wege aus  $\mathcal{P}$  befinden.*

Wir beweisen dies für feste  $G$  und  $A$  mit Induktion nach  $|G - B|$ . Dazu betrachten wir einen  $A$ - $B$ -Weg  $R$ , der die (weniger als  $k$ ) Ecken aus  $B$  vermeidet, die auf einem Weg aus  $\mathcal{P}$  liegen. Vermeidet  $R$  alle Wege aus  $\mathcal{P}$ , so ist  $\mathcal{Q} := \mathcal{P} \cup \{R\}$  wie gewünscht. (Dieser Fall tritt für  $|G - B| = 0$  ein, da dann alle  $A$ - $B$ -Wege trivial sind.) Anderenfalls sei  $x$  die letzte Ecke von  $R$ , die auf irgendeinem Weg  $P \in \mathcal{P}$  liegt (Abb. 2.3.1). Es sei  $B' := B \cup V(xP \cup xR)$  und  $\mathcal{P}' := (\mathcal{P} \setminus \{P\}) \cup \{Px\}$ . Dann ist  $|\mathcal{P}'| = |\mathcal{P}|$  und  $k(G, A, B') \geq k(G, A, B)$ , und so gibt es nach Induktionsannahme eine Menge  $\mathcal{Q}'$  von  $|\mathcal{P}| + 1$  disjunkten  $A$ - $B'$ -Wegen, unter deren Endecken sich die Endecken der Wege aus  $\mathcal{P}'$  befinden. In  $\mathcal{Q}'$  existiert dann ein Weg  $Q$ , der in  $x$  endet, und genau ein Weg  $Q'$ , dessen letzte Ecke  $y$  nicht unter den Endecken der Wege aus  $\mathcal{P}'$  ist. Gilt  $y \notin xP$ , so erhalten wir unsere gewünschte Wegemenge  $\mathcal{Q}$  aus  $\mathcal{Q}'$ , indem wir  $Q$  durch  $xP$



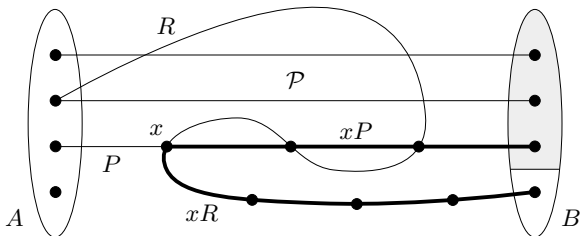


Abb. 2.3.1. Wege im zweiten Beweis des Satzes von Menger

verlängern und gegebenenfalls (wenn  $y$  nicht bereits in  $B$  liegt)  $Q'$  durch  $yR$  verlängern. Anderenfalls ist  $y \in \hat{x}P$ , und wir erhalten  $Q$  aus  $Q'$ , indem wir  $Q$  um  $xR$  und  $Q'$  um  $yxP$  verlängern.  $\square$

Für den Spezialfall bipartiter Graphen ergibt der Satz von Menger genau den Satz 1.1.1 von König. Unseren Beweis jenes Satzes durch alternierende Wege verallgemeinern wir jetzt zu unserem dritten Beweis des Mengerschen Satzes. Es seien  $G, A, B$  wie im Satz 2.3.1, und es sei  $\mathcal{P}$  eine Menge disjunkter  $A$ - $B$ -Wege in  $G$ . Wir setzen

$$V[\mathcal{P}] := \bigcup \{V(P) \mid P \in \mathcal{P}\}$$

$$E[\mathcal{P}] := \bigcup \{E(P) \mid P \in \mathcal{P}\}.$$

Ein Kantenzug  $W = x_0e_0x_1e_1 \dots e_{n-1}x_n$  in  $G$  mit  $e_i \neq e_j$  für  $i \neq j$  heißt *alternierend* bezüglich  $\mathcal{P}$ , wenn die folgenden drei Bedingungen für alle  $i < n$  erfüllt sind (Abb. 2.3.2):

alternierender  
Kantenzug

- (i) ist  $e_i = e \in E[\mathcal{P}]$ , so wird  $e$  von  $W$  rückwärts durchlaufen, d.h. es ist  $x_{i+1} \in P\hat{x}_i$  für ein  $P \in \mathcal{P}$ ;
- (ii) ist  $x_i = x_j$  mit  $i \neq j$ , so gilt  $x_i \in V[\mathcal{P}]$ ;
- (iii) ist  $x_i \in V[\mathcal{P}]$ , so gilt  $\{e_{i-1}, e_i\} \cap E[\mathcal{P}] \neq \emptyset$ .<sup>3</sup>

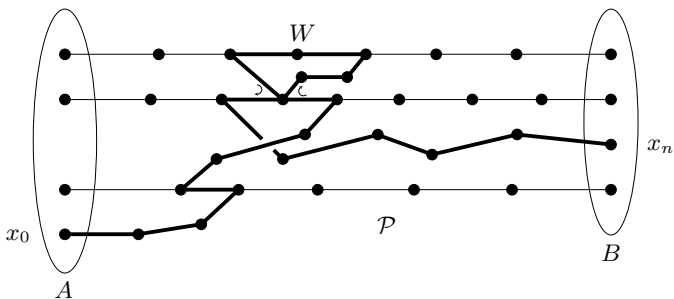


Abb. 2.3.2. Ein alternierender Kantenzug von  $A$  nach  $B$

<sup>3</sup> Im Falle  $i = 0$  sei  $\{e_{i-1}, e_i\} := \{e_0\}$ .

Im folgenden sei  $W = x_0 e_0 x_1 e_1 \dots e_{n-1} x_n$  ein Kantenzug von  $A \setminus V[\mathcal{P}]$  nach  $B \setminus V[\mathcal{P}]$ , alternierend bezüglich  $\mathcal{P}$ . Nach (ii) kommt jede Ecke außerhalb von  $V[\mathcal{P}]$  höchstens einmal auf  $W$  vor. Da die Kanten von  $W$  paarweise verschieden sind, kommt nach (iii) zudem jede Ecke in  $V[\mathcal{P}]$  höchstens zweimal auf  $W$  vor. Dies kann auf zwei Weisen geschehen: ist etwa  $x_i = x_j$  mit  $0 < i < j < n$ , so gilt

$$\begin{aligned} &\text{entweder } e_{i-1}, e_j \in E[\mathcal{P}] \text{ und } e_i, e_{j-1} \notin E[\mathcal{P}] \\ &\text{oder } e_i, e_{j-1} \in E[\mathcal{P}] \text{ und } e_{i-1}, e_j \notin E[\mathcal{P}]. \end{aligned}$$

**Lemma 2.3.2.** *Existiert ein solcher Kantenzug  $W$ , so enthält  $G$  eine Menge von  $|\mathcal{P}| + 1$  disjunkten  $A$ - $B$ -Wegen.*

*Beweis.* Es sei  $H$  der Graph auf  $V[\mathcal{P}] \cup \{x_0, \dots, x_n\}$ , dessen Kantenmenge die symmetrische Differenz von  $E[\mathcal{P}]$  mit  $\{e_0, \dots, e_{n-1}\}$  ist. In  $H$  haben die Endecken der Wege aus  $\mathcal{P}$  und von  $W$  den Grad 1 (bzw. 0, wenn der Weg trivial ist), und alle anderen Ecken haben den Grad 0 oder 2. Für jede der  $|\mathcal{P}| + 1$  Ecken  $a \in (A \cap V[\mathcal{P}]) \cup \{x_0\}$  ist daher die  $a$  enthaltende Komponente von  $H$  ein Weg, etwa  $P = v_0 \dots v_k$ , der in  $a$  beginnt und in  $A$  oder in  $B$  endet. Unter Benutzung der Bedingungen (i) und (iii) oben zeigt man leicht mit Induktion nach  $i = 0, \dots, k-1$ , daß  $P$  jede seiner Kanten  $e = v_i v_{i+1}$  auch im Sinne von  $\mathcal{P}$  bzw. von  $W$  vorwärts durchläuft. (Formal: ist  $e \in P'$  mit  $P' \in \mathcal{P}$ , so gilt  $v_i \in P' \overset{\circ}{v}_{i+1}$ ; ist  $e = e_j \in W$ , so ist  $v_i = x_j$  und  $v_{i+1} = x_{j+1}$ .) Somit kann  $P$  nur in  $B$  enden. Insgesamt haben wir  $|\mathcal{P}| + 1$  disjunkte solche Wege  $P$ , wie gewünscht.  $\square$

**Dritter Beweis von Satz 2.3.1.** Es sei  $\mathcal{P}$  eine Menge möglichst vieler disjunkter  $A$ - $B$ -Wege in  $G$ . Sofern nicht anders angegeben, bezieht sich “alternierend” im folgenden stets auf  $\mathcal{P}$ . Wir setzen

$$A_1 := V[\mathcal{P}] \cap A \quad \text{und} \quad A_2 := A \setminus A_1, \quad A_1, A_2$$

sowie

$$B_1 := V[\mathcal{P}] \cap B \quad \text{und} \quad B_2 := B \setminus B_1. \quad B_1, B_2$$

Für jeden Weg  $P \in \mathcal{P}$  sei  $x_P$  die letzte Ecke von  $P$ , die auf einem in  $A_2$  beginnenden alternierenden Kantenzug liegt; existiert keine solche Ecke, so sei  $x_P$  die erste Ecke von  $P$ . Offenbar hat

$$X := \{x_P \mid P \in \mathcal{P}\} \quad X$$

die Mächtigkeit  $|\mathcal{P}|$ ; es reicht daher zu zeigen, daß  $X$  die Mengen  $A$  und  $B$  in  $G$  trennt.

Es sei  $Q$  ein beliebiger  $A$ - $B$ -Weg; wir zeigen, daß  $Q$  die Menge  $X$  trifft. Angenommen nicht. Wegen der Maximalität von  $|\mathcal{P}|$  ist  $V(Q) \cap V[\mathcal{P}] \neq \emptyset$ . Da der in  $Q$  enthaltene  $A$ - $V[\mathcal{P}]$ -Weg trivialerweise

ein alternierender Kantenzug ist, trifft  $Q$  auch die Eckenmenge  $V[\mathcal{P}']$  von

$$\mathcal{P}' := \{ Px_P \mid P \in \mathcal{P} \};$$

es sei  $y$  die letzte Ecke von  $Q$  in  $V[\mathcal{P}']$ . Weiter sei  $P$  der  $y$  enthaltende Weg aus  $\mathcal{P}$  und  $x := x_P$ . Schließlich sei  $W$  ein alternierender Kantenzug von  $A_2$  nach  $x$ , wie in der Definition von  $x_P$ . Da  $Q$  nach Annahme  $X$  und damit  $x$  vermeidet, ist  $y \in P\hat{x}$ , und  $W \cup xPyQ$  ist ein Kantenzug von  $A_2$  nach  $B$  (Abb. 2.3.3). Ist dieser Kantenzug alternierend und endet er in  $B_2$ , so sind wir fertig: nach Lemma 2.3.2 enthält  $G$  dann  $|\mathcal{P}| + 1$  disjunkte  $A$ - $B$ -Wege, im Widerspruch zur Maximalität von  $\mathcal{P}$ .

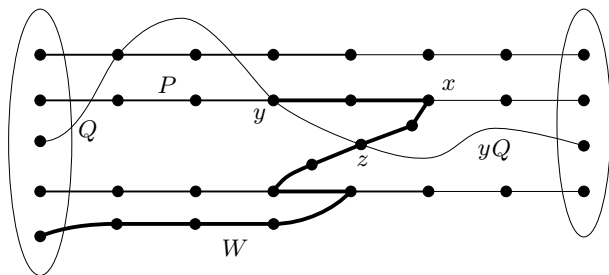


Abb. 2.3.3. Alternierende Kantenzüge im Beweis des Satzes von Menger

Woran könnte es scheitern, daß  $W \cup xPyQ$  ein alternierender Kantenzug ist? Zunächst könnte  $W$  bereits Kanten des Weges  $xPy$  enthalten. Ist etwa  $x'$  die erste Ecke von  $W$  auf  $xPy$ , so ist aber  $W' := Wx'Py$  ein alternierender Kantenzug von  $A_2$  nach  $y$ . (Mit  $Wx'$  meinen wir das Anfangsstück von  $W$  bis zum ersten Auftreten von  $x'$ ; ab da folgt  $W'$  dann  $P$  rückwärts bis  $y$ .) Auch  $W'yQ$  braucht noch nicht alternierend zu sein: es könnte  $W' \cap yQ \neq \emptyset$  sein. Nach Definition von  $\mathcal{P}'$  und  $W$  sowie der Wahl von  $y$  auf  $Q$  gilt jedoch

$$V(W') \cap V[\mathcal{P}] \subseteq V[\mathcal{P}'] \quad \text{und} \quad V(yQ) \cap V[\mathcal{P}'] = \emptyset.$$

Somit können sich  $W'$  und  $yQ$  höchstens außerhalb von  $\mathcal{P}$  treffen.

Ist in der Tat  $W' \cap yQ \neq \emptyset$ , so sei  $z$  die erste Ecke von  $W'$  auf  $yQ$ . Dann liegt  $z$  außerhalb von  $V[\mathcal{P}]$  und tritt somit nach Bedingung (ii) nur einmal in  $W'$  auf; wir setzen dann  $W'' := W'zQ$ . Ist andererseits  $W' \cap yQ = \emptyset$ , so sei  $W'' := W' \cup yQ$ . Da  $yQ$  die Ecken aus  $V[\mathcal{P}']$  vermeidet, ist  $W''$  in beiden Fällen wie  $W'$  ein alternierender Kantenzug bezüglich  $\mathcal{P}'$ . (Beachte, daß  $W''$  im zweiten Fall die Bedingung (iii) in  $y$  erfüllt, während im ersten Fall (iii) nicht auf  $z$  anzuwenden ist.) Nach Definition von  $\mathcal{P}'$  vermeidet  $W''$  daher die Ecken aus  $V[\mathcal{P}] \setminus V[\mathcal{P}']$ ; insbesondere gilt  $V(yQ) \cap V[\mathcal{P}] = \emptyset$ . Somit ist  $W''$  auch ein alternierender

Kantenzug bezüglich  $\mathcal{P}$  und endet in  $B_2$ ; beachte, daß  $y$  wegen  $y \in P\hat{x}$  nicht in  $B$  liegt und daher nicht die letzte Ecke von  $W''$  sein kann. Da  $W''$  wie  $W$  in  $A_2$  beginnt, ergibt es mit Lemma 2.3.2 den angestrebten Widerspruch zur Maximalität von  $\mathcal{P}$ .  $\square$

Eine Menge von  $a$ - $B$ -Wegen ist ein  $a$ - $B$ -Fächer, wenn die Wege paarweise nur die Ecke  $a$  gemeinsam haben. Fächer

**Korollar 2.3.3.** *Ist  $B \subseteq V$  und  $a \in V \setminus B$ , so ist die kleinste Mächtigkeit einer  $a$  von  $B$  in  $G$  trennenden Eckenmenge  $X \subseteq V \setminus \{a\}$  gleich der größten Mächtigkeit eines  $a$ - $B$ -Fächers in  $G$ .* [8.1.2]

*Beweis.* Wende Satz 2.3.1 an mit  $A := N(a)$ .  $\square$

**Korollar 2.3.4.** *Es seien  $a, b$  zwei verschiedene Ecken von  $G$ .*

- (i) *Sind  $a$  und  $b$  nicht benachbart, so ist die kleinste Mächtigkeit einer  $a$  von  $b$  in  $G$  trennenden Eckenmenge  $X \subseteq V \setminus \{a, b\}$  gleich der größten Mächtigkeit einer Menge kreuzungsfreier  $a$ - $b$ -Wege in  $G$ .*
- (ii) *Die kleinste Mächtigkeit einer  $a$  von  $b$  in  $G$  trennenden Kantenmenge  $X \subseteq E$  ist gleich der größten Mächtigkeit einer Menge kantendisjunkter  $a$ - $b$ -Wege in  $G$ .*

*Beweis.* (i) Wende Satz 2.3.1 an mit  $A := N(a)$  und  $B := N(b)$ .

(ii) Wende Satz 2.3.1 auf den Kantengraphen von  $G$  an, mit  $A := E(a)$  und  $B := E(b)$ .  $\square$

**Satz 2.3.5.** (Globale Version des Satzes von Menger)

[3.2.7]  
[5.6.1]  
[7.4.2]

- (i)  *$G$  ist genau dann  $k$ -zusammenhängend, wenn  $G$  zwischen je zwei Ecken  $k$  kreuzungsfreie Wege enthält.*
- (ii)  *$G$  ist genau dann  $k$ -kantenzusammenhängend, wenn  $G$  zwischen je zwei Ecken  $k$  kantendisjunkte Wege enthält.*

*Beweis.* (i) Enthält  $G$  zwischen je zwei Ecken  $k$  kreuzungsfreie Wege, so gilt  $|G| > k$ , und  $G$  ist nicht durch weniger als  $k$  Ecken trennbar;  $G$  ist also  $k$ -zusammenhängend.

Nehmen wir nun umgekehrt an, daß  $G$   $k$ -zusammenhängend ist (und insbesondere mehr als  $k$  Ecken hat) aber zwei Ecken  $a, b$  enthält, die nicht durch  $k$  kreuzungsfreie Wege verbunden sind. Nach Korollar 2.3.4 (i) sind  $a$  und  $b$  benachbart; es sei  $G' := G - ab$ . In  $G'$  gibt es dann höchstens  $k - 2$  kreuzungsfreie  $a$ - $b$ -Wege. Nach Korollar 2.3.4 (i) sind  $a$  und  $b$  daher in  $G'$  durch eine Menge  $X$  von höchstens  $k - 2$  Ecken getrennt. Wegen  $|G| > k$  hat  $G$  noch eine Ecke  $v \notin X \cup \{a, b\}$ . Nun trennt  $X$  die Ecke  $v$  in  $G'$  auch von  $a$  oder von  $b$  – sagen wir, von  $a$ . Dann trennt aber  $X \cup \{b\}$  die Ecken  $v$  und  $a$  in  $G$ , was wegen  $|X \cup \{b\}| \leq k - 1$  dem  $k$ -Zusammenhang von  $G$  widerspricht.

(ii) folgt direkt aus Korollar 2.3.4 (ii).  $\square$

$a, b$

$G'$

$X$

$v$

## 2.4 Der Satz von Mader

Analog zur Fragestellung, die dem Satz von Menger zugrundeliegt, können wir das folgende Problem betrachten: gegeben einen Untergraphen  $H$  eines Graphen  $G$ , wie viele kreuzungsfreie  $H$ -Wege kann  $G$  höchstens enthalten?

Dieser kurze Abschnitt soll ohne Beweis einen tiefliegenden Satz von Mader vorstellen, der dieses Problem ganz analog zum Satz von Menger löst. Der Satz besagt, daß eine einfache obere Schranke für die Anzahl solcher Wege, die sich ähnlich ergibt wie die durch trennende Eckenmengen gegebene Schranke beim Satz von Menger, auch stets durch ein geeignetes Wegesystem angenommen wird.

$X$   
 $F$

Wie könnte eine solche obere Schranke aussehen? Sind  $X \subseteq V(G - H)$  und  $F \subseteq E(G - H)$  so, daß jeder  $H$ -Weg in  $G$  eine Ecke oder Kante aus  $X \cup F$  enthält, dann kann  $G$  natürlich nicht mehr als  $|X \cup F|$  kreuzungsfreie  $H$ -Wege enthalten; die kleinste Mächtigkeit einer solchen Menge  $X \cup F$  ist also eine obere Schranke für die Anzahl kreuzungsfreier  $H$ -Wege in  $G$ . (Beachte, daß jeder  $H$ -Weg  $G - H$  trifft, da  $H$  in  $G$  induziert ist und die Kanten von  $H$  selbst nicht als  $H$ -Wege zählen.)

$\mathcal{C}_F$   
 $\partial C$

Diese triviale obere Schranke für die Anzahl kreuzungsfreier  $H$ -Wege läßt sich noch senken. Zunächst dürfen wir annehmen, daß keine Kante aus  $F$  mit einer Ecke aus  $X$  inzidiert: die Kante wäre sonst zur Trennung überflüssig. Es sei  $Y := V(G - H) \setminus X$ . Weiter bezeichne  $\mathcal{C}_F$  die Menge der Komponenten des Graphen  $(Y, F)$ , und für  $C \in \mathcal{C}_F$  sei  $\partial C$  die Menge der Ecken von  $C$  mit einem Nachbarn in  $G - X - C$ . Jeder  $X$  vermeidende  $H$ -Weg enthält nun eine Kante aus  $F$ , und daher mindestens zwei Ecken aus  $\partial C$  für ein geeignetes  $C \in \mathcal{C}_F$  (Abb. 2.4.1). Die Anzahl kreuzungsfreier  $H$ -Wege in  $G$  ist somit beschränkt durch die Zahl

$M_G(H)$

$$M_G(H) := \min \left( |X| + \sum_{C \in \mathcal{C}_F} \left\lfloor \frac{1}{2} |\partial C| \right\rfloor \right),$$

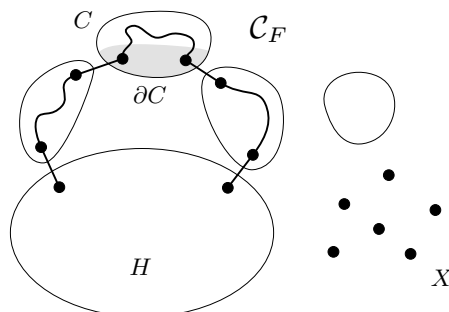


Abb. 2.4.1. Ein  $H$ -Weg in  $G - X$

wobei das Minimum über alle  $X$  und  $F$  der geschilderten Art genommen wird:  $X \subseteq V(G - H)$  und  $F \subseteq E(G - H - X)$ , so daß jeder  $H$ -Weg in  $G$  eine Ecke aus  $X$  oder eine Kante aus  $F$  enthält.

Der Satz von Mader besagt nun, daß diese obere Schranke für jedes  $G$  und  $H$  angenommen wird:

**Satz 2.4.1.** (Mader 1978)

In einem Graphen  $G$  gibt es zu einem Untergraphen  $H \subseteq G$  stets  $M_G(H)$  kreuzungsfreie  $H$ -Wege.

Um ein direktes Analogon zum Satz von Menger zu erhalten, wenden wir den Satz von Mader auf die beiden Spezialfälle an, daß die trennenden Mengen entweder nur Ecken oder nur Kanten enthalten. Für einen Untergraphen  $H \subseteq G$  bezeichne  $\kappa_G(H)$  die kleinste Mächtigkeit einer Eckenmenge  $X \subseteq V(G - H)$ , die jeden  $H$ -Weg in  $G$  trifft. Analog sei  $\lambda_G(H)$  die kleinste Mächtigkeit einer Kantenmenge  $F \subseteq E(G)$ , die jeden  $H$ -Weg in  $G$  trifft.

 $\kappa_G(H)$  $\lambda_G(H)$ 

**Korollar 2.4.2.** In einem Graphen  $G$  gibt es zu einem Untergraphen  $H \subseteq G$  stets mindestens  $\frac{1}{2}\kappa_G(H)$  kreuzungsfreie  $H$ -Wege und mindestens  $\frac{1}{2}\lambda_G(H)$  kantendisjunkte  $H$ -Wege.

*Beweis.* Zum Beweis der ersten Aussage sei  $k$  die größte Mächtigkeit einer Menge kreuzungsfreier  $H$ -Wege in  $G$ . Nach Satz 2.4.1 gibt es Mengen  $X \subseteq V(G - H)$  und  $F \subseteq E(G - H - X)$  mit

 $k$ 

$$k = |X| + \sum_{C \in \mathcal{C}_F} \left\lfloor \frac{1}{2} |\partial C| \right\rfloor,$$

so daß jeder  $H$ -Weg in  $G$  eine Ecke aus  $X$  oder eine Kante aus  $F$  enthält. Für jedes  $C \in \mathcal{C}_F$  mit  $\partial C \neq \emptyset$  sei  $v \in \partial C$  eine Ecke und  $Y_C := \partial C \setminus \{v\}$ ; im Falle  $\partial C = \emptyset$  sei  $Y_C := \emptyset$ . Dann gilt  $\left\lfloor \frac{1}{2} |\partial C| \right\rfloor \geq \frac{1}{2} |Y_C|$  für alle  $C \in \mathcal{C}_F$ . Mit  $Y := \bigcup_{C \in \mathcal{C}_F} Y_C$  trifft offenbar auch  $X \cup Y$  jeden  $H$ -Weg. Daher folgt

 $Y$ 

$$k \geq |X| + \sum_{C \in \mathcal{C}_F} \frac{1}{2} |Y_C| \geq \frac{1}{2} |X \cup Y| \geq \frac{1}{2} \kappa_G(H)$$

wie behauptet.

Die zweite Aussage folgt aus der ersten durch Betrachtung des Kantengraphen von  $G$  (Übung).  $\square$

Es mag vielleicht überraschen, daß auch die Schranken aus Korollar 2.4.2 als generelle Schranken bestmöglich sind: es gibt Beispiele für  $G$  und  $H$ , so daß  $G$  nicht mehr als  $\frac{1}{2}\kappa_G(H)$  kreuzungsfreie  $H$ -Wege enthält, oder nicht mehr als  $\frac{1}{2}\lambda_G(H)$  kantendisjunkte  $H$ -Wege (siehe Übungen).

## 2.5 Kantendisjunkte Spannbäume

Der Satz von Menger behandelt in seiner Kantenversion die Frage, wann es in einem Graphen  $G = (V, E)$  zwischen zwei vorgegebenen Ecken  $k$  kantendisjunkte Wege gibt. Wie diese Wege verlaufen, wird dabei im allgemeinen ganz von den vorgegebenen Ecken abhängen: haben wir zu einem Eckenpaar  $k$  Wege gefunden, so nützt uns diese Information wenig zum Auffinden entsprechender Wege zwischen zwei anderen Ecken.

Nun kann es eine Möglichkeit geben, diesem Mißstand abzuwehren. Kennen wir nämlich  $k$  kantendisjunkte Spannbäume in  $G$ , so enthält  $G$  zwischen je zwei Ecken  $k$  kanonische Wege: einen in jedem Baum. Natürlich ist nicht zu erwarten, daß jeder  $k$ -kanten zusammenhängende Graph  $k$  kantendisjunkte Spannbäume enthält. Die Frage, wann genau dies der Fall ist, ist somit interessant. In diesem Abschnitt wollen wir dieser Frage nachgehen.

Wie beim Satz von Menger läßt sich leicht eine notwendige Bedingung für die Existenz von  $k$  kantendisjunkten Spannbäumen angeben. Ist nämlich  $P = \{V_1, \dots, V_r\}$  eine beliebige Partition von  $V$ , so enthält jeder Spannbau von  $G$  nach Korollar 0.5.3 mindestens  $r - 1$  Kanten zwischen verschiedenen Partitions Mengen (warum?). Gibt es nun  $k$  kantendisjunkte Spannbäume in  $G$ , so hat  $G$  also für jede solche Partition mindestens  $k(r - 1)$  Kanten zwischen verschiedenen Partitions Mengen. Solche Kanten werden wir im folgenden *Partitions kanten* nennen.

Diese offensichtlich notwendige Bedingung ist wiederum auch hinreichend:

**Satz 2.5.1.** (Tutte 1961; Nash-Williams 1961)

*Ein Multigraph enthält genau dann  $k$  kantendisjunkte Spannbäume, wenn er zu jeder Partition  $P$  seiner Eckenmenge mindestens  $k(|P| - 1)$  Partitions kanten enthält.*

Bevor wir Satz 2.5.1 beweisen, wollen wir ihn kurz mit dem Satz von Menger vergleichen. Interessanterweise bedarf es nur einer Erhöhung des Kantenzusammenhangs von  $k$  auf  $2k$ , um statt irgendwelcher  $k$  kantendisjunkter Wege zwischen je zwei Ecken die Existenz  $k$  kantendisjunkter Spannbäume zu sichern:

**Korollar 2.5.2.** *Jeder  $2k$ -kanten zusammenhängende Multigraph enthält  $k$  kantendisjunkte Spannbäume.*

*Beweis.* Ist  $G$  ein  $2k$ -kanten zusammenhängender Multigraph und ist  $\{V_1, \dots, V_r\}$  eine Partition von  $V(G)$ , so führen von jeder Partitions Menge  $V_i$  mindestens  $2k$  Kanten zu anderen Partitions Mengen. Somit hat  $G$  mindestens  $\frac{1}{2} \sum_{i=1}^r 2k = kr$  Partitions kanten. Die Behauptung folgt mithin aus Satz 2.5.1.  $\square$

Partitions-  
kanten

[5.4.4]

Zum Beweis von Satz 2.5.1 seien ein Multigraph  $G = (V, E)$  und ein  $k \in \mathbb{N}$  gegeben. Es sei  $\mathcal{F}$  die Menge aller  $k$ -Tupel  $F = (F_1, \dots, F_k)$  kantendisjunkter aufspannender W­alder in  $G$  mit der gr­o­o­stm­o­glichen Gesamt­kanten­zahl, also so, da­o­  $\|F\| := |E[F]|$  mit  $E[F] := E(F_1) \cup \dots \cup E(F_k)$  maximal ist.

Ist  $F = (F_1, \dots, F_k) \in \mathcal{F}$  und  $e \in E \setminus E[F]$ , so enth­alt  $F_i + e$  f­ur jedes  $i = 1, \dots, k$  einen Kreis: sonst k­o­nnten wir  $F_i$  in  $F$  durch  $F_i + e$  ersetzen und erhielten einen Widerspruch zur Maximalit­at von  $\|F\|$ . Ist  $e' \neq e$  eine Kante dieses Kreises (f­ur ein festes  $i$ ), und setzen wir  $F'_i := F_i + e - e'$  sowie  $F'_j := F_j$  f­ur alle  $j \neq i$ , so ist auch  $F' := (F'_1, \dots, F'_k) \in \mathcal{F}$ ; wir sagen,  $F'$  sei aus  $F$  durch *Austausch* der Kante  $e'$  gegen die Kante  $e$  entstanden. Beachte, da­o­ die  $e'$  enthaltende Komponente von  $F_i$  bei ihrer Wandlung zu einer Komponente von  $F'_i$  ihre Eckenmenge nicht ­andert. Zu jedem Weg  $x \dots y \subseteq F'_i$  ist also  $x F_i y$  ein wohldefinierter Weg in  $F_i$ ; dies werden wir sp­ater verwenden.

Wir betrachten nun ein festes  $k$ -Tupel  $F^0 = (F_1^0, \dots, F_k^0) \in \mathcal{F}$ . Die Menge aller  $k$ -Tupel aus  $\mathcal{F}$ , die wir durch sukzessiven Kantenaustausch aus  $F^0$  herstellen k­o­nnen, sei mit  $\mathcal{F}^0$  bezeichnet. Weiter sei

$$E^0 := \bigcup_{F \in \mathcal{F}^0} (E \setminus E[F])$$

und  $G^0 := (V, E^0)$ .

**Lemma 2.5.3.** *Zu jedem  $e^0 \in E \setminus E[F^0]$  gibt es eine Eckenmenge  $U \subseteq V$ , die in jedem  $F_i^0$  zusammenh­angend ist ( $i = 1, \dots, k$ ) und die *Endecken* von  $e^0$  enth­alt.*

*Beweis.* Wegen  $F^0 \in \mathcal{F}^0$  ist  $e^0 \in E^0$ ; es sei  $C^0$  die Komponente von  $G^0$ , die  $e^0$  enth­alt. Wir zeigen die Behauptung f­ur  $U := V(C^0)$ .

Es sei  $i \in \{1, \dots, k\}$  gegeben; wir m­ussen zeigen, da­o­  $U$  in  $F_i^0$  zusammenh­angend ist. Dazu beweisen wir zun­achst folgendes:

*Es sei  $F = (F_1, \dots, F_k) \in \mathcal{F}^0$ , und  $(F'_1, \dots, F'_k)$  sei aus  $F$  durch *Austausch* einer Kante von  $F_i$  entstanden. Sind  $x, y$  die *Endecken* eines Weges in  $F'_i \cap C^0$ , dann liegt auch  $x F_i y$  in  $C^0$ .* (1)

Es sei  $e = vw$  die neue Kante aus  $E(F'_i) \setminus E[F]$ ; dies ist die einzige Kante von  $F'_i$ , die nicht auch in  $F_i$  liegt. Wir nehmen  $e \in x F'_i y$  an: sonst w­are  $x F_i y = x F'_i y$  und nichts zu zeigen. Es reicht,  $v F_i w \subseteq C^0$  zu zeigen: dann ist  $(x F'_i y - e) \cup v F_i w$  ein zusammenh­angender Teilmultigraph von  $F_i \cap C^0$ , der  $x, y$  und daher auch  $x F_i y$  enth­alt. Ist  $e'$  eine beliebige Kante von  $v F_i w$ , so k­o­nnten wir  $e'$  in  $F \in \mathcal{F}^0$  gegen  $e$  austauschen und ein Element von  $\mathcal{F}^0$  erhalten, in dem  $e'$  fehlt; es gilt somit  $e' \in E^0$ . Es folgt  $v F_i w \subseteq G^0$ , und somit  $v F_i w \subseteq C^0$  wegen  $v, w \in x F'_i y \subseteq C^0$ . Damit ist (1) bewiesen.



Zum Beweis, daß  $U = V(C^0)$  in  $F_i^0$  zusammenhängend ist, zeigen wir zu jeder Kante  $xy \in C^0$ , daß der Weg  $xF_i^0y$  existiert und in  $C^0$  liegt. Da  $C^0$  zusammenhängend ist, ist die Vereinigung all dieser Wege dann ein zusammenhängender und aufspannender Teilgraph von  $F_i^0[U]$ .

Es sei also  $e = xy \in C^0$  gegeben. Wegen  $e \in E^0$  gibt es ein  $s \in \mathbb{N}$  und  $k$ -Tupel  $F^r = (F_1^r, \dots, F_k^r)$  für  $r = 1, \dots, s$ , so daß jedes  $F^r$  durch Kantenaustausch aus  $F^{r-1}$  entsteht, und  $e \in E \setminus E[F^s]$  ist. Setzen wir  $F := F^s$  in (1), so können wir  $e$  als Weg der Länge 1 in  $F' \cap C^0$  auffassen. Sukzessive Anwendung von (1) auf  $F = F^s, \dots, F^0$  ergibt  $xF_i^0y \subseteq C^0$  wie gewünscht.  $\square$

(0.5.3) **Beweis von Satz 2.5.1.** Nur die Rückrichtung ist zu zeigen. Wir verwenden Induktion nach  $|G|$ . Für  $|G| = 2$  ist die Aussage wahr. Zum Induktionsschritt nehmen wir an, daß  $G$  zu jeder Partition  $P$  von  $V$  mindestens  $k(|P| - 1)$  Partitionskanten enthält und konstruieren  $k$  kantendisjunkte Spannbäume in  $G$ .

$F^0$  Betrachten wir ein beliebiges  $k$ -Tupel  $F^0 = (F_1^0, \dots, F_k^0) \in \mathcal{F}$ . Ist jedes  $F_i^0$  ein Baum, so sind wir fertig. Anderenfalls gilt nach Korollar 0.5.3

$$\|F^0\| = \sum_{i=1}^k \|F_i^0\| < k(|G| - 1).$$

$e^0$  Nach Voraussetzung – betrachte die Partition von  $V$  in lauter einzelne Ecken – gilt andererseits  $\|G\| \geq k(|G| - 1)$ . Es gibt daher eine Kante  $e^0 \in E \setminus E[F^0]$ . Es sei  $U$  die nach Lemma 2.5.3 zu  $e^0$  existierende Eckenmenge, die in jedem  $F_i^0$  zusammenhängend ist und die Endecken von  $e^0$  enthält. Insbesondere ist  $|U| \geq 2$ . Da jede Partition des kontrahierten Multigraphen  $G/U$  eine Partition von  $G$  mit den gleichen Partitionskanten induziert,<sup>4</sup> enthält auch  $G/U$  zu jeder Partition  $P$  mindestens  $k(|P| - 1)$  Partitionskanten. Nach Induktionsannahme gibt es in  $G/U$  daher  $k$  kantendisjunkte Spannbäume  $T_1, \dots, T_k$ . Ersetzen wir in jedem  $T_i$  die aus  $U$  kontrahierte Ecke  $v_U$  durch den Spannb Baum  $F_i^0 \cap G[U]$  von  $G[U]$ , so erhalten wir  $k$  kantendisjunkte Spannbäume von  $G$ .  $\square$

*Graphenzerlegung* Bilden die Kantenmengen der Teilgraphen  $G_1, \dots, G_k$  eines Graphen  $G$  eine Partition von  $E(G)$ , so sagen wir, daß die  $G_i$  den Graphen  $G$  zerlegen. Unser Spannb Baumproblem können wir nun wie folgt umformulieren: in wie viele zusammenhängende aufspannende Teilgraphen läßt sich ein gegebener Graph zerlegen? In dieser Neufassung hat unser Problem jetzt ein offensichtliches Dualproblem (vgl. Satz 0.5.1): in wie wenige kreislose (aufspannende) Teilgraphen läßt sich ein gegebener Graph zerlegen? Oder zu gegebenem  $k$ : welche Graphen sind in höchstens  $k$  Wälder zerlegbar?

<sup>4</sup> siehe Kapitel 0.10 zur Kontraktion in Multigraphen

Auch hier gibt es eine natürliche notwendige Bedingung: für jede Eckenmenge  $U \subseteq V(G)$  enthält jeder Wald in  $G$  höchstens  $|U| - 1$  Kanten auf diesen Ecken, d.h.  $G$  darf auf  $U$  insgesamt höchstens  $k(|U| - 1)$  Kanten haben. Wiederum ist diese offensichtlich notwendige Bedingung auch hinreichend, und interessanterweise läßt sich dies mit dem gleichen Lemma 2.5.3 beweisen wie unser Satz über kantendisjunkte Spannbäume:

**Satz 2.5.4.** (Nash-Williams 1964)

Ein Multigraph  $G = (V, E)$  läßt sich genau dann in höchstens  $k$  Wälder zerlegen, wenn  $\|G[U]\| \leq k(|U| - 1)$  gilt für jede nicht leere Eckenmenge  $U \subseteq V$ .

*Beweis.* Die Vorwärtsrichtung haben wir bereits gesehen. Zur Rückrichtung zeigen wir, daß jedes  $k$ -Tupel  $F = (F_1, \dots, F_k) \in \mathcal{F}$  eine Zerlegung von  $G$  definiert, daß also stets  $E[F] = E$  gilt. Anderenfalls sei  $e \in E \setminus E[F]$ . Nach Lemma 2.5.3 gibt es dazu ein  $U \subseteq V$ , das in jedem  $F_i$  zusammenhängend ist und die Endecken von  $e$  enthält. Für dieses  $U$  enthält  $G[U]$  aus jedem  $F_i$  genau  $|U| - 1$  Kanten, und zusätzlich die Kante  $e$ . Es gilt also  $\|G[U]\| > k(|U| - 1)$ , entgegen unserer Annahme.  $\square$  (0.5.3)

Die geringste Anzahl von Wäldern, in die sich ein Graph zerlegen läßt, nennt man seine *Arborizität*. Nach Satz 2.5.4 ist dies ein Maß für die größte lokale Dichte des Graphen: ein Graph hat genau dann niedrige Arborizität, wenn er “nirgends dicht” ist, d.h. wenn er keinen Teilgraphen  $H$  mit großem  $\varepsilon(H)$  hat. Arborizität

## 2.6 Verbindungswege gegebener Endecken

Ein Graph mit mindestens  $2k$  Ecken heißt  *$k$ -verbunden*, wenn er zu  $2k$  verschiedenen Ecken  $s_1, \dots, s_k, t_1, \dots, t_k$  stets  $k$  disjunkte Wege  $P_1, \dots, P_k$  enthält, mit  $P_i = s_i \dots t_i$  für alle  $i$ . Offenbar ist jeder  $k$ -verbundene Graph  $k$ -zusammenhängend. Die Umkehrung gilt jedoch nicht:  $k$ -Verbundenheit ist im allgemeinen eine wesentlich stärkere Eigenschaft als  $k$ -Zusammenhang. Wir zeigen in diesem Abschnitt, daß es dennoch eine Beziehung zwischen den beiden Begriffen gibt: es existiert eine Funktion  $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  mit der Eigenschaft, daß jeder  $f(k)$ -zusammenhängende Graph  $k$ -verbunden ist.  $k$ -verbunden

Zum Beweis brauchen wir einen Satz, der eigentlich ins Kapitel 6 gehört:

**Satz 2.6.1.** (Mader 1967)

Es existiert eine Funktion  $h: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  mit der Eigenschaft, daß jeder Graph mit Durchschnittsgrad mindestens  $h(r)$  einen  $TK^r$  als Teilgraphen enthält.

(0.2.2) *Beweis.* Für  $r \leq 2$  leistet  $h(r) = 1$  das Gewünschte; im folgenden sei  
 (0.3.1)  $r \geq 3$ . Wir zeigen mit Induktion nach  $m = r, \dots, \binom{r}{2}$ , daß jeder Graph  $G$   
 mit Durchschnittsgrad  $d(G) \geq 2^m$  einen  $TX$  mit  $|X| = r$  und  $\|X\| = m$   
 enthält; für  $m = \binom{r}{2}$  impliziert dies unsere Behauptung mit  $h(r) = 2^{\binom{r}{2}}$ .

Ist  $m = r$ , so enthält  $G$  nach den Propositionen 0.2.2 und 0.3.1  
 einen Kreis der Länge mindestens  $\varepsilon(G) + 1 \geq 2^{r-1} + 1 \geq r + 1$ . Die  
 Behauptung gilt dann mit  $X = C^r$ .

Es sei nun  $r < m \leq \binom{r}{2}$ , und die Behauptung sei wahr für kleinere  $m$ .  
 Es sei  $G$  mit  $d(G) \geq 2^m$  gegeben, also  $\varepsilon(G) \geq 2^{m-1}$ . Da  $G$  eine Kompo-  
 nente  $C$  mit  $\varepsilon(C) \geq \varepsilon(G)$  enthält, dürfen wir  $G$  als zusammenhängend  
 annehmen. Wir betrachten eine in  $G$  zusammenhängende Eckenmenge  
 $U \subseteq V(G)$ ; dieses  $U$  sei maximal gewählt mit  $\varepsilon(G/U) \geq 2^{m-1}$ . (Solch  
 eine Menge  $U$  existiert, da  $G$  selbst die Form  $G/U$  hat mit  $|U| = 1$ .) Da  
 $G$  nach Annahme zusammenhängend ist, gilt  $N(U) \neq \emptyset$ .

Es sei  $H := G[N(U)]$ . Hätte  $H$  eine Ecke  $v$  vom Grad  $d_H(v) < 2^{m-1}$ ,  
 so wäre für  $U' := U \cup \{v\}$  auch  $\varepsilon(G/U') \geq 2^{m-1}$  (im Widerspruch  
 zur Maximalität von  $U$ ): beachte, daß bei der Kontraktion der Kante  
 $vv_U$  in  $G/U$  außer ihr selbst nur  $d_H(v)$  Kanten von  $H$  verlorengehen,  
 insgesamt also höchstens  $2^{m-1}$  Kanten und genau eine Ecke. Also gilt  
 $d(H) \geq \delta(H) \geq 2^{m-1}$ . Nach Induktionsannahme enthält  $H$  einen  $TY$   
 mit  $|Y| = r$  und  $\|Y\| = m - 1$ . Es seien  $x, y$  zwei in  $Y$  nicht benachbarte  
 Verzweigungsecken dieses  $TY$ . Wegen  $x, y \in V(H) = N(U)$  enthält  $G$   
 einen  $x$ - $y$ -Weg, dessen Inneres ganz in  $U$  liegt. Zusammen mit dem  $TY$   
 aus  $H$  bildet dieser Weg einen  $TX$  mit  $|X| = |Y| = r$  und  $\|X\| = m$ . □

Mit Hilfe von Satz 2.6.1 können wir jetzt zeigen, daß  $k$ -Verbundenheit für jedes gegebene  $k$  durch hinreichend großen Zusammenhang erzwingbar ist:

**Satz 2.6.2.** (Jung 1970; Larman & Mani 1970)

*Es existiert eine Funktion  $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  mit der Eigenschaft, daß für alle  $k \in \mathbb{N}$  jeder  $f(k)$ -zusammenhängende Graph  $k$ -verbunden ist.*

(2.3.1) *Beweis.* Wir zeigen die Behauptung für  $f(k) = h(3k) + 2k$ , wobei  $h$  eine  
 $G$  Funktion sei wie in Satz 2.6.1. Es sei  $G$  ein  $f(k)$ -zusammenhängender  
 $K$  Graph. Dann gilt  $d(G) \geq \delta(G) \geq \kappa(G) \geq h(3k)$ ; es sei  $K = TK^{3k} \subseteq G$   
 $U$  gemäß Satz 2.6.1, und  $U$  die Menge der Verzweigungsecken von  $K$ .

$s_i, t_i$  Zum Beweis, daß  $G$   $k$ -verbunden ist, seien  $s_1, \dots, s_k, t_1, \dots, t_k$  paar-  
 weise verschiedene Ecken von  $G$ . Nach Definition von  $f(k)$  ist  $\kappa(G) \geq 2k$ .  
 Nach dem Satz von Menger (2.3.1) enthält  $G$  daher disjunkte Wege  
 $P_1, \dots, P_k, Q_1, \dots, Q_k$ , wobei  $P_i$  in  $s_i$  beginnt,  $Q_i$  in  $t_i$  beginnt, und  
 $P_i, Q_i$  alle  $P_i$  und  $Q_i$  in  $U$  enden aber keine inneren Ecken in  $U$  haben. Die  
 $\mathcal{P}$  Wege seien so gewählt, daß die Gesamtzahl ihrer Kanten außerhalb von  
 $E(K)$  minimal ist; die Menge all dieser Wege sei mit  $\mathcal{P}$  bezeichnet.

Es seien  $u_1, \dots, u_k$  die Ecken in  $U$ , die nicht Endecke eines Weges aus  $\mathcal{P}$  sind. Für jedes  $i = 1, \dots, k$  sei  $L_i$  der  $U$ -Weg in  $K$  (also die unterteilte Kante des  $K^{3k}$ ) von  $u_i$  zur Endecke von  $P_i$  in  $U$ , und  $v_i$  die erste Ecke von  $L_i$  auf einem Weg  $P \in \mathcal{P}$ . Nach Definition von  $\mathcal{P}$  hat  $P$  nicht mehr Kanten außerhalb von  $E(K)$  als  $Pv_iL_iu_i$ , d.h. es gilt  $v_iP = v_iL_i$  und demnach  $P = P_i$  (Abb. 2.6.1). Bezeichnet entsprechend  $M_i$  den  $U$ -Weg in  $K$  von  $u_i$  zur Endecke von  $Q_i$  in  $U$  und  $w_i$  die erste Ecke von  $M_i$  auf einem Weg in  $\mathcal{P}$ , so ist dieser Weg notwendig  $Q_i$ . Die Wege  $s_iP_iv_iL_iu_iM_iw_iQ_it_i$  sind dann disjunkt für verschiedene  $i$ , und  $G$  ist als  $k$ -verbunden erwiesen.  $\square$

$u_i$   
 $L_i$   
 $v_i$   
  
 $M_i$   
 $w_i$

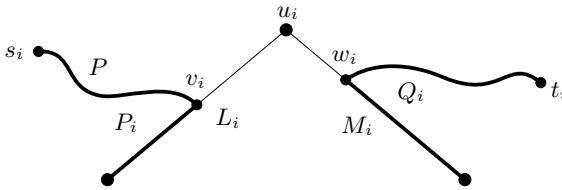


Abb. 2.6.1. Konstruktion eines  $s_i-t_i$ -Weges über  $u_i$

## Übungen

- Es seien  $G$  ein Graph,  $X \subseteq V(G)$ , und  $a, b \in G - X$  zwei durch  $X$  in  $G$  getrennte Ecken. Zeige, daß  $X$  genau dann ein minimaler  $a-b$ -Trenner in  $G$  ist, wenn jede Ecke aus  $X$  sowohl in der Komponente  $C_a$  von  $G - X$ , die  $a$  enthält, als auch in der Komponente  $C_b$  von  $G - X$ , die  $b$  enthält, einen Nachbarn hat.

- (Fortsetzung der vorigen Übung)

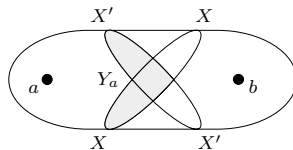
Es sei  $X' \subseteq V(G) \setminus \{a, b\}$  ein weiterer  $a-b$ -Trenner. Entsprechend seien  $C'_a$  und  $C'_b$  definiert. Zeige, daß auch

$$Y_a := (X \cap C'_a) \cup (X \cap X') \cup (X' \cap C_a)$$

und

$$Y_b := (X \cap C'_b) \cup (X \cap X') \cup (X' \cap C_b)$$

die Ecken  $a$  und  $b$  trennen (siehe Abbildung).



3. (Fortsetzung der vorigen Übung)
 

Sind  $Y_a$  und  $Y_b$  minimale  $a$ - $b$ -Trenner in  $G$ , wenn  $X$  und  $X'$  es sind?  
 Sind  $|Y_a|$  und  $|Y_b|$  minimal für  $a$ - $b$ -Trenner aus  $V(G) \setminus \{a, b\}$ , wenn  $|X|$  und  $|X'|$  es sind?
4. Es seien  $G$  ein Graph und  $X, X' \subseteq V(G)$  zwei minimale  $G$  trennende Eckenmengen. Die Menge  $X$  treffe mindestens zwei Komponenten von  $G - X'$ . Zeige, daß  $X'$  alle Komponenten von  $G - X$  trifft, und daß  $X$  alle Komponenten von  $G - X'$  trifft.
- 5.<sup>-</sup> Beweise die elementaren Aussagen über Blöcke am Anfang von Abschnitt 2.1.
6. Zeige, daß der Block-Graph eines zusammenhängenden Graphen stets ein Baum ist.
7. Zeige ohne den Satz von Menger, daß in einem 2-zusammenhängenden Graphen je zwei Ecken auf einem gemeinsamen Kreis liegen.
8. Für Kanten  $e, e'$  eines Graphen  $G$  gelte  $e \sim e'$  genau dann, wenn  $e = e'$  ist oder  $e$  und  $e'$  auf einem gemeinsamen Kreis in  $G$  liegen. Zeige, daß  $\sim$  eine Äquivalenzrelation auf  $E(G)$  ist, deren Äquivalenzklassen gerade die Kantenmengen der nicht trivialen Blöcke von  $G$  sind.
9. Zeige, daß für jede Kante  $e$  eines 2-zusammenhängenden Graphen  $G \neq K^3$  entweder  $G - e$  oder  $G/e$  wiederum 2-zusammenhängend ist.
10. Zeige, daß für einen 3-zusammenhängenden Graphen  $G$  und eine Kante  $xy \in G$  genau dann  $G/xy$  wieder 3-zusammenhängend ist, wenn  $G - \{x, y\}$  2-zusammenhängend ist.
11. (i) Zeige, daß jeder kubische 3-kantenzusammenhängende Graph auch 3-zusammenhängend ist.  
 (ii) Zeige, daß ein Graph genau dann kubisch und 3-zusammenhängend ist, wenn man ihn iterativ aus einem  $K^4$  durch die folgende Operation konstruieren kann: die Unterteilung zweier Kanten durch je eine Ecke und Verbinden der beiden neuen Ecken durch eine neue Kante.
- 12.<sup>+</sup> Beweise oder widerlege die Existenz einer endlichen Menge 3-zusammenhängender Graphen, von der ausgehend jeder 3-zusammenhängende Graph durch wiederholte Anwendung der folgenden Operation konstruierbar ist: füge eine neue Ecke zum bisher konstruierten Graphen  $H$  hinzu und verbinde sie durch mindestens 3 Kanten mit einer Unterteilung von  $H$ . (Jede neue Kante ist also entweder mit einer Ecke von  $H$  inzident oder mit einer neu geschaffenen Unterteilungsecke auf einer Kante von  $H$ .)
- 13.<sup>-</sup> Zeige, daß der Satz von Menger äquivalent ist zur folgenden Aussage: in einem Graphen  $G$  gibt es zu zwei Eckenmengen  $A, B$  stets eine Menge  $\mathcal{P}$  disjunkter  $A$ - $B$ -Wege und einen  $A$ - $B$ -Trenner  $X = \{x_P \mid P \in \mathcal{P}\}$  mit  $x_P \in P$  für alle  $P \in \mathcal{P}$ .

14. Finde den Fehler im folgenden “einfachen Beweis” des Satzes von Menger (2.3.1). Es sei  $X$  ein  $A$ - $B$ -Trenner aus möglichst wenigen Ecken. Bezeichne mit  $G_A$  den Untergraphen von  $G$ , der durch  $X$  und all die Komponenten von  $G - X$  induziert wird, die  $A$  treffen; entsprechend sei  $G_B$  definiert. Da jeder  $A$ - $B$ -Weg  $X$  trifft, enthält  $G_A$  keinen  $A$ - $X$ -Trenner aus weniger als  $|X|$  Ecken. Mit Induktion nach  $|G|$  enthält  $G_A$  daher  $|X|$  disjunkte Wege von  $A$  nach  $X$ , und  $G_B$  enthält entsprechende  $X$ - $B$ -Wege. Zusammen bilden diese Wege das gesuchte Wegesystem zwischen  $A$  und  $B$ .
15. Beweise den Satz von Menger wie folgt mit Induktion nach  $\|G\|$ . Zu einer Kante  $e = xy$  betrachte einen kleinsten  $A$ - $B$ -Trenner  $S$  in  $G - e$ . Zeige, daß  $S \cup \{x\}$  und  $S \cup \{y\}$  kleinste  $A$ - $B$ -Trenner in  $G$  sind. Zeige dann weiter, daß wenn keiner dieser beiden Trenner als  $X$  in der vorigen Übung einen korrekten Beweis ergibt, nur noch ein einfacher Restfall zu betrachten bleibt.
16. Führe den Beweis von Korollar 2.3.4 (ii) genau durch.
17. Zeige, daß für  $k \geq 2$  jeder  $k$ -zusammenhängende Graph mit mindestens  $2k$  Ecken einen Kreis der Länge mindestens  $2k$  enthält.
18. Zeige, daß in einem  $k$ -zusammenhängenden Graphen ( $k \geq 2$ ) je  $k$  Ecken auf einem gemeinsamen Kreis liegen.
19. Leite die Kantenversion von Korollar 2.4.2 aus seiner Eckenversion her. (Tip: Betrachte die  $H$ -Wege in dem Graphen, der aus der disjunkten Vereinigung von  $H$  und  $L(G)$  durch Einfügen aller Kanten  $he$  entsteht, für die  $h$  eine Ecke von  $H$  und  $e$  eine in  $G$  mit  $h$  inzidente Kante aus  $E(G) \setminus E(H)$  ist.)
20. <sup>-</sup> In der disjunkten Vereinigung eines Graphen  $H = \overline{K^{2m+1}}$  mit  $k$  Exemplaren des  $K^{2m+1}$  verbinde  $V(H)$  mit jedem der  $K^{2m+1}$  bijektiv durch  $2m + 1$  Kanten. Zeige, daß der entstandene Graph  $G$  höchstens  $km = \frac{1}{2}\kappa_G(H)$  kreuzungsfreie  $H$ -Wege enthält.
21. Finde einen bipartiten Graphen  $G$  mit Partitions Mengen  $A$  und  $B$ , der für  $H := G[A]$  nur  $\frac{1}{2}\lambda_G(H)$  kantendisjunkte  $H$ -Wege enthält.
22. <sup>+</sup> Leite den 1-Faktor-Satz von Tutte (1.2.1) aus dem Satz von Mader ab. (Tip: Füge zu jeder Ecke  $v \in G$  eine neue Ecke  $v'$  hinzu und verbinde sie mit  $v$ . Zeige, daß für ein geeignetes  $H$  die 1-Faktoren in  $G$  genau den hinreichend großen Mengen kreuzungsfreier  $H$ -Wege in dem erweiterten Graphen entsprechen.)
23. Finde den Fehler in dem folgenden kurzen “Beweis” von Satz 2.5.1. Eine Partition heiße *nicht-trivial*, wenn sie mindestens zwei Klassen hat und nicht jede Klasse nur ein Element enthält. Wir zeigen mit Induktion nach  $|V| + |E|$ , daß ein Graph  $G = (V, E)$  stets  $k$  kantendisjunkte Spannbäume hat, wenn jede nicht-triviale Partition von  $V$  (in, sagen wir,  $r$  Klassen) mindestens  $k(r - 1)$  Partitionskanten hat. Der Induktionsanfang ist trivial mit  $G = K^1$ , wenn wir  $k$  Exemplare von  $K^1$

als Familie kantendisjunkter Spannbäume von  $K^1$  zulassen. Betrachten wir nun den Induktionsschritt. Hat jede nicht-triviale Partition von  $V$  in (sagen wir)  $r$  Klassen mehr als  $k(r-1)$  Partitionskanten, so löschen wir irgendeine Kante von  $G$  und wenden die Induktionsannahme an. Anderenfalls hat  $V$  eine nicht-triviale Partition  $\{V_1, \dots, V_r\}$  mit genau  $k(r-1)$  Partitionskanten. Es sei etwa  $|V_1| \geq 2$ . Hat  $G' := G[V_1]$  nun  $k$  disjunkte Spannbäume, so kombinieren wir diese mit den  $k$  disjunkten Spannbäumen, die  $G/V_1$  nach Induktionsannahme hat. Nehmen wir daher an,  $G'$  habe keine  $k$  disjunkten Spannbäume. Nach Induktionsannahme hat  $V(G')$  dann eine nicht-triviale Partition  $\{V'_1, \dots, V'_s\}$  mit weniger als  $k(s-1)$  Partitionskanten. Dann ist aber  $\{V'_1, \dots, V'_s, V_2, \dots, V_r\}$  eine nicht-triviale Eckenpartition von  $G$  in  $r+s-1$  Klassen mit weniger als  $k(r-1) + k(s-1) = k((r+s-1)-1)$  Partitionskanten, ein Widerspruch.

24.<sup>-</sup> Zeige, daß jeder  $k$ -verbundene Graph  $(2k-1)$ -zusammenhängend ist.

## Notizen

Obwohl Zusammenhangsprobleme zu den natürlichsten und auch anwendungreichsten Fragestellungen der Graphentheorie gehören, gibt es bislang keine einschlägige Monographie darüber. Detaillierte Darstellungen wesentlicher Teile finden sich bei B. Bollobás, *Extremal Graph Theory*, Academic Press 1978, bei R. Halin, *Graphentheorie*, Wissenschaftliche Buchgesellschaft 1980, und in A. Franks Kapitel des *Handbook of Combinatorics* (R.L. Graham, M. Grötschel & L. Lovász, Hrsg.), North-Holland 1995. Einen Überblick speziell über Resultate und Techniken zu minimal  $n$ -zusammenhängenden Graphen gibt W. Mader, On vertices of degree  $n$  in minimally  $n$ -connected graphs and digraphs, in (D. Miklos, V.T. Sós und T. Szőnyi, Hrsg.) *Paul Erdős is 80*, Band 2, Proc. Colloq. Math. Soc. János Bolyai, Budapest 1996.

Unser Beweis des Satzes von Tutte (2.2.3) stammt von C. Thomassen, Planarity and duality of finite and infinite graphs, *J. Combin. Theory B* **29** (1980), 244–271. In dieser Arbeit finden sich auch Lemma 2.2.1 und sein Beweis. Die Aussage des Lemmas selbst folgt natürlich bereits aus Tuttes *wheel theorem*, unserem Satz 2.2.2, den wir hier umgekehrt mit Hilfe des Lemmas bewiesen haben.

Ein im Text nicht angesprochener Ansatz, die Struktur der  $k$ -zusammenhängenden Graphen auch für  $k > 3$  besser zu verstehen, ist das Studium *minimal  $k$ -zusammenhängender* Graphen:  $k$ -zusammenhängender Graphen, die bei jeder Löschung einer Kante ihren  $k$ -Zusammenhang verlieren. Wie bei allen  $k$ -zusammenhängenden Graphen betragen auch bei den minimalen alle Eckengrade mindestens  $k$ . Ein klassischer Satz von Halin (1969) besagt, daß jeder minimal  $k$ -zusammenhängende Graph jedoch tatsächlich eine Ecke des Grades  $k$  enthält; dies ist besonders wertvoll in Induktionsbeweisen. Halins Satz bildet den Ausgangspunkt einer Reihe tiefer Untersuchungen von Mader, die in den erwähnten Büchern von Bollobás und Halin dargestellt sind, insbesondere jedoch in dem genannten Übersichtsartikel von Mader.

Unser erster Beweis des Satzes von Menger stammt von F. Göring (Short proof of Menger's Theorem, *Discrete Math.* **219** (2000), 295–296), der zweite

von T. Böhme, F. Göring und J. Harant (Manuskript 1999). Der dritte Beweis ist von T. Grünwald (später Gallai), Ein neuer Beweis eines Mengerschen Satzes, *J. London Math. Soc.* **13** (1938), 188–192. Die globale Version des Satzes von Menger (Satz 2.3.5) wurde so zuerst von Whitney (1932) formuliert und bewiesen.

Der Satz von Mader (2.4.1) ist aus W. Mader, Über die Maximalzahl kreuzungsfreier  $H$ -Wege, *Arch. Math.* **31** (1978), 387–402. Der Satz läßt sich auffassen als gemeinsame Verallgemeinerung des Satzes von Menger und des 1-Faktor-Satzes 1.2.1 von Tutte (Übung). Satz 2.5.1 wurde unabhängig von Nash-Williams und von Tutte bewiesen; beide Arbeiten finden sich im *J. London Math. Soc.* **36** (1961). Satz 2.5.4 ist von C. St. J. A. Nash-Williams, Decompositions of finite graphs into forests, *J. London Math. Soc.* **39** (1964), 12. Unsere Beweise folgen einer Ausarbeitung von Mader. Beide Sätze lassen sich elegant in der Sprache der Matroide ausdrücken und beweisen; siehe dazu § 18 in B. Bollobás, *Combinatorics*, Cambridge University Press 1986.

In Kapitel 6.2 werden wir zeigen, daß zur Erzwingung eines topologischen  $K^r$ -Minors nicht ein Durchschnittsgrad von  $h(r) = 2^{\binom{r}{2}}$  nötig ist, wie im Beweis von Satz 2.6.1: der erforderliche Durchschnittsgrad läßt sich vielmehr durch eine quadratische Funktion in  $r$  beschränken (Satz 6.2.1). Auch Satz 2.6.2 läßt sich verschärfen: B. Bollobás und A. G. Thomason zeigten in Highly linked graphs, *Combinatorica* **16** (1996), 313–320, daß auch hier eine lineare Schranke existiert: jeder  $22k$ -zusammenhängende Graph ist  $k$ -verbunden. Aus unserem Satz 6.2.1 wird mit dem Beweis von Satz 2.6.2 immerhin die Existenz einer lediglich quadratisch mit  $k$  wachsenden Funktion  $f$  folgen, für die jeder  $f(k)$ -zusammenhängende Graph  $k$ -verbunden ist. N. Robertson & P. D. Seymour, Graph Minors XIII: The disjoint paths problem, *J. Combin. Theory B* **63** (1995), 65–110, haben gezeigt, daß für jedes feste  $k$  ein  $O(n^3)$ -Algorithmus existiert, der entscheidet, ob ein gegebener Graph mit  $n$  Ecken  $k$ -verbunden ist. Betrachtet man  $k$  als Teil der Eingabe, so wird das Problem NP-schwer.





In diesem Kapitel behandeln wir Darstellungen von Graphen in der euklidischen Ebene. Nach dem klassischen Begriff einer solchen Darstellung werden die Ecken des betrachteten Graphen auf Punkte der Ebene abgebildet und seine Kanten auf Kurven (sogenannte Jordanbögen), die einander nur in gemeinsamen Endecken schneiden dürfen. Statt allgemeiner Kurven werden wir zwar als Bilder von Kanten nur stückweise geradlinige Kurven zulassen, sogenannte Polygonzüge; es ist jedoch nicht schwer zu zeigen, daß jeder im allgemeinen Sinn in der Ebene darstellbare Graph auch eine Darstellung in diesem eingeschränkten Sinne hat.

### 3.1 Topologische Voraussetzungen

In diesem Abschnitt sind die für den weiteren Verlauf des Kapitels nötigen topologischen Grundlagen zusammengestellt.<sup>1</sup> Ein *Polygon* in der euklidischen Ebene ist eine zum Einheitskreis homöomorphe Teilmenge des  $\mathbb{R}^2$ , die die Vereinigung endlich vieler Strecken ist. (Teilmengen eines gegebenen topologischen Raumes seien grundsätzlich mit der Unterraumtopologie ausgestattet.) Ein *Polygonzug* ist eine zum abgeschlossenen Einheitsintervall  $[0, 1]$  homöomorphe Teilmenge des  $\mathbb{R}^2$ , die die Vereinigung endlich vieler Strecken ist. Die Bilder von 0 und 1 unter einem solchen Homöomorphismus sind die *Endpunkte* des Polygonzuges; dieser verläuft *zwischen* seinen Endpunkten und *verbindet* sie.

Es sei  $O \subseteq \mathbb{R}^2$  offen. Durch einen Polygonzug in  $O$  verbunden zu sein definiert eine Äquivalenzrelation auf  $O$ . Die zugehörigen Äquivalenz-

*Polygon*

*Polygonzug*

<sup>1</sup> Die Beweise dieser Tatsachen sind nicht schwer; siehe die in den Notizen angegebene Literatur.

*Gebiet* klassen sind wieder offen; wir nennen sie die *Gebiete* von  $O$ . Ist  $X \subseteq O$  abgeschlossen, und sind  $y_1, y_2$  zwei Punkte aus verschiedenen Gebieten von  $O \setminus X$ , so *trennt*  $X$  die Punkte  $y_1$  und  $y_2$  in  $O$ .

*Rand* Der *Rand* einer Menge  $X \subseteq \mathbb{R}^2$  ist die Menge  $Y$  aller Punkte  $y \in \mathbb{R}^2$ , für die jede Umgebung von  $y$  sowohl  $X$  als auch  $\mathbb{R}^2 \setminus X$  trifft. Ist  $X$  offen, so liegt sein Rand ganz in  $\mathbb{R}^2 \setminus X$  (warum?).

Zwei Eigenschaften des Randes werden wir wiederholt benutzen. Die erste ist diese: ist  $X$  die Vereinigung endlich vieler Strecken und Punkte (z.B. ein ebener Graph, s.u.),  $f$  ein Gebiet von  $\mathbb{R}^2 \setminus X$ , und liegt  $x \in X$  auf dem Rand von  $f$ , dann existiert eine Strecke zwischen  $x$  und einem Punkt in  $f$ , deren Inneres in  $f$  liegt. Das Gebiet  $f$  ist also von den Punkten seines Randes "direkt zugänglich". Folglich sind je zwei Punkte des Randes von  $f$  durch einen Polygonzug verbindbar, dessen Inneres ganz in  $f$  liegt.

Die zweite wichtige Eigenschaft des Randes ist die folgende: ist  $O \subseteq \mathbb{R}^2$  offen und  $\varphi: [0, 1] \rightarrow P \subseteq \mathbb{R}^2$  ein Homöomorphismus mit  $\varphi(0) \in O$  und  $\varphi(1) \notin O$ , dann trifft  $P$  den Rand von  $O$ , und zwar mindestens im Punkt  $\varphi(y)$  mit  $y := \sup \{x \mid \varphi([0, x]) \subseteq O\}$ . Da  $O$  offen ist, liegt  $\varphi(y)$  als Randpunkt selbst nicht in  $O$ ; wir nennen  $\varphi(y)$  den *ersten Punkt* von  $P$  in  $\mathbb{R}^2 \setminus O$ .

[3.2.1]  
[3.2.5]  
[3.3.1]  
[3.5.1]  
[3.5.2]  
[3.6.1]  
[4.1.2]

**Satz 3.1.1.** (Jordanscher Kurvensatz für Polygone)

Ist  $P \subseteq \mathbb{R}^2$  ein Polygon, so hat  $\mathbb{R}^2 \setminus P$  genau zwei Gebiete, von denen genau eines beschränkt ist. Jedes der beiden Gebiete hat als Rand ganz  $P$ .

Satz 3.1.1 ist das wesentliche Hilfsmittel im Beweis des folgenden Lemmas.

[3.2.6]  
[3.2.8]  
[3.3.2]

**Lemma 3.1.2.** Es seien  $P_1, P_2, P_3$  drei Polygonzüge, mit den gleichen Endpunkten aber sonst disjunkt.

- (i)  $\mathbb{R}^2 \setminus (P_1 \cup P_2 \cup P_3)$  hat genau drei Gebiete, mit Rändern  $P_1 \cup P_2$ ,  $P_2 \cup P_3$  und  $P_1 \cup P_3$ .

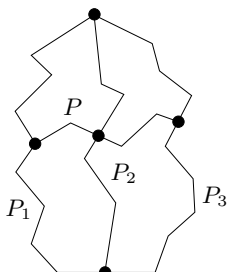


Abb. 3.1.1. Die Polygonzüge in Lemma 3.1.2 (ii)

- (ii) Ist  $P$  ein Polygonzug zwischen einem Punkt in  $\overset{\circ}{P}_1$  und einem Punkt in  $\overset{\circ}{P}_3$ , dessen Inneres in dem Gebiet von  $\mathbb{R}^2 \setminus (P_1 \cup P_3)$  liegt, das  $\overset{\circ}{P}_2$  enthält, dann ist  $\overset{\circ}{P} \cap \overset{\circ}{P}_2 \neq \emptyset$ .

Das folgende Lemma besagt im wesentlichen, daß ein einzelner Polygonzug die Ebene *nicht* in zwei oder mehr Gebiete trennt; es bildet damit eine Art Gegenstück zum Jordanschen Kurvensatz. Etwas allgemeiner betrachten wir einen Polygonzug, der zwei disjunkte ebene Graphen (siehe Abschnitt 3.2) verbindet:

**Lemma 3.1.3.** Sind zwei disjunkte Mengen  $X_1, X_2 \subseteq \mathbb{R}^2$  jeweils die Vereinigung endlich vieler Punkte und Polygonzüge, und ist  $P$  ein Polygonzug zwischen einem Punkt in  $X_1$  und einem Punkt in  $X_2$ , dessen Inneres  $O$  ganz in einem Gebiet  $O$  von  $\mathbb{R}^2 \setminus (X_1 \cup X_2)$  liegt, so ist  $O \setminus \overset{\circ}{P}$  ein Gebiet von  $\mathbb{R}^2 \setminus (X_1 \cup P \cup X_2)$ .

[3.2.1]  
[3.2.4]

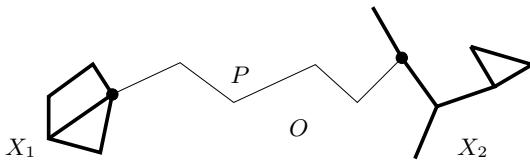


Abb. 3.1.2. Lemma 3.1.3:  $P$  trennt  $O$  nicht

Die nun folgenden Begriffe und Tatsachen brauchen wir nur an einer Stelle, bei der Betrachtung von Äquivalenzen ebener Graphen in Abschnitt 3.3.

Mit  $S^n$  bezeichnen wir wie üblich die  $n$ -dimensionale Einheits-  
 sphäre, die Menge aller Punkte des euklidischen Raums  $\mathbb{R}^{n+1}$  mit Ab-  
 stand 1 vom Ursprung. Die um den "Nordpol"  $(0, 0, 1)$  verminderte 2-  
 dimensionale Einheitssphäre ist homöomorph zur euklidischen Ebene; es  
 sei  $\pi: S^2 \setminus \{(0, 0, 1)\} \rightarrow \mathbb{R}^2$  ein fest gewählter Homöomorphismus, etwa  
 die sogenannte stereographische Projektion. Ist  $P \subseteq \mathbb{R}^2$  ein Polygon und  
 $O$  das beschränkte Gebiet von  $\mathbb{R}^2 \setminus P$ , so nennen wir  $C := \pi^{-1}(P)$  einen  
 Kreis auf  $S^2$ , und die Mengen  $\pi^{-1}(O)$  und  $S^2 \setminus \pi^{-1}(P \cup O)$  die Gebiete  
 von  $C$ .

$S^n$

$\pi$

Kreise,  
Gebiete  
auf  $S^2$

Unser letztes Hilfsmittel ist der Satz von Jordan und Schoenflies, in einer leicht auf unsere geplante Anwendung (im Beweis von Satz 3.3.1) zugeschnittenen Fassung:

**Satz 3.1.4.** Ist  $\varphi: C_1 \rightarrow C_2$  ein Homöomorphismus zwischen zwei Kreisen auf  $S^2$ , und ist  $O_1$  ein Gebiet von  $C_1$  und  $O_2$  ein Gebiet von  $C_2$ , so ist  $\varphi$  zu einem Homöomorphismus  $C_1 \cup O_1 \rightarrow C_2 \cup O_2$  fortsetzbar.

[3.3.1]

## 3.2 Ebene Graphen

ebener  
Graph

Ein *ebener Graph* ist ein Paar  $(V, E)$  endlicher Mengen mit den folgenden Eigenschaften (die Elemente von  $V$  heißen wieder *Ecken*, die Elemente von  $E$  *Kanten*):

- (i)  $V \subseteq \mathbb{R}^2$ ;
- (ii) jede Kante ist ein Polygonzug zwischen zwei Ecken;
- (iii) verschiedene Kanten haben verschiedene Mengen von Endpunkten;
- (iv) das Innere einer jeden Kante enthält weder eine Ecke noch einen Punkt einer anderen Kante.

Ein ebener Graph  $(V, E)$  definiert in natürlicher Weise einen Graphen  $G$  auf  $V$ . Solange klar ist, was wir meinen, werden wir der Kürze halber die Bezeichnung  $G$  dieses (abstrakten) Graphen auch für den ebenen Graphen  $(V, E)$  oder die Punktmenge  $V \cup \bigcup E$  verwenden; Entsprechendes gilt für abstrakte und ebene Kanten, sowie für Teilgraphen etc.<sup>2</sup>

Gebiete  
von  $G$

Für jeden ebenen Graphen  $G$  ist  $\mathbb{R}^2 \setminus G$  offen; die Gebiete von  $\mathbb{R}^2 \setminus G$  nennen wir kurz die *Gebiete von  $G$* . Da  $G$  beschränkt ist (d.h. in einer hinreichend großen Kreisscheibe  $D$  liegt), ist genau eines seiner Gebiete unbeschränkt (nämlich das  $\mathbb{R}^2 \setminus D$  enthaltende Gebiet); dieses Gebiet ist das *Außengebiet* von  $G$ , die anderen Gebiete sind seine *Innengebiete*. Die Menge der Gebiete von  $G$  bezeichnen wir mit  $F(G)$ , den Rand eines Gebietes  $f$  mit  $G[f]$ .

$F(G)$   
 $G[f]$

[3.5.1]  
[3.5.2]

**Lemma 3.2.1.** *Es sei  $G$  ein ebener Graph und  $e$  eine Kante von  $G$ .*

- (i) *Für jedes Gebiet  $f$  von  $G$  gilt entweder  $e \subseteq G[f]$  oder  $e \cap G[f] = \emptyset$ .*
- (ii) *Die Kante  $e$  liegt auf dem Rand mindestens eines und höchstens zweier Gebiete von  $G$ .*
- (iii) *Liegt  $e$  auf einem Kreis  $C \subseteq G$ , so liegt  $e$  auf dem Rand genau zweier Gebiete von  $G$ , und diese sind in verschiedenen Gebieten von  $C$  enthalten. Liegt  $e$  auf keinem Kreis, so liegt  $e$  auf dem Rand nur eines Gebietes.*

(3.1.1)  
(3.1.3)

*Beweis.* Wir beweisen alle drei Aussagen zusammen. Dazu zeigen wir zunächst, daß ein spezieller Punkt  $x_0$  aus  $e$  auf dem Rand genau eines oder genau zweier Gebiete von  $G$  liegt, und zwar genau dann auf dem Rand zweier Gebiete, wenn  $e$  auf einem Kreis liegt (der dann die beiden Gebiete trennt). Wir zeigen dann weiter, daß auch jeder andere Punkt aus  $e$  auf dem Rand genau dieser ein oder zwei Gebiete liegt. Da jede Umgebung eines Endpunktes von  $e$  auch Umgebung eines inneren Punktes von  $e$  ist, liegen die Endpunkte von  $e$  dann auch auf dem Rand dieser Gebiete.

<sup>2</sup> Als Hilfestellung werden wir Differenzen von Punktmenge mit  $\setminus$  bezeichnen, Differenzen von Graphen aber wie bisher mit  $-$ .

$G$  ist die Vereinigung endlich vieler Strecken.<sup>3</sup> Um jeden Punkt  $x \in \mathring{e}$  existiert daher eine offene Kreisscheibe  $D_x$  mit  $x$  als Mittelpunkt, die nur die (ein oder zwei) Strecken trifft, die  $x$  enthalten.

$D_x$

Wir wählen zunächst irgendeinen inneren Punkt  $x_0$  aus einer Strecke  $S \subseteq e$ . Dann ist  $D_{x_0} \cap G = D_{x_0} \cap S$ , d.h.  $D_{x_0} \setminus G$  ist die Vereinigung zweier offener Halbscheiben. Da die Halbscheiben  $G$  nicht treffen, liegt jede von ihnen in einem Gebiet von  $G$ . Diese Gebiete seien mit  $f_1$  und  $f_2$  bezeichnet; sie sind die einzigen Gebiete von  $G$ , auf deren Rand  $x_0$  liegt, und möglicherweise ist  $f_1 = f_2$  (Abb. 3.2.1).

$x_0$

$S$

$f_1, f_2$

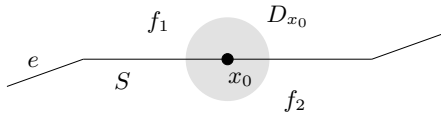


Abb. 3.2.1. Gebiete  $f_1, f_2$  von  $G$  im Beweis von Lemma 3.2.1

Liegt  $e$  auf einem Kreis  $C \subseteq G$ , so trifft  $D_{x_0}$  nach Satz 3.1.1 beide Gebiete von  $C$ . Da wegen  $C \subseteq G$  jedes Gebiet von  $G$  Teilmenge eines Gebiets von  $C$  ist, sind  $f_1$  und  $f_2$  somit in verschiedenen Gebieten von  $C$  enthalten und insbesondere selbst verschieden. Liegt  $e$  auf keinem Kreis, so ist  $e$  eine Brücke, verbindet also zwei disjunkte Punktmengen  $X_1, X_2$  mit  $X_1 \cup X_2 = G \setminus \mathring{e}$ . Offenbar ist  $f_1 \cup \mathring{e} \cup f_2$  Teilmenge eines Gebietes  $f$  von  $G - e$  (warum?), und nach Lemma 3.1.3 ist  $f \setminus \mathring{e}$  ein (einziges) Gebiet von  $G$ . Aus  $f_1, f_2 \subseteq f \setminus \mathring{e}$  folgt aber  $f_1 = f \setminus \mathring{e} = f_2$ , da ja  $f_1$  und  $f_2$  selbst Gebiete von  $G$  sind.

Betrachten wir nun einen beliebigen weiteren Punkt  $x_1 \in \mathring{e}$ . Es sei  $P$  der in  $e$  enthaltene Polygonzug von  $x_0$  nach  $x_1$ .  $P$  ist kompakt und daher von endlich vielen der Scheiben  $D_x$  mit  $x \in P$  überdeckt. Wir numerieren diese Scheiben als  $D_0, \dots, D_n$  in der natürlichen Reihenfolge ihrer Mittelpunkte auf  $P$ ; durch Hinzufügung von  $D_{x_0}$  oder  $D_{x_1}$  (falls nötig) dürfen wir annehmen, daß  $D_0 = D_{x_0}$  ist und  $D_n = D_{x_1}$ . Wie man leicht mit Induktion nach  $n$  sieht, ist jeder Punkt  $y \in D_n \setminus e$  durch einen Polygonzug innerhalb von  $(D_0 \cup \dots \cup D_n) \setminus e$  mit einem Punkt  $z \in D_0 \setminus e$  verbindbar (Abb. 3.2.2);  $y$  und  $z$  sind dann äquivalent in

$x_1$

$P$

$D_0, \dots, D_n$

$y$

$z$

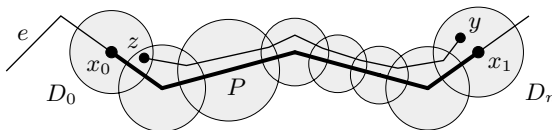


Abb. 3.2.2. Ein Polygonzug von  $y$  nach  $D_0$  nahe bei  $P$

<sup>3</sup> Auch isolierte Ecken fassen wir als Strecken auf, wenn dies dem Sprachfluß dient...

$\mathbb{R}^2 \setminus G$ . Damit liegt aber jeder Punkt aus  $D_n \setminus e$  in  $f_1$  oder in  $f_2$ , d.h.  $x_1$  kann nicht auf dem Rand eines anderen Gebietes von  $G$  liegen. Da beide Halbscheiben von  $D_0 \setminus e$  auf diese Weise von  $D_n \setminus e$  aus erreichbar sind (tausche die Rollen von  $D_0$  und  $D_n$ ), liegt  $x_1$  andererseits auf dem Rand sowohl von  $f_1$  als auch von  $f_2$ .  $\square$

Aus Lemma 3.2.1 (i) folgt, daß jedes Gebiet eines ebenen Graphen durch einen Teilgraphen berandet ist:

**Korollar 3.2.2.** *Für jedes Gebiet  $f$  von  $G$  ist  $G[f]$  die Punktmenge eines Teilgraphen von  $G$ .*  $\square$

$G[f]$  Wir werden die Bezeichnung  $G[f]$  im folgenden auch für diesen Teilgraphen verwenden.

**Lemma 3.2.3.** *Ist  $G$  ein ebener Graph,  $f \in F(G)$  und  $H \subseteq G$ , so gilt:*

- (i)  $f$  ist in einem Gebiet  $f'$  von  $H$  enthalten.
- (ii) Ist  $G[f] \subseteq H$ , so gilt  $f' = f$ .

*Beweis.* (i) folgt direkt aus der Definition von "Gebiet".

(ii) Nach der zweiten in Abschnitt 3.1 notierten Eigenschaft des Randes trifft jeder Polygonzug von  $f$  nach  $f' \setminus f$  den Rand von  $f$ .  $\square$

Für  $H := G[f]$  folgt aus Lemma 3.2.3 insbesondere, daß jedes Gebiet  $f$  von  $G$  auch ein Gebiet seines eigenen Randes ist, des Graphen  $G[f]$ .

[3.6.1] **Lemma 3.2.4.** *Ein ebener Wald hat genau ein Gebiet.*

(3.1.3) *Beweis* mit Lemma 3.1.3 und Induktion nach der Kantenzahl.  $\square$

Abgesehen von einer einzigen Ausnahme haben verschiedene Gebiete eines ebenen Graphen nie den gleichen Rand:

[3.3.1]  
[3.5.1] **Lemma 3.2.5.** *Hat ein ebener Graph verschiedene Gebiete mit dem gleichen Rand, so ist der Graph ein Kreis.*

(3.1.1) *Beweis.* Es sei  $G$  ein ebener Graph, und  $H \subseteq G$  der Rand zwei verschiedener Gebiete  $f_1, f_2$  von  $G$ . Da  $f_1$  und  $f_2$  auch Gebiete von  $H$  sind, folgt aus Lemma 3.2.4, daß  $H$  einen Kreis  $C$  enthält: sonst wäre  $f_1 = f_2$ . Nach Lemma 3.2.1 (iii) sind  $f_1$  und  $f_2$  in verschiedenen Gebieten von  $C$  enthalten. Da  $f_1$  und  $f_2$  beide ganz  $H$  zum Rand haben, folgt hieraus  $H = C$ : jede weitere Ecke oder Kante von  $H$  läge in einem der Gebiete von  $C$  und damit nicht auf dem Rand des anderen. Damit sind  $f_1$  und  $f_2$  verschiedene Gebiete von  $C$ . Da  $C$  nach Satz 3.1.1 nur zwei Gebiete hat, folgt  $f_1 \cup C \cup f_2 = \mathbb{R}^2$  und somit  $G = C$ .  $\square$

**Proposition 3.2.6.** *In einem 2-zusammenhängenden ebenen Graphen ist jedes Gebiet durch einen Kreis berandet.*

*Beweis.* Es sei  $G$  ein 2-zusammenhängender ebener Graph, und  $f \in F(G)$ . Sicher enthält  $G[f]$  einen Kreis  $C$ : da  $f$  ein Gebiet von  $G[f]$  ist, folgt aus Lemma 3.2.4 sonst  $f \cup G[f] = \mathbb{R}^2$  und somit  $G = G[f]$ ; aber  $G$  enthält einen Kreis, weil es 2-zusammenhängend ist.

Angenommen,  $G[f] \neq C$ . Um einen Widerspruch herzuleiten, zeigen wir zunächst, daß  $G$  einen  $C$ -Weg  $P$  enthält, dessen topologisch Inneres  $G[f]$  in einem Punkt  $x$  trifft. Wenn  $G[f]$  eine Sehne von  $C$  enthält, so ist dies klar. Wenn nicht, so folgt aus  $C \subsetneq G[f]$  die Existenz einer Ecke  $x \in G[f] - C$ . Da  $G$  2-zusammenhängend ist, ist  $x$  nach dem Satz von Menger (2.3.3) durch zwei bis auf  $x$  disjunkte Wege mit  $C$  verbunden, und deren Vereinigung ist unser  $C$ -Weg  $P$ .

Es sei  $H := C \cup P$ . Wegen  $H \subseteq G$  ist  $f$  Teilmenge eines Gebiets  $f'$  von  $H$ . Da  $C \cup \{x\}$  auf dem Rand von  $f$  liegt, liegt  $C \cup \{x\}$  auch auf dem Rand von  $f'$ . Da  $H$  die Vereinigung dreier Polygonzüge zwischen den Endecken von  $P$  ist, widerspricht dies Lemma 3.1.2 (i).  $\square$

Ist ein ebener Graph sogar 3-zusammenhängend, so können wir die Gebietsränder unter seinen Kreisen rein kombinatorisch identifizieren, d.h. ohne Bezug auf topologische Begriffe wie Rand und Ebene:

**Proposition 3.2.7.** *Die Gebietsränder eines 3-zusammenhängenden ebenen Graphen sind genau seine nicht trennenden induzierten Kreise.*

*Beweis.* Es sei  $G$  ein 3-zusammenhängender ebener Graph, und  $C \subseteq G$ . Ist  $C$  ein nicht trennender induzierter Kreis, so können nach dem Jordanschen Kurvensatz nicht beide Gebiete von  $C$  Punkte von  $G \setminus C$  enthalten. Somit ist  $C$  ein Gebietsrand von  $G$ .

Nehmen wir nun umgekehrt an, daß  $C$  ein Gebiet  $f$  von  $G$  berandet. Nach Proposition 3.2.6 ist  $C$  dann ein Kreis. Hat  $C$  eine Sehne  $e = xy$ , so sind die Komponenten von  $C - \{x, y\}$  durch einen  $C$ -Weg in  $G$  verbunden, denn  $G$  ist ja 3-zusammenhängend. Dieser Weg und die Kante  $e$  verlaufen beide durch das andere Gebiet von  $C$  (nicht durch  $f$ ), jedoch ohne einander zu treffen. Dies widerspricht Lemma 3.1.2 (ii).

Es bleibt zu zeigen, daß  $C$  keine zwei Ecken  $x, y \in G - C$  trennt. Nach dem Satz von Menger (2.3.5) sind  $x$  und  $y$  in  $G$  durch drei kreuzungsfreie Wege verbunden. In einem Gebiet der Vereinigung dieser Wege liegt  $f$ , doch ist dieses Gebiet nach Lemma 3.1.2 (i) durch lediglich zwei der Wege berandet. Der dritte Weg vermeidet daher  $f$  und seinen Rand  $C$ .  $\square$

Ein ebener Graph  $G$  heißt *maximal eben*, wenn wir ihn nicht durch Hinzufügung einer neuen (ebenen) Kante zu einem ebenen Graphen  $G' \supsetneq G$  mit  $V(G') = V(G)$  erweitern können.  $G$  heißt *ebener Dreiecksgraph*, wenn jedes seiner Gebiete durch einen  $K^3$  berandet ist.

[3.3.1]  
[3.3.2]  
[3.4.3]  
[3.5.1]  
[3.5.2]  
(2.3.3)  
(3.1.2)

[3.3.2]  
[3.5.2]  
(2.3.5)  
(3.1.1)  
(3.1.2)

$C, f$

maximal  
eben

ebener  
Dreiecks-  
graph



[3.4.1]  
[4.4.2]

**Proposition 3.2.8.** *Ein ebener Graph der Ordnung  $\geq 3$  ist genau dann maximal eben, wenn er ein ebener Dreiecksgraph ist.*

(3.1.2)

*Beweis.* Es sei  $G$  ein ebener Graph der Ordnung  $\geq 3$ . Ist jedes Gebiet von  $G$  durch ein Dreieck berandet, so ist  $G$  maximal eben. Denn jede zusätzliche Kante  $e$  hätte ihr Inneres in einem Gebiet von  $G$  und ihre Endpunkte auf dem Rand dieses Gebietes. Da dieser Rand als Dreieck ein vollständiger Graph ist, sind diese Endpunkte bereits in  $G$  benachbarte Ecken, d.h.  $G \cup e$  genügt nicht der Bedingung (iii) aus der Definition ebener Graphen.

$f$   
 $H$

Umgekehrt sei nun  $G$  maximal eben und  $f \in F(G)$  ein Gebiet; es sei  $H := G[f]$ . Wegen der Maximalität von  $G$  als ebener Graph ist  $G[H]$  vollständig: zu nicht benachbarten Ecken  $x, y \in H$  gäbe es einen Polygonzug  $P$  zwischen  $x$  und  $y$  mit  $\overset{\circ}{P} \subseteq f$ , und wir könnten  $P$  als neue Kante zu  $G$  hinzunehmen. Wir haben somit  $G[H] = K^n$  für ein  $n \in \mathbb{N}$ , wissen aber noch nicht, welche Kanten von  $G[H]$  auch in  $H$  liegen.

$n$

Zeigen wir zunächst, daß  $H$  einen Kreis enthält. Enthält  $H$  keinen Kreis, so gilt einerseits  $G \setminus H \neq \emptyset$ : wegen  $G \supseteq K^n$  falls  $n \geq 3$ , und wegen  $|G| \geq 3$  sonst. Andererseits gilt nach Lemma 3.2.4 dann aber auch  $f \cup H = \mathbb{R}^2$  (da  $f$  auch ein Gebiet von  $G[f] = H$  ist), ein Widerspruch.

$C, v_i$   
 $f_C, f'_C$

Da  $H$  einen Kreis enthält, reicht es,  $n \leq 3$  zu zeigen: daraus folgt dann  $H = K^3$  wie behauptet. Nehmen wir also  $n \geq 4$  an; es sei  $C = v_1 v_2 v_3 v_4 v_1$  ein Kreis in  $G[H]$  ( $= K^n$ ). Wegen  $C \subseteq G$  liegt  $f$  in einem Gebiet  $f_C$  von  $C$ ; es sei  $f'_C$  das andere Gebiet von  $C$ . Da  $v_1$  und  $v_3$  auf dem Rand von  $f$  liegen, sind diese beiden Ecken dann durch einen Polygonzug verbindbar, dessen Inneres in  $f_C$  liegt und  $G$  vermeidet. Nach Lemma 3.1.2 (ii) verläuft die ebene Kante  $v_2 v_4$  von  $G[H]$  daher nicht durch  $f_C$  sondern durch  $f'_C$  (Abb. 3.2.3). Analog verläuft wegen  $v_2, v_4 \in G[f]$  auch die Kante  $v_1 v_3$  durch  $f'_C$ . Da die ebenen Kanten  $v_1 v_3$  und  $v_2 v_4$  disjunkt sind, ergibt dies einen Widerspruch zu Lemma 3.1.2 (ii).  $\square$

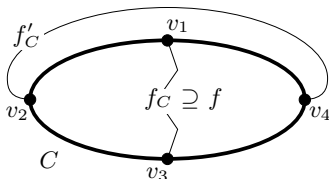


Abb. 3.2.3. Die Kante  $v_2 v_4$  von  $G$  verläuft durch das Gebiet  $f'_C$

**Satz 3.2.9.** (Eulersche Polyederformel für die Ebene)

[3.5.1]

Ist  $G$  ein zusammenhängender ebener Graph mit  $n \geq 1$  Ecken,  $m$  Kanten und  $\ell$  Gebieten, so gilt

$$n - m + \ell = 2.$$

*Beweis.* Zu gegebenem  $n$  wenden wir Induktion nach  $m$  an. Für  $m \leq n - 1$  ist  $G$  ein Baum und  $m = n - 1$  (warum?); die Behauptung folgt dann aus Lemma 3.2.4.

Es sei also  $m \geq n$ . Dann hat  $G$  eine Kante  $e$ , die auf einem Kreis in  $G$  liegt; es sei  $G' := G - e$ . Nach Lemma 3.2.1 (iii) liegt  $e$  auf dem Rand genau zweier Gebiete  $f_1, f_2$  von  $G$ , und da je zwei Punkte von  $\mathbb{R}^2 \setminus G'$  äquivalent sind, liegt  $\mathring{e}$  in einem Gebiet  $f_e$  von  $G'$ . Wir zeigen

$$F(G) \setminus \{f_1, f_2\} = F(G') \setminus \{f_e\}; \quad (*)$$

damit hat  $G'$  dann zahlenmäßig sowohl genau ein Gebiet als auch eine Kante weniger als  $G$ , und die Behauptung des Satzes folgt aus der Induktionsannahme für  $G'$ .

Zum Beweis von  $(*)$  sei zunächst  $f \in F(G) \setminus \{f_1, f_2\}$  gegeben. Nach Lemma 3.2.1 (i) gilt  $G[f] \subseteq G \setminus \mathring{e} = G'$ , und daher  $f \in F(G')$  nach Lemma 3.2.3 (ii). Da offenbar  $f \neq f_e$  ist, folgt die erste Inklusion in  $(*)$ .

Umgekehrt sei nun ein Gebiet  $f' \in F(G') \setminus \{f_e\}$  gegeben. Offenbar gilt  $f' \neq f_1, f_2$  und  $f' \cap \mathring{e} = \emptyset$ . Je zwei Punkte aus  $f'$  liegen somit in  $\mathbb{R}^2 \setminus G$  und sind dort äquivalent. Dann hat  $G$  ein Gebiet  $f \supseteq f'$ , welches nach Lemma 3.2.3 (i) seinerseits in einem Gebiet  $f''$  von  $G'$  enthalten ist. Es folgt  $f' \subseteq f \subseteq f''$ , und damit  $f' = f = f''$ .  $\square$

**Korollar 3.2.10.** *Ein ebener Graph mit  $n \geq 3$  Ecken hat höchstens  $3n - 6$  Kanten. Jeder ebene Dreiecksgraph mit  $n$  Ecken hat  $3n - 6$  Kanten.*

*Beweis.* Nach Proposition 3.2.8 reicht es, die zweite Aussage zu beweisen. In einem ebenen Dreiecksgraphen  $G$  ist jedes Gebiet von genau drei Kanten berandet, und jede Kante liegt auf dem Rand genau zweier Gebiete (Lemma 3.2.1). Der bipartite Graph auf  $E(G) \cup F(G)$  mit der Kantenmenge  $\{ef \mid e \in G[f]\}$  hat somit genau  $2|E(G)| = 3|F(G)|$  Kanten. Setzen wir entsprechend dieser Identität in der Eulerformel  $2m/3$  für  $\ell$  ein, so erhalten wir  $m = 3n - 6$ .  $\square$

Die Eulersche Polyederformel zeigt häufig, daß gewisse Graphen nicht als ebene Graphen auftreten können: ein  $K^5$  etwa hat  $10 > 3 \cdot 5 - 6$  Kanten und kann somit nach Korollar 3.2.10 kein ebener Graph sein.

Ähnlich folgt, daß ein ebener Graph  $G$  nicht isomorph zu  $K_{3,3}$  sein kann. Da nämlich  $K_{3,3}$  2-zusammenhängend ist aber kein Dreieck enthält, wäre sonst jedes Gebiet von  $G$  durch einen Kreis der Länge  $\geq 4$  berandet (Proposition 3.2.6). Wie im Beweis von Korollar 3.2.10 wäre damit  $2m \geq 4\ell$ , was bei Einsetzung in die Polyederformel  $m \leq 2n - 4$  ergibt; ein  $K_{3,3}$  hat jedoch  $9 > 2 \cdot 6 - 4$  Kanten.

Mit  $K^5$  und  $K_{3,3}$  können natürlich auch deren Unterteilungen nicht als ebene Graphen auftreten. Damit gilt:

(0.5.1)

(0.5.3)

 $e$  $G'$  $f_1, f_2$  $f_e$ 

[3.4.1]

[4.1.2]

[6.4.5]

[3.3.2]  
 [3.4.5]  
 [3.4.6]

**Korollar 3.2.11.** *Kein ebener Graph enthält einen  $K^5$  oder  $K_{3,3}$  als topologischen Minor.*  $\square$

In Abschnitt 3.4 werden wir sehen, daß diese unscheinbare und beiläufig anmutende Eigenschaft ebener Graphen diese von allen anderen Graphen unterscheidet: der dort bewiesene Satz von Kuratowski besagt, daß wir einen Graphen genau dann in der Ebene zeichnen können, wenn er weder  $K^5$  noch  $K_{3,3}$  als topologischen Minor enthält.

### 3.3 Zeichnungen

Einbettung  
in die Ebene

Eine *Einbettung in die Ebene* eines (abstrakten) Graphen  $G$  ist ein Isomorphismus zwischen  $G$  und einem ebenen Graphen  $\tilde{G}$ . Den ebenen Graphen  $\tilde{G}$  selbst nennen wir dann eine *Zeichnung* von  $G$ ; wir werden die Ecken und Kanten von  $G$  und von  $\tilde{G}$  bezeichnungsmäßig nicht immer streng auseinanderhalten.

Zeichnung

In diesem Abschnitt wollen wir der Frage nachgehen, inwieweit sich zwei Einbettungen eines Graphen in die Ebene unterscheiden können. Dazu ist zunächst zu klären, wann wir zwei Einbettungen als im wesentlichen gleich ansehen wollen: natürlich gibt es für die meisten Graphen wesentlich mehr Isomorphismen wie oben als "wirklich" verschiedene Weisen, sie zu zeichnen.

Als Vorbereitung definieren wir zunächst drei mögliche Äquivalenzbegriffe für ebene Graphen und gehen kurz auf das Verhältnis dieser Begriffe zueinander ein. Es seien  $G = (V, E)$  und  $G' = (V', E')$  zwei ebene Graphen,  $F(G) =: F$  und  $F(G') =: F'$ , und  $\sigma: V \rightarrow V'$  ein Isomorphismus der abstrakten Graphen  $G$  und  $G'$ . Durch  $xy \mapsto \sigma(x)\sigma(y)$  definiert  $\sigma$  dann auch eine Bijektion  $E \rightarrow E'$ . Wir können  $\sigma$  somit als eine Bijektion  $V \cup E \rightarrow V' \cup E'$  auffassen, die  $V$  auf  $V'$  abbildet und  $E$  auf  $E'$ , und die die Inzidenzen zwischen Ecken und Kanten erhält.

Unser erster Äquivalenzbegriff ist vielleicht der natürlichste. Anschaulich möchten wir den Isomorphismus  $\sigma$  "topologisch" nennen, wenn er induziert wird durch einen Homöomorphismus der Ebene auf sich selbst. Um den Außengebieten von  $G$  und  $G'$  keine Sonderrolle zukommen zu lassen, gehen wir einen Umweg über unseren in Abschnitt 3.1 fest gewählten Homöomorphismus  $\pi: S^2 \setminus \{(0, 0, 1)\} \rightarrow \mathbb{R}^2$ : wir nennen  $\sigma$  einen *topologischen Isomorphismus* der ebenen Graphen  $G$  und  $G'$ , wenn es einen Homöomorphismus  $\varphi: S^2 \rightarrow S^2$  gibt, so daß  $\psi := \pi \circ \varphi \circ \pi^{-1}$  auf  $V \cup E$  gerade  $\sigma$  induziert. (Formal: auf  $V$  soll  $\psi$  mit  $\sigma$  übereinstimmen, und jede ebene Kante  $e \in G$  soll  $\psi$  auf die ebene Kante  $\sigma(e) \in G'$  abbilden.)

Bis auf topologische Isomorphie sind Innen- und Außengebiete damit in der Tat nicht mehr zu unterscheiden: wählen wir  $\varphi$  als eine Rotation von  $S^2$ , die das  $\pi^{-1}$ -Bild eines Punktes aus einem Innengebiet von

$G; V, E, F$   
 $G'; V', E', F'$   
 $\sigma$

$\pi$   
 topologischer  
 Isomorphismus

$G$  auf den Nordpol  $(0, 0, 1)$  von  $S^2$  abbildet, so bildet  $\psi$  den Rest dieses Gebietes auf das Außengebiet von  $\psi(G)$  ab.<sup>4</sup>

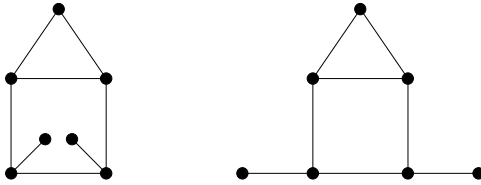


Abb. 3.3.1. Zwei topologisch nicht isomorphe Zeichnungen des gleichen Graphen

Ist  $\sigma$  ein topologischer Isomorphismus wie oben, so bildet  $\psi$  die Gebiete von  $G$  auf die Gebiete von  $G'$  ab<sup>5</sup> (Beweis?). Damit induziert  $\sigma$ , das ja bereits Ecken auf Ecken und Kanten auf Kanten abbildet, auch eine Bijektion  $\sigma: F \rightarrow F'$ . Die erweiterte Bijektion erhält überdies die Inzidenz der Gebiete mit ihren Rändern: für jedes Gebiet  $f$  von  $G$  ist  $\sigma(G[f])$  der Rand von  $\sigma(f)$  in  $G'$ .

Diese Eigenschaft erheben wir zur Definition unseres zweiten Äquivalenzbegriffs für ebene Graphen: wir nennen unseren gegebenen Isomorphismus  $\sigma$  der abstrakten Graphen  $G$  und  $G'$  einen *kombinatorischen Isomorphismus* der ebenen Graphen  $G$  und  $G'$ , wenn er sich zu einer Bijektion  $\sigma: V \cup E \cup F \rightarrow V' \cup E' \cup F'$  fortsetzen läßt, die nicht nur die Inzidenzen von Ecken mit Kanten sondern auch die Inzidenzen von Ecken und Kanten mit Gebieten respektiert. (Formal: eine Ecke oder Kante  $x$  von  $G$  soll genau dann auf dem Rand eines Gebietes  $f$  liegen, wenn  $\sigma(x)$  auf dem Rand des Gebietes  $\sigma(f)$  liegt.)

kombinatorischer  
Isomorphismus

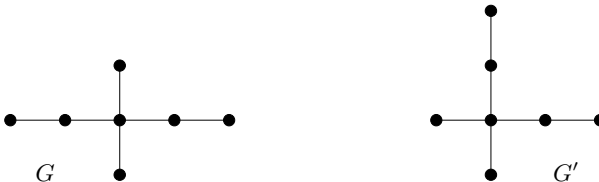


Abb. 3.3.2.  $G$  und  $G'$  sind kombinatorisch isomorph, aber nicht topologisch – warum nicht?

Ist  $\sigma$  ein kombinatorischer Isomorphismus der ebenen Graphen  $G$  und  $G'$ , so bildet  $\sigma$  insbesondere die Gebietsränder von  $G$  und  $G'$  aufeinander ab. Dies gibt Anlaß zu einem dritten Äquivalenzbegriff: wir nen-

<sup>4</sup> Damit die Kanten von  $\psi(G)$  wieder Polygonzüge werden, muß man  $\varphi$  jedoch im Allgemeinen ein wenig nachbessern.

<sup>5</sup> abgesehen möglicherweise von einem fehlenden Punkt jeweils dort, wo  $S^2$  den Nordpol hat

graphen-  
theoretischer  
Isomorphismus

nen den Isomorphismus  $\sigma$  der abstrakten Graphen  $G$  und  $G'$  einen *graphentheoretischen Isomorphismus* der ebenen Graphen  $G$  und  $G'$ , wenn folgendes gilt:

$$\{ \sigma(G[f]) : f \in F \} = \{ G'[f'] : f' \in F' \}.$$

Mit anderen Worten, wir verfolgen jetzt nicht mehr, *welches* Gebiet von einem gegebenem Teilgraphen berandet wird, sondern fragen nur noch, ob ein solches Gebiet existiert: solange  $\sigma$  diejenigen Teilgraphen aufeinander abbildet, die überhaupt als Gebietsränder auftreten, erfüllt es die obige Definition.

Diese dritte Äquivalenzeigenschaft mag etwas weniger natürlich erscheinen als die beiden ersten. Ihr Vorteil ist jedoch, daß sie einerseits formal am schwächsten und daher am leichtesten nachzuweisen ist, sich andererseits jedoch zur kombinatorischen Isomorphie (und meist auch zur topologischen Isomorphie) als äquivalent erweisen wird.

Wie bereits bemerkt, ist jeder topologische Isomorphismus zweier ebener Graphen auch kombinatorisch, und jeder kombinatorische Isomorphismus auch graphentheoretisch. Mit einer kleinen Einschränkung gilt auch die Umkehrung:

### Satz 3.3.1.

- (i) *Jeder graphentheoretische Isomorphismus zwischen zwei ebenen Graphen ist kombinatorisch; seine Fortsetzung zu einer Gebietsbijektion ist genau dann eindeutig bestimmt, wenn der Graph kein Kreis ist.*
- (ii) *Jeder kombinatorische Isomorphismus zwischen zwei 2-zusammenhängenden ebenen Graphen ist topologisch.*

(3.1.1)  
(3.1.4)  
(3.2.5)  
(3.2.6)

*Beweis.* Es seien  $G = (V, E)$  und  $G' = (V', E')$  zwei ebene Graphen,  $F(G) =: F$  und  $F(G') =: F'$ , und  $\sigma: V \cup E \rightarrow V' \cup E'$  ein Isomorphismus der zugrundeliegenden abstrakten Graphen.

(i) Ist  $G$  ein Kreis, so folgt die Aussage aus dem Jordanschen Kurvensatz. Im folgenden sei nun  $G$  kein Kreis. Es sei  $\mathcal{H}$  die Menge aller Gebietsränder in  $G$  und  $\mathcal{H}'$  die Menge aller Gebietsränder in  $G'$ . Ist  $\sigma$  ein graphentheoretischer Isomorphismus, so ist die Abbildung  $H \mapsto \sigma(H)$  eine Bijektion zwischen  $\mathcal{H}$  und  $\mathcal{H}'$ . Nach Lemma 3.2.5 ist die Abbildung  $f \mapsto G[f]$  eine Bijektion zwischen  $F$  und  $\mathcal{H}$ ; Entsprechendes gilt für  $F'$  und  $\mathcal{H}'$ . Die Komposition dieser drei Bijektionen ist eine Bijektion zwischen  $F$  und  $F'$ , und diese Bijektion wählen wir als  $\sigma: F \rightarrow F'$ . Nach Konstruktion erhält diese Fortsetzung von  $\sigma$  auf  $V \cup E \cup F$  Inzidenzen (und ist mit dieser Eigenschaft eindeutig bestimmt); damit ist  $\sigma$  als kombinatorischer Isomorphismus erwiesen.

(ii) Angenommen,  $G$  sei 2-zusammenhängend und  $\sigma$  ein kombinatorischer Isomorphismus. Wir haben einen Homöomorphismus  $\varphi: S^2 \rightarrow S^2$

zu konstruieren, der für jede Ecke oder ebene Kante  $x \in G$  gerade  $\pi^{-1}(x)$  auf  $\pi^{-1}(\sigma(x))$  abbildet. Da  $\sigma$  ein kombinatorischer Isomorphismus ist, ist  $\tilde{\sigma} : \pi^{-1} \circ \sigma \circ \pi$  eine inzidenzerhaltende Bijektion der Ecken, Kanten und Gebiete<sup>6</sup> von  $\tilde{G} := \pi^{-1}(G)$  auf die Ecken, Kanten und Gebiete von  $\tilde{G}' := \pi^{-1}(G')$ .

 $\tilde{\sigma}$  $\tilde{G}, \tilde{G}'$ 

Wir konstruieren  $\varphi$  in drei Schritten. Zunächst definieren wir  $\varphi$  auf der Menge der Ecken von  $\tilde{G}$ , als  $\varphi(x) := \tilde{\sigma}(x)$  für alle  $x \in V(\tilde{G})$ . Dies ist trivialerweise ein Homöomorphismus von  $V(\tilde{G})$  nach  $V(\tilde{G}')$ .

Im zweiten Schritt setzen wir  $\varphi$  jetzt zu einem Homöomorphismus zwischen  $\tilde{G}$  und  $\tilde{G}'$  fort, der auf  $V(\tilde{G}) \cup E(\tilde{G})$  gerade  $\tilde{\sigma}$  induziert. Dies tun wir Kante für Kante: jede Kante  $xy$  von  $\tilde{G}$  ist homöomorph zur Kante  $\tilde{\sigma}(xy) = \varphi(x)\varphi(y)$  von  $\tilde{G}'$ , und zwar vermöge eines Homöomorphismus, der  $x$  auf  $\varphi(x)$  und  $y$  auf  $\varphi(y)$  abbildet. Die Vereinigung all dieser Homöomorphismen – einer für jede Kante von  $\tilde{G}$  – ist dann in der Tat ein Homöomorphismus zwischen  $\tilde{G}$  und  $\tilde{G}'$ , unsere gesuchte Fortsetzung von  $\varphi$  auf  $\tilde{G}$ : lediglich die Stetigkeit an den Klebestellen, den Ecken, ist zu überprüfen, und die folgt aus unserer Annahme, daß sowohl den beiden Graphen als auch den einzelnen Kanten jeweils die Unterraumtopologie des  $\mathbb{R}^3$  zugrundeliegt.

Im dritten Schritt setzen wir nun den Homöomorphismus  $\varphi: \tilde{G} \rightarrow \tilde{G}'$  auf ganz  $S^2$  fort. Dies tun wir analog zum zweiten Schritt, Gebiet für Gebiet. Nach Proposition 3.2.6 sind die Ränder aller Gebiete von  $\tilde{G}$  und von  $\tilde{G}'$  Kreise. Ist nun  $f$  ein Gebiet von  $\tilde{G}$  und  $C$  sein Rand, so ist  $\tilde{\sigma}(C) := \bigcup\{\tilde{\sigma}(e) \mid e \in E(C)\}$  der Rand des Gebietes  $\tilde{\sigma}(f)$  von  $\tilde{G}'$ . Nach Satz 3.1.4 können wir den bereits definierten Homöomorphismus  $\varphi: C \rightarrow \tilde{\sigma}(C)$  zu einem Homöomorphismus von  $C \cup f$  nach  $\tilde{\sigma}(C) \cup \tilde{\sigma}(f)$  fortsetzen. Wir definieren dann  $\varphi: S^2 \rightarrow S^2$  als die Vereinigung all dieser Homöomorphismen, einem für jedes Gebiet  $f$  von  $\tilde{G}$ . Wie oben zeigt man leicht, daß  $\varphi$  in der Tat ein Homöomorphismus ist.  $\square$

Wir nennen zwei Einbettungen  $\sigma_1, \sigma_2$  eines Graphen  $G$  in die Ebene *topologisch* bzw. *kombinatorisch äquivalent*, wenn  $\sigma_2 \circ \sigma_1^{-1}$  ein topologischer bzw. kombinatorischer Isomorphismus zwischen  $\sigma_1(G)$  und  $\sigma_2(G)$  ist. Ist  $G$  2-zusammenhängend, und fallen die beiden Isomorphiebegriffe somit nach Satz 3.3.1 zusammen, so sprechen wir einfach von *äquivalenten* Einbettungen. Man prüft leicht nach, daß dies in der Tat für jeden Graphen eine Äquivalenzrelation auf der Menge seiner Einbettungen in die Ebene ist.

äquivalente  
Einbettungen

Beachte, daß auch zwei Zeichnungen von  $G$  aus nicht äquivalenten Einbettungen durchaus topologisch isomorph sein können (Übung):

<sup>6</sup> Als Ecken, Kanten und Gebiete von  $\tilde{G}$  und  $\tilde{G}'$  bezeichnen wir die Bilder unter  $\pi^{-1}$  der Ecken, Kanten und Gebiete von  $G$  bzw.  $G'$  – mit der offensichtlichen Ergänzung eines Gebietes  $\pi^{-1}(f)$  um den Punkt  $(0, 0, 1)$ , wenn  $f$  Außengebiet ist. Entsprechend sind  $V(\tilde{G})$ ,  $E(\tilde{G})$ ,  $F(\tilde{G})$  usw. definiert.

zur Äquivalenz zweier Einbettungen ist nicht nur verlangt, daß irgendein (kombinatorischer bzw. topologischer) Isomorphismus zwischen ihren Bildern existieren soll, sondern daß der “kanonische” Isomorphismus  $\sigma_2 \circ \sigma_1^{-1}$  kombinatorisch bzw. topologisch ist. Der folgende Satz ist entsprechend stark:

**Satz 3.3.2.** (Whitney 1932)

*Je zwei Einbettungen eines 3-zusammenhängenden Graphen in die Ebene sind äquivalent.*

(3.2.7) *Beweis.* Es sei  $G$  ein 3-zusammenhängender Graph mit Einbettungen  $\sigma_1: G \rightarrow G_1$  und  $\sigma_2: G \rightarrow G_2$  in die Ebene. Nach Satz 3.3.1 reicht es zu zeigen, daß  $\sigma_2 \circ \sigma_1^{-1}$  ein graphentheoretischer Isomorphismus zwischen  $G_1$  und  $G_2$  ist, d.h. daß für jeden Teilgraphen  $C \subseteq G$  genau dann  $\sigma_1(C)$  ein Gebiet von  $G_1$  berandet, wenn  $\sigma_2(C)$  ein Gebiet von  $G_2$  berandet. Dies jedoch folgt sofort aus Proposition 3.2.7.  $\square$

## 3.4 Plättbarkeit: der Satz von Kuratowski

*plättbar*

*maximal  
plättbar*

Ein Graph  $G$  heißt *plättbar*, wenn er in die Ebene einbettbar ist, also isomorph ist zu einem ebenen Graphen.  $G$  heißt *maximal plättbar*, wenn  $G$  plättbar ist, aber  $G + e$  für jede neue Kante  $e$  nicht mehr plättbar ist. Jede Zeichnung eines maximal plättbaren Graphen  $G$  ist offenbar maximal eben: wir können keine bisher nicht benachbarten Ecken durch einen zusätzlichen Polygonzug verbinden, der alle anderen ebenen Kanten und Ecken vermeidet.

Interessanterweise gilt auch die Umkehrung, d.h. ein ebener Graph ist nie nur deshalb maximal eben, weil er zufällig schlecht gezeichnet ist:

**Proposition 3.4.1.**

- (i) *Jeder maximal ebene Graph ist maximal plättbar.*
- (ii) *Ein plättbarer Graph mit  $n \geq 3$  Ecken ist genau dann maximal plättbar, wenn er  $3n - 6$  Kanten hat.*

(3.2.8) *Beweis* mit Proposition 3.2.8 und Korollar 3.2.10.  $\square$

(3.2.10)

Welche Graphen sind plättbar? Wie wir bereits in Korollar 3.2.11 sahen, kann kein plättbarer Graph einen  $K^5$  oder  $K_{3,3}$  als topologischen Minor enthalten. In diesem Abschnitt beweisen wir den erstaunlichen Satz von Kuratowski, daß auch die Umkehrung gilt: enthält ein Graph keinen  $TK^5$  oder  $TK_{3,3}$ , so ist er plättbar – im 3-zusammenhängenden Fall sogar mit einer Zeichnung, in der jedes Innengebiet konvex ist (Übung).

Statt topologischer Minoren kann man aufgrund der folgenden Proposition auch gewöhnliche Minoren betrachten:

**Lemma 3.4.2.** *Ein Graph enthält genau dann einen  $K^5$  oder  $K_{3,3}$  als Minor, wenn er einen  $K^5$  oder  $K_{3,3}$  als topologischen Minor enthält.*

*Beweis.* Aufgrund von Proposition 0.7.2 reicht es zu zeigen, daß jeder Graph  $G$  mit einem  $K^5$ -Minor auch einen  $K_{3,3}$  als Minor oder einen  $K^5$  als topologischen Minor enthält. Es gelte also  $G \succcurlyeq K^5$ , und  $K \subseteq G$  sei ein minimaler Teilgraph, der ein  $MK^5$  ist. Jede Verzweigungsmenge von  $K$  induziert dann einen Baum in  $K$ , und zwischen je zwei Verzweigungsmengen hat  $K$  genau eine Kante. Fügen wir zu einem von einer Verzweigungsmenge  $V_x$  induzierten Baum die vier von dieser zu den anderen Verzweigungsmengen führenden Kanten hinzu, so erhalten wir wieder einen Baum, etwa  $T_x$ . Wegen der Minimalität von  $K$  ist  $T_x$  ein Baum mit genau vier Blättern. Ist jeder solche Baum  $T_x$  ein  $TK_{1,4}$ , so ist  $K$  ein  $TK^5$  und wir sind fertig. Ist einer der  $T_x$  kein  $TK_{1,4}$ , so enthält er genau zwei Ecken des Grades 3. Kontrahieren wir  $V_x$  auf diese beiden Ecken und jede andere Verzweigungsmenge auf eine Ecke, so enthält der entstandene 6-eckige Graph einen  $K_{3,3}$  (Abb. 3.4.1). Damit gilt  $G \succcurlyeq K_{3,3}$ , wie gewünscht.  $\square$

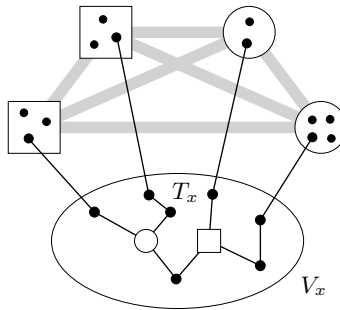


Abb. 3.4.1. Jeder  $MK^5$  enthält einen  $TK^5$  oder  $MK_{3,3}$

Wir beweisen den Satz von Kuratowski zunächst für 3-zusammenhängende Graphen:

**Lemma 3.4.3.** *Ist ein Graph  $G$  3-zusammenhängend, und enthält  $G$  weder einen  $K^5$  noch einen  $K_{3,3}$  als Minor, so ist  $G$  plättbar.*

*Beweis.* Wir wenden Induktion nach  $|G|$  an. Für  $|G| = 4$  ist  $G = K^4$  und die Aussage richtig. Es sei nun  $|G| > 4$ , und die Aussage sei wahr für kleinere Graphen. Nach Lemma 2.2.1 hat  $G$  eine Kante  $xy$  der Eigenschaft, daß  $G/xy$  wieder 3-zusammenhängend ist. Auch  $G/xy$  enthält dann weder einen  $K^5$  noch einen  $K_{3,3}$  als Minor. Nach Induktionsannahme ist  $G/xy$  plättbar; es sei  $\tilde{G}$  eine Zeichnung von  $G/xy$ . Weiter sei  $f$  das Gebiet von  $\tilde{G} - v_{xy}$ , das den Punkt  $v_{xy}$  enthält, und  $C$  der Rand von  $f$ . Wir setzen  $X := N_G(x) \setminus \{y\}$  und  $Y := N_G(y) \setminus \{x\}$ ; wegen  $v_{xy} \in f$  gilt  $X \cup Y \subseteq V(C)$ .



Da  $\tilde{G}$  3-zusammenhängend ist, ist  $\tilde{G} - v_{xy}$  2-zusammenhängend. Nach Proposition 3.2.6 ist  $C$  somit ein Kreis; es seien  $x_1, \dots, x_k$  die Ecken aus  $X$  in natürlicher Reihenfolge entlang  $C$ , und  $P_i = x_i \dots x_{i+1}$  ihre Verbindungswege auf  $C$  in dieser Reihenfolge (mit  $x_{k+1} := x_1$ ). Wir setzen

$$\tilde{G}' := \tilde{G} - \{v_{xy} \mid v \in Y \setminus X\}.$$

Offenbar ist  $\tilde{G}'$  eine Zeichnung von  $G - y$ , in der  $x$  durch den Punkt von  $v_{xy}$  dargestellt ist (Abb. 3.4.2).

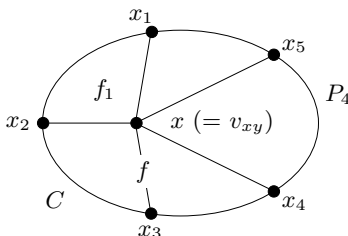


Abb. 3.4.2.  $\tilde{G}'$  als Zeichnung von  $G - y$ : die Ecke  $x$  ist durch den Punkt  $v_{xy}$  dargestellt

Für jedes  $i = 1, \dots, k$  ist  $C \setminus P_i$  in einem der beiden Gebiete des Kreises  $C_i := x x_i P_i x_{i+1} x$  enthalten; das andere Gebiet von  $C_i$  bezeichnen wir mit  $f_i$ . Da  $f_i$  Punkte aus  $f$  enthält (etwa nahe bei  $x$ ) aber keine Punkte aus  $C$ , gilt  $f_i \subseteq f$ . Da die ebenen Kanten  $x x_j$  mit  $j \notin \{i, i+1\}$  jeweils  $C_i$  nur in  $x$  treffen aber in  $C \setminus P_i$  enden, enthält  $f_i$  dann auch keinen Punkt einer solchen Kante. Es gilt also  $f_i \subseteq \mathbb{R}^2 \setminus \tilde{G}'$ , d.h.  $f_i$  ist in einem Gebiet von  $\tilde{G}'$  enthalten. (Da  $C_i$ , der Rand von  $f_i$ , in  $\tilde{G}'$  liegt, ist  $f_i$  sogar ein ganzes Gebiet von  $\tilde{G}'$ .)

Um aus  $\tilde{G}'$  eine Zeichnung von  $G$  zu gewinnen, zeigen wir jetzt, daß es ein  $i$  gibt mit  $Y \subseteq V(P_i)$ ; wir können dann  $y$  in  $f_i$  einbetten und mit allen seinen Nachbarn verbinden. Angenommen, es gibt kein solches  $i$  – wie können die Nachbarn von  $y$  dann liegen? Hätte  $y$  einen Nachbarn in einem  $\tilde{P}_i$ , so hätte es einen weiteren in  $C - P_i$ , und  $G$  enthielte einen  $TK_{3,3}$  (mit Verzweigungsecken  $x, y, x_i, x_{i+1}$  und jenen Nachbarn von  $y$ ). Somit gilt  $Y \subseteq X$ . Ist  $|Y| = |Y \cap X| \geq 3$ , so haben wir einen  $TK^5$  in  $G$ . Also ist  $|Y| \leq 2$ , und wegen  $d(y) \geq \kappa(G) \geq 3$  sogar  $|Y| = 2$ . Da die beiden Ecken aus  $Y$  nicht in einem gemeinsamen  $P_i$  liegen, finden wir wiederum einen  $TK_{3,3}$  in  $G$ , mit Widerspruch.  $\square$

Es ist nicht schwer, Lemma 3.4.3 induktiv auf Graphen  $G$  mit  $\kappa(G) \leq 2$  zu erweitern, und damit zu einem vollständigen Beweis des Satzes von Kuratowski: man nimmt an, daß  $G$  (ohne  $K^5$ - oder  $K_{3,3}$ -Minor) durch höchstens zwei Ecken trennbar ist und kombiniert nach Induktionsannahme existierende Zeichnungen der Teile zu einer Zeichnung von

ganz  $G$  (Übung). Die genaue Durchführung dieses (Standard-) Ansatzes erfordert jedoch eine ganze Reihe elementartopologischer Argumente, die den folgenden kombinatorischeren Weg als interessante Alternative erscheinen lassen.

**Lemma 3.4.4.** *Es sei  $\mathcal{X}$  eine Menge 3-zusammenhängender Graphen,  $G$  ein Graph mit  $\kappa(G) \leq 2$ , sowie  $G_1, G_2$  zwei echte Untergraphen von  $G$  mit  $G = G_1 \cup G_2$  und  $|G_1 \cap G_2| = \kappa(G)$ . Ist  $G$  kantenmaximal ohne topologischen Minor in  $\mathcal{X}$ , dann sind es auch  $G_1$  und  $G_2$ , und es gilt  $G_1 \cap G_2 = K^2$ .*

[6.4.1]

*Beweis.* Wir halten zunächst fest, daß jede Ecke  $v \in S := V(G_1 \cap G_2)$  in jeder Komponente von  $G - S$  einen Nachbarn hat: anderenfalls würde  $G$  durch  $S \setminus \{v\}$  getrennt werden, im Widerspruch zu  $|S| = \kappa(G)$ .

S

Im folgenden werden wir viermal fast das gleiche Argument verwenden. Wir werden zunächst jeweils eine neue Kante  $e$  zu  $G$  hinzufügen. Wegen der Maximalität von  $G$  liegt  $e$  dann in einem  $TX \subseteq G + e$  mit  $X \in \mathcal{X}$ . In jedem der betrachteten Fälle, in dem  $|S| = 2$  gilt, werden  $V(G_1)$  und  $V(G_2)$  auch in  $G + e$  noch durch  $S$  getrennt sein. Da zwei Verzweigungsecken des entstandenen  $TX$  aber weder durch zwei (andere) Ecken noch durch die Kante  $e$  und höchstens eine Ecke trennbar sind, können  $G_1 \setminus G_2$  und  $G_2 \setminus G_1$  nicht beide Verzweigungsecken des  $TX$  enthalten. Diese werden daher stets alle im gleichen  $G_i$  liegen – sagen wir, in  $G_1$ . Unser  $TX$  trifft dann  $G_2$  höchstens in einem einer Kante von  $X$  entsprechenden Weg  $P$ .

TX

P

Ist  $S = \emptyset$ , so erhalten wir sofort einen Widerspruch, indem wir  $e$  mit einer Ecke in  $G_1$  und der anderen in  $G_2$  wählen, da keine Kante eines  $TX$  mit  $X \in \mathcal{X}$  ihre Ecken trennt. Besteht  $S$  aus einer einzigen Ecke  $v$ , so wählen wir als Ecken von  $e$  einen Nachbarn  $v_1$  von  $v$  in  $G_1 - S$  und einen Nachbarn  $v_2$  von  $v$  in  $G_2 - S$ . Wegen  $e \in TX$  existiert dann  $P$  wie oben, mit  $v, v_1 v_2 \in P$  (Abb. 3.4.3). Ersetzen wir  $vPv_1$  durch die Kante  $vv_1$ , so erhalten wir einen  $TX$  in  $G_1 \subseteq G$ , mit Widerspruch.

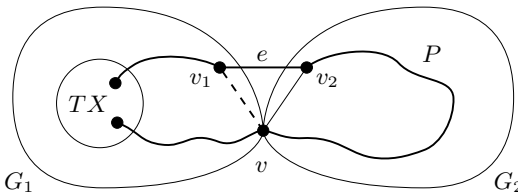


Abb. 3.4.3. Mit  $G + e$  enthält auch  $G_1$  oder  $G_2$  einen  $TX$

Es gilt also  $|S| = 2$ , sagen wir  $S = \{x, y\}$ . Ist  $xy \notin G$ , so wählen wir  $e := xy$  und ersetzen  $e$  in dem entstehenden  $TX$  durch einen  $x$ - $y$ -Weg durch  $G_2$ ; dies ergibt einen  $TX$  in  $G$  mit Widerspruch. Somit ist  $xy \in G$ , also  $G[S] = K^2$  wie behauptet.

x, y

Es bleibt zu zeigen, daß  $G_1$  und  $G_2$  kantenmaximal ohne topologischen Minor in  $\mathcal{X}$  sind. Fügen wir also zu  $G_1$  eine neue Kante  $e'$  hinzu. ( $G_2$  behandelt man analog.) Indem wir gegebenenfalls  $xPy$  durch die Kante  $xy$  ersetzen, erhalten wir einen  $TX$  entweder in  $G_1 + e'$  (womit die Kantenmaximalität von  $G_1$  erwiesen wäre) oder in  $G_2$  (mit Widerspruch wegen  $G_2 \subseteq G$ ).  $\square$

**Lemma 3.4.5.** *Ist  $|G| \geq 4$  und  $G$  kantenmaximal mit  $TK^5, TK_{3,3} \not\subseteq G$ , so ist  $G$  3-zusammenhängend.*

(3.2.11) *Beweis.* Wir verwenden Induktion nach  $|G|$ . Für  $|G| = 4$  ist  $G = K^4$  und die Behauptung wahr. Es sei nun  $|G| > 4$ , und  $G$  kantenmaximal ohne  $TK^5$  und  $TK_{3,3}$ . Ist  $\kappa(G) \leq 2$ , so wählen wir  $G_1, G_2 \subseteq G$  wie in Lemma 3.4.4. Für  $\mathcal{X} := \{K^5, K_{3,3}\}$  besagt das Lemma, daß  $G_1 \cap G_2$  ein  $K^2$  ist, sagen wir mit Ecken  $x, y$ . Nach den Lemmas 3.4.4, 3.4.3 und Induktionsannahme sind dann  $G_1$  und  $G_2$  plättbar. Für  $i = 1, 2$  wähle jeweils eine Zeichnung von  $G_i$ , sowie darin ein Gebiet  $f_i$  mit  $xy \in G_i[f_i]$  und eine Ecke  $z_i \in G_i[f_i] - \{x, y\}$ . Es sei  $K \subseteq G + z_1z_2$  ein  $TK^5$  oder  $TK_{3,3}$ ; die Menge der Verzweigungsecken von  $K$  sei mit  $V$  bezeichnet.

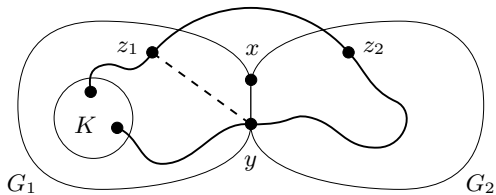


Abb. 3.4.4. Ein  $TK^5$  oder  $TK_{3,3}$  in  $G + z_1z_2$

Liegen alle Ecken aus  $V$  im gleichen  $G_i$ , so enthält wiederum auch  $G_i + xz_i$  oder  $G_i + yz_i$  (oder  $G_i$  selbst, falls  $z_i$  bereits zu  $x$  bzw. zu  $y$  benachbart ist) einen  $TK^5$  oder  $TK_{3,3}$  (Abb. 3.4.4); dies widerspricht Korollar 3.2.11, da diese Graphen nach Wahl von  $z_i$  plättbar sind. Also gilt weder  $V \subseteq V(G_1)$  noch  $V \subseteq V(G_2)$ . Da  $G + z_1z_2$  nicht vier kreuzungsfreie Wege zwischen  $(G_1 - G_2)$  und  $(G_2 - G_1)$  enthält, können  $G_1 - G_2$  und  $G_2 - G_1$  nicht beide eine Verzweigungsecke eines  $TK^5$  oder je zwei Verzweigungsecken eines  $TK_{3,3}$  in  $G + z_1z_2$  enthalten. Damit ist also  $K = TK_{3,3}$  und oBdA  $|V \setminus V(G_1)| = 1$ . Dann ist ein  $TK_{3,3}$  aber auch in dem Graphen enthalten, der aus  $G_1$  durch Hinzufügen einer neuen Ecke  $v$  und der Kanten  $vx, vy$ , und  $vz_1$  entsteht. Dieser Graph ist nach Wahl von  $z_1$  jedoch plättbar, ein Widerspruch zu Korollar 3.2.11.  $\square$

**Satz 3.4.6.** (Kuratowski 1930; Wagner 1937)

[3.5.1] *Die folgenden Aussagen sind äquivalent für Graphen  $G$ :*

- (i)  $G$  ist plättbar;
- (ii)  $G$  enthält weder einen  $K^5$  noch einen  $K_{3,3}$  als Minor;
- (iii)  $G$  enthält weder einen  $K^5$  noch einen  $K_{3,3}$  als topologischen Minor.

*Beweis.* Kombiniere Korollar 3.2.11 mit den Lemmas 3.4.2, 3.4.3 und 3.4.5. □ (3.2.11)

**Korollar 3.4.7.** *Jeder maximal plättbare Graph mit mindestens vier Ecken ist 3-zusammenhängend.*

*Beweis* mit Lemma 3.4.5 und Satz 3.4.6. □

## 3.5 Algebraische Plättbarkeitskriterien

Eine Teilmenge  $\mathcal{F}$  des Kantenraums eines Graphen heiße *schlicht*, wenn jede Kante des Graphen in höchstens zwei Mengen aus  $\mathcal{F}$  liegt. Der Schnittraum  $\mathcal{C}^*(G)$  eines Graphen  $G = (V, E)$  beispielsweise hat stets eine schlichte Basis: nach Proposition 0.9.3 wird er erzeugt von den Schnitten der Form  $E(v)$ , und eine Kante  $xy \in G$  liegt nur für  $v = x$  und für  $v = y$  in  $E(v)$ . *schlicht*

**Satz 3.5.1.** (MacLane 1937)

*Ein Graph ist genau dann plättbar, wenn sein Zyklenraum eine schlichte Basis besitzt.* [3.6.3]

*Beweis.* Der Satz ist trivial für Graphen der Ordnung  $\leq 2$ ; wir betrachten daher einen Graphen  $G$  der Ordnung  $\geq 3$ . Ist  $\kappa(G) \leq 1$ , so ist  $G$  die Vereinigung zweier echter Untergraphen  $G_1, G_2$  mit  $|G_1 \cap G_2| \leq 1$ . Dann ist  $\mathcal{C}(G)$  die direkte Summe von  $\mathcal{C}(G_1)$  und  $\mathcal{C}(G_2)$ , hat also genau dann eine schlichte Basis, wenn  $\mathcal{C}(G_1)$  und  $\mathcal{C}(G_2)$  eine haben. (Warum?) Weiter ist  $G$  genau dann plättbar, wenn  $G_1$  und  $G_2$  es sind. (Dies folgt unmittelbar aus dem Satz von Kuratowski, aber auch durch einfache elementartopologische Betrachtungen.) Die Behauptung für  $G$  folgt damit induktiv aus der für  $G_1$  und  $G_2$ . (0.9.2)  
(0.9.6)  
(3.1.1)  
(3.2.1)  
(3.2.5)  
(3.2.6)  
(3.2.9)  
(3.4.6)

Es sei nun  $G$  2-zusammenhängend. Wir nehmen zuerst an, daß  $G$  plättbar ist und wählen eine Zeichnung. Nach Proposition 3.2.6 sind die Gebietsränder von  $G$  Kreise, liegen also in  $\mathcal{C}(G)$ . Wir zeigen, daß die Gebietsränder alle Kreise in  $G$  erzeugen; damit hat  $\mathcal{C}(G)$  dann nach Lemma 3.2.1 eine schlichte Basis. Sei also  $C \subseteq G$  ein beliebiger Kreis, und  $f$  sein Innengebiet. Nach Lemma 3.2.1 liegt jede Kante  $e$  mit  $\dot{e} \subseteq f$  auf dem Rand genau zweier in  $f$  enthaltener Gebiete von  $G$ , und jede Kante von  $C$  auf dem Rand genau eines solchen Gebiets. Die Summe in  $\mathcal{C}(G)$  all dieser Gebietsränder ist somit gerade  $C$ .

Umgekehrt sei nun  $\{C_1, \dots, C_k\}$  eine schlichte Basis von  $\mathcal{C}(G)$ . Dann besitzt für jede Kante  $e \in G$  auch  $\mathcal{C}(G - e)$  eine schlichte Basis: liegt  $e$  in nur einem Basiszyklus  $C_i$ , etwa in  $C_1$ , so ist  $\{C_2, \dots, C_k\}$  eine solche; liegt  $e$  in zweien, etwa in  $C_1$  und  $C_2$ , so ist  $\{C_1 + C_2, C_3, \dots, C_k\}$  eine schlichte Basis von  $\mathcal{C}(G - e)$ . (Die genannten Basen sind Teilmengen von  $\mathcal{C}(G - e)$  nach Proposition 0.9.2.) Ist nun  $G$  nicht plättbar, und existiert somit nach dem Satz von Kuratowski ein  $K \subseteq G$  mit  $K = TK^5$  oder  $K = TK_{3,3}$ , so hat damit auch  $K$  eine schlichte Basis. Dann hat aber auch  $K^5$  oder  $K_{3,3}$  selbst eine schlichte Basis; wir werden dies, für beide Fälle getrennt, zum Widerspruch führen.

Wir betrachten zunächst  $K^5$ . Nach Satz 0.9.6 ist  $\dim \mathcal{C}(K^5) = 6$ ; es sei  $\mathcal{B} = \{C_1, \dots, C_6\}$  eine schlichte Basis und  $C_0 := C_1 + \dots + C_6$ . Da  $\mathcal{B}$  linear unabhängig ist, ist keiner der Zyklen  $C_0, \dots, C_6$  leer, und so enthält jeder von ihnen mindestens drei Kanten (vgl. Proposition 0.9.2). Aus der Schlichtheit von  $\mathcal{B}$  folgt damit

$$\begin{aligned} 18 = 6 \cdot 3 &\leq |C_1| + \dots + |C_6| \\ &\leq 2 \|K^5\| - |C_0| \\ &\leq 2 \cdot 10 - 3 = 17 \end{aligned}$$

mit Widerspruch; zur mittleren Ungleichung beachte, daß jede Kante aus  $C_0$  in nur einem der Zyklen  $C_1, \dots, C_6$  liegt.

Für  $K_{3,3}$  gilt nach Satz 0.9.6  $\dim \mathcal{C}(K_{3,3}) = 4$ ; es sei  $\mathcal{B} = \{C_1, \dots, C_4\}$  eine schlichte Basis und  $C_0 := C_1 + \dots + C_4$ . Wegen  $g(K_{3,3}) = 4$  enthält jedes  $C_i$  mindestens vier Kanten, und wir haben

$$\begin{aligned} 16 = 4 \cdot 4 &\leq |C_1| + \dots + |C_4| \\ &\leq 2 \|K_{3,3}\| - |C_0| \\ &\leq 2 \cdot 9 - 4 = 14 \end{aligned}$$

mit Widerspruch wie oben. □

Mit Hilfe von Satz 2.2.3 ist es möglich, aus dem scheinbar so abstrakt-algebraischen Plättbarkeitskriterium von MacLane ein rein graphentheoretisches Kriterium zurückzugewinnen, zumindest für 3-zusammenhängende Graphen:

**Satz 3.5.2.** (Tutte 1963)

*Ein 3-zusammenhängender Graph ist genau dann plättbar, wenn jede Kante auf höchstens zwei (äquivalent: genau zwei) nicht trennenden induzierten Kreisen liegt.*

(2.2.3)  
(3.2.1)  
(3.2.6)  
(3.2.7)

*Beweis.* Die Vorwärtsrichtung folgt aus den Propositionen 3.2.7 und 3.2.1 (und Proposition 3.2.6 für ‘genau zwei’). Die Rückrichtung folgt aus Satz 2.2.3 und Satz 3.5.1. □

## 3.6 Plättbarkeit und Dualität

In diesem Abschnitt beweisen wir mit Hilfe von Satz 3.5.1 ein weiteres Plättbarkeitskriterium, das auf einem Begriff der Dualität ebener Graphen beruht und eng verwandt ist mit der in Kapitel 0.9 bereits kurz behandelten Beziehung zwischen Zyklenraum und Schnitttraum eines Graphen.

Ein *ebener Multigraph* ist ein Paar  $G = (V, E)$  endlicher Mengen mit den folgenden Eigenschaften (die Elemente von  $V$  heißen wieder *Ecken*, die Elemente von  $E$  *Kanten*):

*ebener  
Multigraph*

- (i)  $V \subseteq \mathbb{R}^2$ ;
- (ii) jede Kante ist ein Polygonzug zwischen zwei Ecken oder ein Polygon, das genau eine Ecke (seine *Endecke*) enthält;
- (iii) das Innere einer jeden Kante enthält weder eine Ecke noch einen Punkt einer anderen Kante.

Wir verwenden für ebene Graphen definierte Begriffe sinngemäß auch für ebene Multigraphen; beachte dabei, daß jetzt auch Schlingen und Doppelkanten als Kreise gelten.

Betrachten wir einmal den ebenen Multigraphen  $G$  aus Abbildung 3.6.1. Setzen wir in jedes Gebiet von  $G$  eine neue Ecke, so können wir die neuen Ecken wie folgt zu einem neuen ebenen Multigraphen  $G^*$  verbinden: für jede Kante  $e$  von  $G$  verbinden wir die neuen Ecken in den beiden Gebieten, auf deren Rand  $e$  liegt, durch eine neue Kante  $e^*$ ; liegt  $e$  auf dem Rand nur eines Gebiets, so legen wir an dessen neue Ecke eine Schlinge  $e^*$  durch  $e$ . Der so entstandene ebene Multigraph  $G^*$  ist im folgenden Sinne dual zu  $G$ : konstruieren wir aus  $G^*$  seinerseits auf die angegebene Weise einen dritten ebenen Multigraphen  $G^{**}$ , so ist  $G^{**}$  topologisch isomorph zu unserem ursprünglichen Graphen  $G$ .

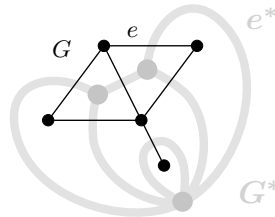


Abb. 3.6.1. Ein ebener Graph und sein Dual

Zur Präzisierung dieser Idee seien  $G = (V, E)$  und  $(V^*, E^*)$  zwei beliebige ebene Multigraphen, sowie  $F(G) =: F$  und  $F((V^*, E^*)) =: F^*$ . Wir nennen  $(V^*, E^*)$  (*topologisch*) *dual* – oder ein (*topologisches*) *Dual* – (*top.*) *dual*

Dual  $G^*$  zu  $G$  und schreiben  $(V^*, E^*) =: G^*$ , wenn Bijektionen

$$\begin{array}{lll} F \rightarrow V^* & E \rightarrow E^* & V \rightarrow F^* \\ f \mapsto v^*(f) & e \mapsto e^* & v \mapsto f^*(v) \end{array}$$

existieren mit den folgenden Eigenschaften:

- (i)  $v^*(f) \in f$  für alle  $f \in F$ ;
- (ii)  $|e^* \cap G| = |\dot{e}^* \cap \dot{e}| = |e \cap G^*| = 1$  für alle  $e \in E$ ;
- (iii)  $v \in f^*(v)$  für alle  $v \in V$ .

Aus der Existenz der genannten Bijektionen mit (i)–(iii) folgt, daß  $G$  und  $G^*$  zusammenhängend sind (Übung). Umgekehrt existiert zu jedem zusammenhängenden ebenen Multigraphen  $G$  ein topologisches Dual  $G^*$ : wählen wir aus jedem Gebiet  $f$  von  $G$  einen Punkt  $v^*(f)$  als Ecke von  $G^*$ , so lassen sich die neuen Ecken wirklich stets durch kreuzungsfreie Polygonzüge verbinden, wie es die Bedingung (ii) verlangt, und es existiert dann auch eine (iii) erfüllende Bijektion  $V \rightarrow F^*$  (Übung).

Sind  $G_1^*$  und  $G_2^*$  zwei Duale von  $G$ , so gilt offenbar  $G_1^* \simeq G_2^*$ ; man kann sogar zeigen, daß die natürliche Bijektion  $v_1^*(f) \mapsto v_2^*(f)$  ein topologischer Isomorphismus zwischen  $G_1^*$  und  $G_2^*$  ist. Wir dürfen in diesem Sinne also von *dem* Dual  $G^*$  von  $G$  sprechen.

Schließlich ist  $G$  seinerseits dual zu (jedem)  $G^*$ : verwenden wir die Umkehrabbildungen der drei Bijektionen aus der Definition von  $G^*$ , setzen also  $v^*(f^*(v)) := v$  und  $f^*(v^*(f)) := f$  für  $f^*(v) \in F^*$  und  $v^*(f) \in V^*$ , so werden die Bedingungen (i) und (iii) für  $G^*$  gerade zu (iii) und (i) für  $G$ , und sind somit erfüllt; die Bedingung (ii) ist ohnehin symmetrisch in  $G$  und  $G^*$ . Die Bezeichnung “dual” ist damit auch formal gerechtfertigt.

Dualität bei ebenen Multigraphen ist nicht zuletzt deshalb so interessant, weil sie eine Beziehung herstellt zwischen jeweils ganz natürlichen aber verschiedenartigen Kantenmengen. Die Kantenmengen der Kreise in  $G$  (einschließlich Schlingen und Doppelkanten) entsprechen nämlich gerade den minimalen Schnitten in  $G^*$ :

[5.5.2] **Proposition 3.6.1.** *Ist  $G$  ein zusammenhängender ebener Multigraph, so ist eine Kantenmenge  $E \subseteq E(G)$  genau dann die Kantenmenge eines Kreises in  $G$ , wenn  $E^* := \{e^* \mid e \in E\}$  ein minimaler Schnitt in  $G^*$  ist.*

(3.1.1) *Beweis.* Nach Bedingungen (i) und (ii) in der Definition von  $G^*$  liegen  
 (3.2.4) zwei Ecken  $v^*(f_1)$  und  $v^*(f_2)$  von  $G^*$  genau dann in der gleichen Komponente von  $G^* - E^*$ , wenn  $f_1$  und  $f_2$  im gleichen Gebiet von  $\mathbb{R}^2 \setminus \bigcup E$  liegen: jeder  $v^*(f_1) - v^*(f_2)$ -Weg in  $G^* - E^*$  ist ein Polygonzug zwischen  $f_1$  und  $f_2$  in  $\mathbb{R}^2 \setminus \bigcup E$ , und umgekehrt definiert jeder solche Polygonzug  $P$  (mit  $P \cap V(G) = \emptyset$ ) einen Kantenzug in  $G^* - E^*$  zwischen  $v^*(f_1)$  und  $v^*(f_2)$ .

Ist nun  $C \subseteq G$  ein Kreis und  $E = E(C)$ , so hat  $G^* - E^*$  wegen der obigen Korrespondenz nach dem Jordanschen Kurvensatz genau zwei Komponenten, und somit ist  $E^*$  ein minimaler Schnitt in  $G^*$ .

Hat umgekehrt  $E \subseteq E(G)$  die Eigenschaft, daß  $E^*$  ein Schnitt in  $G^*$  ist, so enthält  $E$  nach der obigen Korrespondenz und Lemma 3.2.4 die Kanten eines Kreises  $C \subseteq G$ . Ist  $E^*$  als Schnitt minimal, so enthält  $E$  nach dem bereits gezeigten Teil der Aussage keine weiteren Kanten, d.h. es gilt  $E = E(C)$ .  $\square$

Proposition 3.6.1 legt es nahe, auch für einen abstrakten (d.h. nicht ebenen) Multigraphen  $G$  einen weiteren Multigraphen  $G^*$  *kombinatorisch dual* zu  $G$  zu nennen, wenn  $E(G^*) = E(G)$  ist und die minimalen Schnitte von  $G^*$  gerade die Kantenmengen der Kreise in  $G$  sind. Ist  $G^*$  kombinatorisch dual zu  $G$ , so ist  $G^*$  offenbar zusammenhängend.

*kombinatorisch dual*

**Proposition 3.6.2.** *Ist  $G^*$  kombinatorisch dual zu  $G$ , so ist der Schnittraum von  $G^*$  der Zyklenraum von  $G$ , d.h. es gilt*

$$\mathcal{C}^*(G^*) = \mathcal{C}(G).$$

*Beweis.* Nach Lemma 0.9.4<sup>7</sup> ist  $\mathcal{C}^*(G^*)$  der von den minimalen Schnitten in  $G^*$  erzeugte Unterraum von  $\mathcal{E}(G^*) = \mathcal{E}(G)$ . Diese sind nach Annahme gerade die Kantenmengen der Kreise in  $G$ , und deren Erzeugnis in  $\mathcal{E}(G)$  ist  $\mathcal{C}(G)$ .  $\square$

(0.9.4)

**Satz 3.6.3.** (Whitney 1933)

*Ein Graph ist genau dann plättbar, wenn ein zu ihm kombinatorisch dualer Multigraph existiert.*

*Beweis.* Es sei  $G$  ein Graph. Ist  $G$  eben, so gibt es zu jeder Komponente  $C$  von  $G$  ein topologisches Dual  $C^*$ . Wir betrachten diese Multigraphen  $C^*$  abstrakt, wählen in jedem eine Ecke, und identifizieren diese Ecken; der entstandene zusammenhängende Multigraph heiße  $G^*$ . Die Menge der minimalen Schnitte in  $G^*$  ist die Vereinigung der Mengen minimaler Schnitte der Multigraphen  $C^*$ . Diese Schnitte sind nach Proposition 3.6.1 gerade die Kantenmengen der Kreise in  $G$ , und so ist  $G^*$  kombinatorisch dual zu  $G$ .

(0.9.3)  
(3.5.1)

Umgekehrt sei nun  $G^*$  ein zu  $G$  kombinatorisch dualer Multigraph. Nach Satz 3.5.1 und Proposition 3.6.2 reicht es zu zeigen, daß  $\mathcal{C}^*(G^*)$  eine schlichte Basis hat. Dies ist nach Proposition 0.9.3 der Fall.  $\square$

<sup>7</sup> Der Beweis des Lemmas überträgt sich wörtlich auf Multigraphen.



## Übungen

1. Definiere einen Begriff der Einbettung von Graphen in den  $\mathbb{R}^3$ . Zeige, daß jeder Graph geradlinig in den  $\mathbb{R}^3$  einbettbar ist.
2. Zeige direkt mit Lemma 3.1.2, daß  $K_{3,3}$  nicht als ebener Graph auftreten kann.
3. Beweise Proposition 3.2.6 induktiv mit Proposition 2.1.2.
4. Finde den Fehler im folgenden Beweis für die Behauptung, daß jeder maximal ebene Graph  $G$  mit mindestens vier Ecken ein ebener Dreiecksgraph mit Minimalgrad 3 ist. Verwende Induktion nach  $|G|$ . Der Induktionsanfang ist klar mit  $K^4$ . Zum Induktionsschritt  $n \rightarrow n + 1$  nehmen wir an, daß jeder maximal ebene Graph  $G$  mit  $n$  Ecken ein ebener Dreiecksgraph mit Minimalgrad 3 ist. Füge nun auf beliebige Weise zu  $G$  eine  $(n + 1)$ -te Ecke  $v$  hinzu, so daß der erweiterte Graph  $G'$  wieder maximal eben ist. Offenbar liegt  $v$  in einem Gebiet  $f$  von  $G$ , und da  $G'$  maximal eben ist, ist  $v$  zu allen Ecken auf dem Rand von  $f$  benachbart (und zu keinen weiteren Ecken). Da  $G$  ein ebener Dreiecksgraph ist, sind dies genau drei Ecken, d.h.  $\delta(G') = d(v) = 3$ .
5. Finde eine Eulerformel (Satz 3.2.9) für unzusammenhängende Graphen.
6. Zeige, daß jeder zusammenhängende ebene Graph mit  $n$  Ecken,  $m$  Kanten und Tailenweite  $g < \infty$  die Ungleichung  $m \leq \frac{g}{g-2}(n-2)$  erfüllt.
7. Zeige, daß jeder ebene Graph die Vereinigung dreier Wälder ist.
8. Es sei  $G_1, G_2, \dots$  eine Folge paarweise nicht isomorpher Graphen, mit  $\limsup \varepsilon(G_i) > 3$ . Zeige, daß es keine Fläche gibt, in die alle  $G_i$  einbettbar sind.  
(Tip: Analog zur Eulerformel für die Ebene gibt es für jede Fläche  $S$  eine Konstante  $\chi(S) \leq 2$ , so daß jeder in  $S$  einbettbare Graph  $n - m + \ell \geq \chi(S)$  erfüllt.)
9. Finde für plättbare Graphen einen direkten Beweis des Satzes von Tutte über den Zyklusraum 3-zusammenhängender Graphen (2.2.3).
10. Zeige, daß die beiden ebenen Graphen aus Abb. 3.3.1 nicht kombinatorisch (und daher auch nicht topologisch) isomorph sind.
11. Zeige, daß die beiden ebenen Graphen aus Abb. 3.3.2 kombinatorisch aber nicht topologisch isomorph sind.
12. Zeige, daß dem Begriff äquivalenter Einbettungen in die Ebene wirklich eine Äquivalenzrelation zugrundeliegt.
13. Finde einen 2-zusammenhängenden Graphen, für den je zwei Zeichnungen topologisch isomorph sind aber nicht je zwei Einbettungen in die Ebene äquivalent.

- 14.<sup>+</sup> Zeige, daß zu jedem ebenen Graphen ein kombinatorisch isomorpher ebener Graph existiert, bei dem alle Kanten Strecken im  $\mathbb{R}^2$  sind.  
(Tip: Betrachte oBdA einen ebenen Dreiecksgraphen und konstruiere einen graphentheoretisch isomorphen geradlinigen ebenen Graphen induktiv. Welche zusätzliche Eigenschaft der entstehenden Innengebiete könnte den Fortgang der Induktion sichern?)
15. Zeige, ohne den Satz von Kuratowski zu benutzen, daß jeder Minor eines plättbaren Graphen plättbar ist. Zeige weiter, daß ein Graph genau dann plättbar ist, wenn er Minor eines Gitters ist. (*Gitter* sind in Kapitel 10.3 definiert.)
16. (i) Zeige, ohne den Satz von Kuratowski zu benutzen, daß die plättbaren Graphen im Prinzip wie in diesem Satz charakterisierbar sind: daß eine Menge  $\mathcal{X}$  von Graphen existiert mit der Eigenschaft, daß ein Graph genau dann plättbar ist, wenn er keinen  $TX$  mit  $X \in \mathcal{X}$  enthält.  
(ii) Welche Grapheneigenschaften überhaupt lassen sich so charakterisieren?
- 17.<sup>-</sup> Hat jeder plättbare Graph eine Zeichnung, in der jedes Innengebiet konvex ist?
18. Modifiziere den Beweis von Lemma 3.4.3 so, daß jeder Gebietsrand ein konvexes Polygon wird.
- 19.<sup>-</sup> Enthält jeder minimal nicht plättbare Graph  $G$  (d.h. jeder nicht plättbare Graph  $G$ , dessen echte Teilgraphen alle plättbar sind) eine Kante  $e$ , für die  $G - e$  maximal plättbar ist? Ändert sich die Antwort, wenn man unter "minimal nicht plättbar" einen nicht plättbaren Graphen versteht, dessen echte Minoren alle plättbar sind?
20. Zeige, daß in einem maximal plättbaren Graphen mit mindestens 6 Ecken jede zusätzliche Kante sowohl einen  $TK^5$  als auch einen  $TK_{3,3}$  entstehen läßt.
21. Leite den Satz von Kuratowski induktiv durch Manipulation ebener Graphen aus Lemma 3.4.3 (dem 3-zusammenhängenden Fall des Satzes) her, also ohne den Umweg über Lemma 3.4.5.  
(Diese Aufgabe ist nicht als Übung in Elementartopologie gedacht; für die topologischen Beweisteile reicht eine grobe Skizze.)
22. Ein Graph heißt *outerplanar*, wenn er eine Zeichnung besitzt, bei der alle Ecken auf dem Rand des Außengebiets liegen. Zeige, daß ein Graph genau dann outerplanar ist, wenn er weder  $K^4$  noch  $K_{2,3}$  als Minor enthält.
23. Es sei  $G = G_1 \cup G_2$  mit  $|G_1 \cap G_2| \leq 1$ . Zeige, daß  $\mathcal{C}(G)$  genau dann eine schlichte Basis hat, wenn  $\mathcal{C}(G_1)$  und  $\mathcal{C}(G_2)$  eine haben.
- 24.<sup>+</sup> Finde unter den Gebietsrändern eines 2-zusammenhängenden ebenen Graphen eine Basis seines Zyklusraumes.

25. Zeige, daß ein 2-zusammenhängender ebener Graph genau dann bipartit ist, wenn jedes Gebiet durch einen Kreis gerader Länge berandet ist.
- 26.− Es sei  $G$  ein zusammenhängender ebener Multigraph und  $G^*$  sein Dual. Zeige die folgenden beiden Aussagen für jede Kante  $e \in G$ :
- (i) Liegt  $e$  auf dem Rand zwei verschiedener Gebiete  $f_1, f_2$  von  $G$ , so ist  $e^* = v^*(f_1)v^*(f_2)$ .
  - (ii) Liegt  $e$  auf dem Rand genau eines Gebiets  $f$  von  $G$ , so ist  $e^*$  eine Schlinge an  $v^*(f)$ .
- 27.− Wie sieht das Dual eines ebenen Baumes aus?
- 28.− Zeige, daß das Dual eines ebenen Multigraphen zusammenhängend ist.
- 29.+ Zeige, daß ein ebener Multigraph genau dann ein topologisches Dual besitzt, wenn er zusammenhängend ist.
30. Es seien  $G, G^*$  zueinander duale ebene Multigraphen, und  $e \in G$  eine Kante. Zeige die folgenden Aussagen:
- (i) Ist  $e$  keine Brücke, so ist  $G^*/e^*$  dual zu  $G - e$ .
  - (ii) Ist  $e$  keine Schlinge, so ist  $G^* - e^*$  dual zu  $G/e$ .
31. Zeige, daß je zwei zu einem zusammenhängenden ebenen Multigraphen duale ebene Multigraphen kombinatorisch isomorph sind.
32. Es seien  $G, G^*$  ebene Graphen, und  $G^*$  sei topologisch dual zu  $G$ . Zeige die folgenden Aussagen:
- (i) Ist  $G$  2-zusammenhängend, so ist auch  $G^*$  2-zusammenhängend.
  - (ii) Ist  $G$  3-zusammenhängend, so ist auch  $G^*$  3-zusammenhängend.
  - (iii) Ist  $G$  4-zusammenhängend, so ist  $G^*$  nicht notwendig 4-zusammenhängend.
33. Es seien  $G, G^*$  zueinander duale zusammenhängende ebene Graphen.  $G$  habe die Blöcke  $B_1, \dots, B_n$ . Zeige, daß  $B_1^*, \dots, B_n^*$  gerade die Blöcke von  $G^*$  sind.
34. Zeige, daß ein Multigraph  $G$  zu jedem kombinatorischen Dual  $G^*$  von  $G$  kombinatorisch dual ist.
35. Zeige, daß ein zusammenhängender Graph  $G = (V, E)$  genau dann plättbar ist, wenn ein zusammenhängender Multigraph  $G' = (V', E)$  mit der gleichen Kantenmenge existiert, so daß für jede Teilmenge  $F \subseteq E$  genau dann  $(V, F)$  ein Baum ist, wenn  $(V', E \setminus F)$  ein Baum ist.

## Notizen

Über die Einbettung von Graphen in die Ebene und andere Flächen wird es demnächst eine Monographie geben: B. Mohar & C. Thomassen, *Graphs on Surfaces*, Johns Hopkins University Press 2000.(?) Dort finden sich explizite Beweise der in Abschnitt 3.1 zitierten Sätze, sowie Quellenverweise für die klassischen Resultate dieses Kapitels. Einen einfachen Beweis des Satzes von Jordan (polygonal und allgemein) gibt auch J. Stillwell, *Classical topology and combinatorial graph theory*, Springer 1980.

Der kurze Beweis von Korollar 3.2.10 enthält einen Trick, der spezielle Erwähnung verdient: das sogenannte *doppelte Zählen* von Inzidenzen, veranschaulicht durch das Zählen der Kanten eines bipartiten Hilfsgraphen anhand seiner Eckengrade in der einen oder der anderen Partitionsmenge. Diese Beweistechnik tritt in der Kombinatorik vielfach auf; wir werden weitere Beispiele in Kapitel 4.5 und Kapitel 9 sehen.

Abschnitt 3.3 ist zum weiteren Verständnis des Kapitels nicht notwendig.

Kuratowski formulierte seinen Satz für topologische Minoren; die Version für Minoren wurde von Wagner (1937) hinzugefügt. Unser Beweis des Satzes für 3-zusammenhängende Graphen (Proposition 3.4.3) läßt sich leicht so verschärfen, daß alle Innengebiete der konstruierten Zeichnung konvex werden (Übung); siehe C. Thomassen, Planarity and duality of finite and infinite graphs, *J. Combin. Theory B* **29** (1980), 244–271. Die Existenz solcher Zeichnungen folgt auch aus dem klassischen Satz von Steinitz (1922), daß die 3-zusammenhängenden plättbaren Graphen genau die 1-Skelette der 3-dimensionalen konvexen Polyeder sind; siehe auch W.T. Tutte, How to draw a graph, *Proc. London Math. Soc.* **13** (1963), 743–767. Wie man leicht zeigt (siehe Übung), erzeugt in einem maximal plättbaren Graphen jede zusätzliche Kante nicht nur einen  $TK^5$  oder  $TK_{3,3}$  (wie nach dem Satz von Kuratowski), sondern beides. In Kapitel 6.4 werden wir sehen, daß allgemeiner sogar jeder Graph mit  $n$  Ecken und mehr als  $3n - 6$  Kanten einen  $TK^5$  und (mit einer Ausnahme) einen  $TK_{3,3}$  enthält.

Die in unserem Beweis des Plättbarkeitskriteriums von MacLane (Satz 3.5.1) angegebene schlichte Basis aus den Rändern der Innengebiete ist im folgenden Sinne kanonisch: zu jeder schlichten Basis  $\mathcal{B}$  des Zyklusraums eines 2-zusammenhängenden plättbaren Graphen  $G$  gibt es eine Zeichnung von  $G$ , bei der  $\mathcal{B}$  gerade zur Menge der Innengebietsränder wird (siehe Thomassen oben zitierte Arbeit). Zur Rückrichtung des Beweises haben wir den Satz von Kuratowski benutzt. Ein instruktiverer (wenn auch längerer) Beweis, bei dem eine ebene Darstellung des Graphen direkt aus einer schlichten Basis seines Zyklusraumes konstruiert wird, ist dargestellt bei K. Wagner, *Graphentheorie*, BI Hochschultaschenbücher 1972.

Die in Abschnitt 3.6 angesprochene Dualität zwischen den Kreisen eines ebenen Multigraphen und den minimalen Schnitten seines Duals werden in der Matroidtheorie näher untersucht; siehe etwa J.G. Oxley, *Matroid Theory*, Oxford University Press 1992.



Wieviele Farben reichen aus, um die Länder einer Landkarte so zu färben, daß zwei Länder mit gemeinsamer Grenze stets verschieden gefärbt sind? Wieviele Tage muß ein Parlament für Ausschußsitzungen anberaumen, wenn jeder Ausschuß einen Tag lang tagen will und einige Parlamentsmitglieder in mehreren Ausschüssen sitzen? Wie finden wir einen Stundenplan minimaler Gesamtlänge für eine Schule, wenn wir wissen, welcher Lehrer welche Klasse wie häufig unterrichten soll?

Eine *Eckenfärbung* eines Graphen  $G = (V, E)$  ist eine Abbildung  $c: V \rightarrow S$  mit  $c(v) \neq c(w)$  für je zwei benachbarte Ecken  $v, w$ ; die Elemente der Menge  $S$  nennt man die zur Verfügung stehenden *Farben*. An der Menge  $S$  wird uns lediglich ihre Mächtigkeit interessieren: typischerweise fragen wir nach dem kleinsten  $k \in \mathbb{N}$ , so daß  $G$  eine  $k$ -Färbung hat, eine Eckenfärbung  $c: V \rightarrow \{1, \dots, k\}$ . Dieses  $k$  nennt man die (*ecken-*) *chromatische Zahl* von  $G$ ; man bezeichnet sie mit  $\chi(G)$ . Einen Graphen  $G$  mit  $\chi(G) = k$  nennt man *k-chromatisch*; ist  $\chi(G) \leq k$ , so heißt  $G$  *k-färbbar*.

*Ecken-*  
*färbung*

*chromati-*  
*sche Zahl*  
 $\chi(G)$

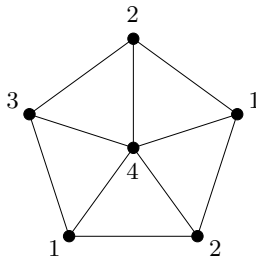


Abb. 4.0.1. Eine Eckenfärbung  $V \rightarrow \{1, \dots, 4\}$

Eine  $k$ -Färbung ist natürlich nichts weiter als eine Eckenpartition in  $k$  unabhängige Mengen; die nicht trivialen 2-färbbaren Graphen beispielsweise sind gerade die bipartiten Graphen. Die erste der obigen

Fragen führt auf das Problem der Bestimmung von  $\chi(G)$  für ebene Graphen  $G$ , und auch die zweite Frage läßt sich als Eckenfärbungsproblem formulieren. (Wie?)

Eine *Kantenfärbung* von  $G = (V, E)$  ist eine Abbildung  $c: E \rightarrow S$  mit  $c(e) \neq c(f)$  für benachbarte Kanten  $e, f$ . Das kleinste  $k \in \mathbb{N}$ , für das eine Kantenfärbung  $c: E \rightarrow \{1, \dots, k\}$  existiert, nennt man die *kantenchromatische Zahl* oder den *chromatischen Index* von  $G$ ; man bezeichnet dieses  $k$  mit  $\chi'(G)$ . Die dritte der obigen Fragen läßt sich modellieren als Kantenfärbungsproblem in einem bipartiten Multigraphen. (Wie?)

Jede Kantenfärbung von  $G$  ist offenbar eine Eckenfärbung des Kantengraphen  $L(G)$  von  $G$  und umgekehrt; insbesondere gilt  $\chi'(G) = \chi(L(G))$ . Die Bestimmung kantenchromatischer Zahlen läßt sich somit als Spezialfall der Bestimmung eckenchromatischer Zahlen auffassen. Wie wir sehen werden, entspricht diesem Verhältnis der beiden Typen von Färbungsproblemen ein markanter Unterschied in der Schwierigkeit ihrer – zumindest annähernden – Lösung: während es für  $\chi(G)$  nur grobe Abschätzungen gibt, nimmt  $\chi'(G)$  stets einen von zwei Werten an:  $\Delta(G)$  oder  $\Delta(G) + 1$ !

## 4.1 Landkarten und das Färben ebener Graphen

Der außerhalb der Mathematik sicherlich bekannteste Satz der Graphentheorie ist der folgende *Vierfarbensatz*, nach dem (Übung) jede Landkarte mit höchstens vier Farben färbbar ist:

**Satz 4.1.1.** (Vierfarbensatz)

*Jeder ebene Graph hat eine Eckenfärbung mit höchstens 4 Farben.*

Hinweise zur Geschichte des Beweises des Vierfarbensatzes geben wir in den Notizen am Ende des Kapitels. Wir beweisen hier die folgende Abschwächung:

**Proposition 4.1.2.** (Fünffarbensatz)

*Jeder ebene Graph ist 5-färbbar.*

*Beweis.* Es sei  $G$  ein ebener Graph mit  $n \geq 3$  Ecken und  $m$  Kanten; wir nehmen induktiv an, daß jeder ebene Graph mit weniger als  $n$  Ecken 5-färbbar ist. Nach Korollar 3.2.10 ist

$$d(G) = 2m/n \leq 2(3n - 6)/n < 6;$$

es sei  $v \in G$  eine Ecke mit  $d(v) \leq 5$ . Nach Induktionsannahme hat  $H := G - v$  eine Eckenfärbung  $c: V(H) \rightarrow \{1, \dots, 5\}$ . Sind die Nachbarn von  $v$  darin mit insgesamt höchstens 4 Farben gefärbt, so können wir

Kanten-  
färbung

chromati-  
scher Index  
 $\chi'(G)$

(3.1.1)  
(3.2.10)

$n, m$

$v$   
 $H$   
 $c$

$c$  zu einer 5-Färbung von  $G$  fortsetzen. Wir nehmen daher an, daß  $v$  genau fünf Nachbarn hat und diese verschieden gefärbt sind.

Wir betrachten jetzt eine offene Kreisscheibe  $D$  um  $v$ , die so klein ist, daß sie nur die fünf geraden Kantensegmente von  $G$  trifft, die  $v$  enthalten; diese Segmente seien entsprechend ihrer Lage in  $D$  in zyklischer Ordnung als  $s_1, \dots, s_5$  numeriert. Ist  $v_i$  der Nachbar von  $v$  mit  $s_i \subseteq vv_i$ , so sei oBdA  $c(v_i) = i$ . Wir zeigen zunächst, daß jeder  $v_1$ - $v_3$ -Weg  $P \subseteq H$  die Ecken  $v_2$  und  $v_4$  in  $H$  trennt. (Abb. 4.1.1)

$D$

$s_1, \dots, s_5$   
 $v_1, \dots, v_5$

$P$

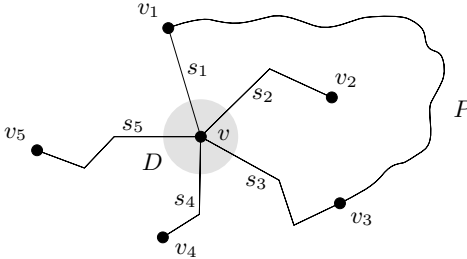


Abb. 4.1.1. Zum Beweis des Fünffarbensatzes

Dies ist offenbar genau dann der Fall, wenn der Kreis  $C := vv_1Pv_3v$  die Ecken  $v_2$  und  $v_4$  in  $G$  trennt. Hierzu wiederum reicht es zu zeigen, daß  $v_2$  und  $v_4$  in verschiedenen Gebieten von  $C$  liegen. Betrachten wir zunächst die beiden Gebiete  $D', D''$  von  $D \setminus (s_1 \cup s_3)$ . Das eine dieser Gebiete trifft  $s_2$ , das andere  $s_4$ ; es sei etwa  $x_2 \in D' \cap s_2$  und  $x_4 \in D'' \cap s_4$ . Wegen  $C \cap D \subseteq s_1 \cup s_3$  sind  $D'$  und  $D''$  jeweils ganz in einem Gebiet von  $C$  enthalten. Diese Gebiete sind verschieden: sonst träfe ganz  $D$  nur ein Gebiet von  $C$ , im Widerspruch zur Tatsache, daß  $v$  auf dem Rand der beiden Gebiete von  $C$  liegt (Satz 3.1.1). Mit  $x_2$  und  $x_4$  liegen aber auch  $v_2$  und  $v_4$  in verschiedenen Gebieten von  $C$ , wie behauptet.

$C$

Für  $i, j \in \{1, \dots, 5\}$  sei  $H_{i,j}$  der von den mit  $i$  und  $j$  gefärbten Ecken induzierte Untergraph von  $H$ , also  $H_{i,j} := H[c^{-1}(\{i, j\})]$ . Ist  $C_1$  die Komponente von  $H_{1,3}$ , die  $v_1$  enthält, so ist auch  $v_3 \in C_1$ : anderenfalls vertauschten wir an allen Ecken von  $C_1$  die Farben 1 und 3 und erhielten so eine 5-Färbung von  $H$ , in der  $v_1$  und  $v_3$  beide mit 3 gefärbt wären; wir könnten dann  $v$  mit 1 färben.  $H_{1,3}$  enthält also einen  $v_1$ - $v_3$ -Weg  $P$ , der wie oben  $v_2$  und  $v_4$  in  $H$  trennt. Insbesondere liegen  $v_2$  und  $v_4$  dann in verschiedenen Komponenten von  $H_{2,4}$ , denn  $P \cap H_{2,4} = \emptyset$ . In einer dieser Komponenten können wir die Farben 2 und 4 vertauschen und dann  $v$  mit der freigewordenen Farbe färben.  $\square$

$H_{i,j}$

Als Hintergrund zum Vier- und Fünffarbensatz zitieren wir noch ein bekanntes Resultat:

**Satz 4.1.3.** (Grötzsch 1959)

Jeder ebene Graph, der kein Dreieck enthält, ist 3-färbbar.



## 4.2 Eckenfärbungen

Wie bestimmen wir die chromatische Zahl eines Graphen? Wie *finden* wir eine Eckenfärbung mit möglichst wenig Farben? Wie verhält sich die chromatische Zahl des Graphen zu anderen Invarianten wie Durchschnittsgrad, Zusammenhang oder Taillenweite?

Unmittelbar aus der Definition der chromatischen Zahl ergibt sich die folgende Abschätzung:

**Proposition 4.2.1.** *Für jeden Graphen  $G$  mit  $m$  Kanten gilt*

$$\chi(G) \leq \frac{1}{2} + \sqrt{2m + \frac{1}{4}}.$$

*Beweis.* Es sei  $c$  eine Eckenfärbung von  $G$  mit  $k = \chi(G)$  Farben. Dann hat  $G$  zwischen je zwei Farbklassen  $c^{-1}(i)$  mindestens eine Kante; anderenfalls könnten wir beide Klassen gleich färben. Damit gilt  $m \geq \frac{1}{2}k(k-1)$ ; Auflösung dieser Ungleichung nach  $k$  ergibt die Behauptung.  $\square$

Farbklass

Greedy-  
Algorithmus

Eine naheliegende Weise, einen Graphen  $G$  zu färben, ist der folgende *Greedy-Algorithmus*: ausgehend von einer festen Eckenaufzählung  $v_1, \dots, v_n$  von  $G$  färbe die Ecken  $v_i$  nacheinander jeweils mit der kleinstmöglichen Farbe  $c(v_i) \in \mathbb{N}$ , also mit der kleinsten Farbe, die kein Nachbar  $v_j$  von  $v_i$  mit  $j < i$  bereits trägt. Offenbar ist  $G$  so, selbst bei ungünstiger Eckenaufzählung, stets mit  $\Delta(G) + 1$  Farben färbbar. Ist  $G$  vollständig oder ein Kreis ungerader Länge, so ist dies sogar bestmöglich.

Allgemein jedoch ist diese Abschätzung natürlich zu grob: wenn wir die Ecke  $v_i$  färben, reicht bereits ein Vorrat von  $d_{G[v_1, \dots, v_i]}(v_i) + 1$  Farben, da die Nachbarn  $v_j$  von  $v_i$  mit  $j > i$  vom Algorithmus ja nicht berücksichtigt werden. Diese feinere Abschätzung wird dann besonders gut, wenn  $v_i$  in  $G[v_1, \dots, v_i]$  minimalen Grad hat. Dies ist aber ohne weiteres erreichbar: wir wählen als  $v_n$  eine Ecke mit minimalem Grad in  $G$ , als  $v_{n-1}$  eine Ecke mit minimalem Grad in  $G - v_n$ , und so weiter; mit der sich ergebenden Eckennumerierung hat dann  $v_i$  jeweils minimalen Grad in  $G[v_1, \dots, v_i]$ .

Die kleinste natürliche Zahl  $k$ , für die  $G$  eine Eckenaufzählung hat, in der jede Ecke zu weniger als  $k$  früheren Ecken benachbart ist, nennt man die *Reihenanzahl*  $\text{col}(G)$  von  $G$ . Unsere eben betrachtete Eckenaufzählung zeigt, daß stets  $\text{col}(G) \leq \max_{H \subseteq G} \delta(H) + 1$  gilt. Umgekehrt ist für jedes  $H \subseteq G$  jedoch  $\text{col}(G) \geq \text{col}(H)$  und  $\text{col}(H) \geq \delta(H) + 1$ , da bei jeder Eckenaufzählung von  $H$  die Anzahl der 'früheren' Nachbarn der letzten Ecke einfach deren Grad in  $H$  ist, also mindestens  $\delta(H)$ . Wir haben somit die folgende Abschätzung:

Reihenanzahl  
 $\text{col}(G)$

**Proposition 4.2.2.** Für jeden Graphen  $G$  gilt

$$\chi(G) \leq \text{col}(G) = \max \{ \delta(H) \mid H \subseteq G \} + 1.$$

□

**Korollar 4.2.3.** Jeder Graph  $G$  hat einen Untergraphen vom Minimalgrad  $\geq \chi(G) - 1$ . □

[7.2.1]  
[7.2.3]  
[9.2.3]

Die Reihenzahl eines Graphen ist eng mit seiner Arborizität verknüpft; vergleiche dazu die Bemerkung nach Satz 2.5.4.

Wir sahen eingangs, daß für jeden Graphen  $G$  die Abschätzung  $\chi(G) \leq \Delta(G) + 1$  gilt, mit Gleichheit für vollständige Graphen und Kreise ungerader Länge. Der folgende Satz zeigt, daß in allen anderen Fällen die Abschätzung ein wenig verbessert werden kann:

**Satz 4.2.4.** (Brooks 1941)

Es sei  $G$  ein zusammenhängender Graph. Ist  $G$  weder vollständig noch ein Kreis ungerader Länge, so gilt  $\chi(G) \leq \Delta(G)$ .

*Beweis.* Wir verwenden Induktion nach  $|G|$ . Ist  $\Delta(G) \leq 2$ , so ist  $G$  ein Weg oder Kreis, und die Behauptung ist trivial. Es gelte daher  $\Delta := \Delta(G) \geq 3$ , und die Behauptung sei wahr für Graphen kleinerer Ordnung als  $|G|$ . Angenommen,  $\chi(G) > \Delta$ . Δ

Es sei  $v \in G$  eine beliebige Ecke und  $H := G - v$ . Dann ist  $\chi(H) \leq \Delta$ : für jede Komponente  $H'$  von  $H$  gilt nämlich nach Induktionsannahme  $\chi(H') \leq \Delta(H') \leq \Delta$ , sofern  $H'$  nicht vollständig oder ein ungerader Kreis ist; in jenem Fall ist jedoch  $\chi(H') = \Delta(H') + 1 \leq \Delta$ , da jede Ecke von  $H'$  maximalen Grad hat und eine solche Ecke in  $G$  zusätzlich zu  $v$  benachbart ist. v, H

Es sei  $c: V(H) \rightarrow \{1, \dots, \Delta\}$  eine beliebige Färbung. Dann gilt c

$$c(N(v)) = \{1, \dots, \Delta\} \quad (1)$$

(und insbesondere  $d(v) = \Delta$ ), da wir  $c$  sonst zu einer  $\Delta$ -Färbung von  $G$  fortsetzen könnten. Es sei  $N(v) =: \{v_1, \dots, v_\Delta\}$  mit  $c(v_i) = i$  für alle  $i = 1, \dots, \Delta$ . v<sub>1</sub>, ..., v<sub>Δ</sub>

Mit  $H_{i,j}$  für  $i \neq j$  bezeichnen wir den Untergraphen von  $H$ , den die Ecken mit den Farben  $i$  und  $j$  aufspannen. H<sub>i,j</sub>

Die Ecken  $v_i$  und  $v_j$  gehören stets zur gleichen Komponente  $C_{i,j}$  von  $H_{i,j}$ . (2) C<sub>i,j</sub>

Anderenfalls könnten wir in einer dieser Komponenten die Farben  $i$  und  $j$  vertauschen, so daß dann  $v_i$  und  $v_j$  gleich gefärbt sind – im Widerspruch zu (1).

$$C_{i,j} \text{ ist stets ein } v_i\text{-}v_j\text{-Weg.} \quad (3)$$

Zum Beweis von (3) sei  $P$  ein  $v_i\text{-}v_j\text{-Weg}$  in  $C_{i,j}$ . Wegen  $d_H(v_i) \leq \Delta - 1$  hat  $v_i$  keine zwei gleich gefärbten Nachbarn in  $H$ : anderenfalls könnten wir  $v_i$  umfärben, im Widerspruch zu (1). Der Nachbar von  $v_i$  auf  $P$  ist also sein einziger Nachbar in  $C_{i,j}$ , und Entsprechendes gilt für  $v_j$ . Ist nun  $C_{i,j} \neq P$ , so hat  $P$  eine innere Ecke mit drei gleich gefärbten Nachbarn in  $H$ ; es sei  $u$  die erste solche Ecke auf  $P$  (Abb. 4.2.1). Wiederum können wir  $u$  umfärben; in der entstehenden Färbung ist  $P\hat{u}$  eine Komponente von  $H_{i,j}$ , im Widerspruch zu (2).

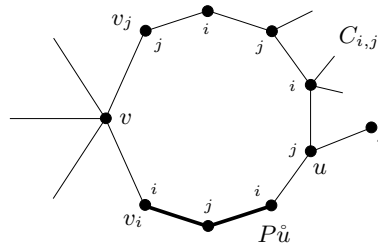


Abb. 4.2.1. Zum Beweis von (3) im Satz von Brooks

Für verschiedene  $i, j, k$  treffen die Wege  $C_{i,j}$  und  $C_{i,k}$  einander nur in  $v_i$ . (4)

Ist nämlich  $v_i \neq u \in C_{i,j} \cap C_{i,k}$ , so hat  $u$  zwei Nachbarn der Farbe  $j$  und zwei der Farbe  $k$ , und wir können  $u$  umfärben in eine Farbe  $\ell \notin \{i, j, k\}$ . In dieser neuen Färbung liegen nach (3) dann  $v_i$  und  $v_j$  in verschiedenen Komponenten von  $H_{i,j}$ , im Widerspruch zu (2).

Der Beweis der Hauptaussage folgt nun leicht. Sind die Ecken  $v_1, \dots, v_\Delta$  paarweise benachbart, so hat jedes  $v_i$  bereits  $\Delta$  Nachbarn in  $N(v) \cup \{v\}$ , und es folgt  $G = G[v, v_1, \dots, v_\Delta] = K^{\Delta+1}$ . Damit ist  $G$  vollständig, und es ist nichts zu zeigen. Wir dürfen somit  $v_1 v_2 \notin G$  annehmen. Es sei  $u \neq v_2$  der Nachbar von  $v_1$  auf dem Weg  $C_{1,2}$ . Dann ist  $c(u) = 2$ . Wir tauschen nun die Farben 1 und 3 in  $C_{1,3}$  und nennen die neue Färbung  $c'$ ; weiter seien  $v'_1 := v_3$  und  $v'_3 := v_1$ , sowie  $v'_i := v_i$  für  $i \neq 1, 3$ . Da die Färbung  $c$  beliebig gewählt war, gilt (1)–(4) analog auch für  $c'$ ; es sei  $C'_{i,j}$  der durch  $c'$  mit  $i$  und  $j$  gefärbte  $v'_i\text{-}v'_j\text{-Weg}$ . Als Nachbar von  $v_1 = v'_3$  liegt  $u$  in  $C'_{2,3}$ , wegen  $c'(u) = c(u) = 2$ . Nach (4) für  $c$  wurde aber der Weg  $\hat{v}_1 C_{1,2}$  nicht umgefärbt, und so gilt überdies  $u \in \hat{v}_1 C_{1,2} \subseteq C_{1,2}$ . Dies widerspricht (4) für  $c'$ . □

Wie wir gesehen haben, hat ein Graph  $G$  hoher chromatischer Zahl auch hohen Maximalgrad, nämlich mindestens  $\chi(G) - 1$ . Was sonst können wir über die Gestalt eines Graphen mit hoher chromatischer Zahl sagen?

Ein einfacher möglicher Grund für  $\chi(G) \geq k$  ist das Vorhandensein eines  $K^k$  als Teilgraphen von  $G$ . Dies ist eine lokale Eigenschaft von  $G$ , vereinbar – etwa bei Hinzufügung vieler isolierter Ecken – mit beliebig niedrigen Werten der Invarianten  $\kappa$ ,  $\delta$  und  $\varepsilon$ . Wir können aus  $\chi(G) \geq k$  also nicht auf Werte dieser Invarianten für  $G$  selbst schließen.

Folgt aus  $\chi(G) \geq k$  dann zumindest lokal die Existenz eines besonders dichten Teilgraphen von  $G$ , vielleicht gar eines  $K^k$ ? Nach Korollar 4.2.3 hat  $G$  jedenfalls einen Teilgraphen  $H$  mit  $\delta(H) \geq k - 1$ , und daher nach Satz 0.4.2 einen Teilgraphen  $H'$  mit  $\kappa(H') \geq \lfloor \frac{1}{4}(k - 1) \rfloor$ .

Selbst diese Teilgraphen sind jedoch weit davon entfernt, ihrerseits einen spezifischen Graphen hoher chromatischer Zahl zu enthalten (wie etwa einen  $K^k$ ), einen konkreten Teilgraphen also, der allein verantwortlich wäre für die hohe chromatische Zahl von  $G$ . Tatsächlich folgt aus  $\chi(G) \geq k$  nicht nur nicht die Existenz eines  $K^k$  in  $G$ , oder auch eines  $K^r$  für ein mit  $k$  wachsendes  $r$ : es folgt noch nicht einmal die Existenz eines Dreiecks (Übung).

Doch damit nicht genug. Wie wir in Kapitel 9 sehen werden, braucht  $G$  noch nicht einmal kurze Kreise zu enthalten: es gibt Graphen beliebig hoher chromatischer Zahl und gleichzeitig beliebig hoher Tailleweite! Somit gibt es auch für jeden konkreten Graphen  $H$ , der nicht gerade ein Wald ist, zu jedem  $k$  einen Graphen  $G$  mit  $\chi(G) \geq k$  und  $H \not\subseteq G$ . (Daß  $G$  andererseits bei hinreichend großem  $\chi(G)$  jeden vorgegebenen Wald enthält, folgt wiederum aus Korollar 4.2.3.) Hohe chromatische Zahl ist also nicht, wie man nach unseren ersten Betrachtungen hätte vermuten können, notwendig eine lokale Dichteigenschaft, sondern kann als ein rein globales Phänomen auftreten: hat ein Graph hohe Tailleweite, so sieht er lokal um jede Ecke herum aus wie ein Baum, ist dort also jeweils 2-färbbar!

Aus welchen Eigenschaften eines Graphen  $G$  können wir umgekehrt auf eine hohe chromatische Zahl von  $G$  schließen? Welche Möglichkeiten eines einfachen Nachweises gibt es, daß ein Graph nicht mit weniger als  $k$  Farben färbbar ist? Gegen hohe Werte globaler Invarianten wie Zusammenhang oder Durchschnittsgrad ist die chromatische Zahl weitgehend immun: die vollständig bipartiten Graphen  $K_{n,n}$  etwa zeigen, daß wir aus großem  $\kappa$ ,  $\delta$  oder  $\varepsilon$  nicht auf großes  $\chi$  schließen können.

Insofern ist es interessant, daß es ein einfaches – wenn auch nicht immer kurzes – Verfahren gibt, jeden Graphen  $G$  mit  $\chi(G) \geq k$  schrittweise aus vollständigen Graphen  $K^k$  zu gewinnen. Zu jedem  $k \in \mathbb{N}$  definieren wir dazu die Klasse der *k-konstruierbaren* Graphen rekursiv wie folgt:

- (i) Jeder  $K^k$  sei  $k$ -konstruierbar.
- (ii) Ist  $G$   $k$ -konstruierbar, und sind  $x, y \in V(G)$  nicht benachbart, so sei auch  $(G + xy)/xy$   $k$ -konstruierbar.
- (iii) Sind  $G_1$  und  $G_2$  zwei  $k$ -konstruierbare Graphen mit  $G_1 \cap G_2 = \{x\}$ ,  $xy_1 \in E(G_1)$  und  $xy_2 \in E(G_2)$  für drei Ecken  $x, y_1, y_2$ , so sei auch  $(G_1 \cup G_2) - xy_1 - xy_2 + y_1y_2$   $k$ -konstruierbar (Abb. 4.2.2).

$k$ -  
konstruierbar

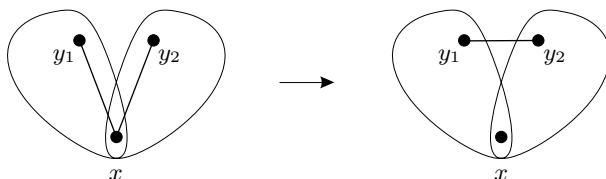


Abb. 4.2.2. Die Hajós-Operation (iii)

Induktiv entlang der Rekursion sieht man sofort, daß alle  $k$ -konstruierbaren Graphen – und damit auch deren Obergraphen – mindestens  $k$ -chromatisch sind. In (ii) etwa definiert jede Färbung von  $(G + xy)/xy$  mit weniger als  $k$  Farben auch eine solche Färbung von  $G$ , mit Widerspruch. In (iii) hat in jeder Färbung des konstruierten Graphen mindestens einer der Ecken  $y_1, y_2$  eine andere Farbe als  $x$ , d.h. die Färbung induziert eine Färbung von  $G_1$  oder von  $G_2$  und benötigt daher mindestens  $k$  Farben.

Bemerkenswert ist jedoch, daß auch die Umkehrung gilt:

**Satz 4.2.5.** (Hajós 1961)

Für  $k \in \mathbb{N}$  und einen Graphen  $G$  gilt genau dann  $\chi(G) \geq k$ , wenn  $G$  einen  $k$ -konstruierbaren Teilgraphen hat.

*Beweis.* Es sei  $G$  ein Graph mit  $\chi(G) \geq k$ ; wir zeigen, daß  $G$  einen  $k$ -konstruierbaren Teilgraphen hat. Angenommen nicht; dann ist  $k \geq 3$ . Durch schrittweises Hinzufügen neuer Kanten machen wir  $G$  zunächst kantenmaximal mit der Eigenschaft, daß keiner seiner Teilgraphen  $k$ -konstruierbar ist.  $G$  ist dann nicht vollständig  $r$ -partit für irgendein  $r$ : wegen  $\chi(G) \geq k$  gälte sonst  $r \geq k$ , und  $G$  enthielte den  $k$ -konstruierbaren Graphen  $K^k$ .

Da  $G$  nicht vollständig multipartit ist, ist Nichtbenachbarkeit keine Äquivalenzrelation auf  $V(G)$ . Es gibt somit Ecken  $y_1, x, y_2$  mit  $y_1x, xy_2 \notin E(G)$  aber  $y_1y_2 \in E(G)$ . Da  $G$  kantenmaximal ist ohne  $k$ -konstruierbaren Teilgraphen, liegt jede der beiden Kanten  $xy_i$  in einem  $k$ -konstruierbaren Teilgraphen  $H_i$  von  $G + xy_i$  ( $i = 1, 2$ ).

Es sei  $H'_2$  eine isomorphe Kopie von  $H_2$ , die  $x$  und  $H_2 - H_1$  enthält und sonst zu  $G$  disjunkt ist; der Isomorphismus  $v \mapsto v'$  von  $H_2$  nach  $H'_2$

$y_1, x, y_2$

$H_1, H_2$

$H'_2$

$v'$  etc.

sei auf  $H_2 \cap H'_2$  die Identität. Dann gilt  $H_1 \cap H'_2 = \{x\}$ , und nach (iii) ist

$$H := (H_1 \cup H'_2) - xy_1 - xy'_2 + y_1y'_2$$

$k$ -konstruierbar. Wir identifizieren in  $H$  nun nacheinander jede Ecke  $v' \in H'_2 - G$  mit ihrer Partnerecke  $v$ ; da jeweils  $vv' \notin E(H)$  gilt, ist jede solche Identifikation ein Konstruktionsschritt des Typs (ii). Am Ende dieses Prozesses erhalten wir den Graphen

$$(H_1 \cup H_2) - xy_1 - xy_2 + y_1y_2 \subseteq G;$$

dies ist der gesuchte  $k$ -konstruierbare Teilgraph von  $G$ . □

### 4.3 Kantenfärbungen

Für jeden Graphen  $G$  ist offenbar  $\chi'(G) \geq \Delta(G)$ . Für bipartite Graphen gilt hier sogar Gleichheit:

**Proposition 4.3.1.** (König 1916)

Für jeden bipartiten Graphen  $G$  gilt  $\chi'(G) = \Delta(G)$ .

[4.4.5]

*Beweis.* Wir verwenden Induktion nach  $\|G\|$ . Für  $\|G\| = 0$  ist die Behauptung wahr. Es sei nun  $G$  mit  $\|G\| \geq 1$  gegeben,  $\Delta := \Delta(G)$ , und die Behauptung sei wahr für Graphen mit weniger Kanten. Wir wählen eine Kante  $xy \in G$  und eine Kantenfärbung  $E(G - xy) \rightarrow \{1, \dots, \Delta\}$ . Kanten der Farbe  $\alpha$  bezeichnen wir als  $\alpha$ -Kanten.

(0.6.1)

 $\Delta$  $xy$  $\alpha$ -Kante

In  $G - xy$  haben  $x$  und  $y$  jeweils höchstens  $\Delta - 1$  inzidente Kanten. Wir können daher  $\alpha, \beta \in \{1, \dots, \Delta\}$  finden, so daß  $x$  mit keiner  $\alpha$ -Kante inzidiert und  $y$  mit keiner  $\beta$ -Kante. Können wir überdies  $\alpha = \beta$  wählen, so färben wir  $xy$  mit dieser Farbe und erhalten so unsere gewünschte  $\Delta$ -Kantenfärbung von  $G$ .

 $\alpha, \beta$ 

Wir nehmen daher an, daß  $\alpha \neq \beta$  ist und  $x$  mit einer  $\beta$ -Kante inzidiert. Wir setzen diese Kante zu einem maximalen Kantenzug  $W$  fort, dessen Kanten abwechselnd mit  $\beta$  und  $\alpha$  gefärbt sind. Da kein solcher Kantenzug eine Ecke zweimal enthalten kann (warum nicht?), existiert  $W$  und ist ein Weg. Weiter ist  $y \notin W$ : sonst würde  $W$  in  $y$  mit einer  $\alpha$ -Kante enden (nach Wahl von  $\beta$ ) und somit gerade Länge haben, d.h.  $W + xy$  wäre ein Kreis ungerader Länge in  $G$  (vgl. Proposition 0.6.1). Wir färben nun alle Kanten in  $W$  um, indem wir die Farben  $\alpha$  und  $\beta$  auf  $W$  vertauschen. Nach Wahl von  $\alpha$  und aufgrund der Maximalität von  $W$  sind auch nach der Umfärbung in ganz  $G - xy$  keine gleichfarbigen Kanten benachbart. Wir haben somit eine  $\Delta$ -Kantenfärbung von  $G - xy$ , in der weder  $x$  noch  $y$  mit einer  $\beta$ -Kante inzident ist. Indem wir  $xy$  mit  $\beta$  färben, können wir diese Färbung zu einer  $\Delta$ -Kantenfärbung von  $G$  fortsetzen. □

**Satz 4.3.2.** (Vizing 1964)

Für jeden Graphen  $G$  gilt

$$\Delta(G) \leq \chi'(G) \leq \Delta(G) + 1.$$

*Beweis.* Wir zeigen die zweite Ungleichung mit Induktion nach  $\|G\|$ .

$G = (V, E)$   
 $\Delta$   
 Färbung  
 $\alpha$ -Kante  
 $\Delta$   
 Färbung  
 $\alpha$ -Kante

Für  $\|G\| = 0$  ist sie trivial. Zum Induktionsschritt sei  $G = (V, E)$  gegeben,  $\Delta := \Delta(G) > 0$ , und die Behauptung sei wahr für Graphen mit weniger Kanten. Statt "Kantenfärbung mit  $(\Delta + 1)$  Farben" sagen wir im folgenden kurz "Färbung". Eine mit einer Farbe  $\alpha$  gefärbte Kante nennen wir wieder eine  $\alpha$ -Kante.

Zu jeder Kante  $e \in G$  existiert nach Induktionsannahme eine Färbung von  $G - e$ . Zu jeder Ecke  $v$  gibt es wegen  $d(v) \leq \Delta$  dabei eine Farbe  $\beta \in \{1, \dots, \Delta + 1\}$ , die von keiner mit  $v$  inzidenten Kante getragen wird; wir sagen, diese Farbe  $\beta$  fehlt an  $v$ . Ist  $\alpha$  eine weitere Farbe, so existiert dann ein eindeutig bestimmter maximaler in  $v$  beginnender Kantenzug (möglicherweise trivial), dessen Kanten abwechselnd mit  $\alpha$  und  $\beta$  gefärbt sind. Dieser Kantenzug ist ein Weg, und wir nennen ihn den  $\alpha/\beta$ -Weg aus  $v$ .

Wir nehmen an,  $G$  habe keine Färbung. Dann gilt:

Ist  $xy \in E$  und eine Färbung von  $G - xy$  gegeben, in der die Farbe  $\alpha$  an  $x$  und die Farbe  $\beta$  an  $y$  fehlt, so endet der  $\alpha/\beta$ -Weg aus  $y$  in  $x$ . (1)

Anderenfalls könnten wir die Kanten des Weges umfärben (durch Vertauschung der Farben  $\alpha$  und  $\beta$ ) und  $xy$  mit  $\alpha$  färben; wir hätten dann eine Färbung von  $G$ , entgegen unserer Annahme.

$x, y_0$   
 $G_0, c_0, \alpha$   
 $y_1, \dots, y_k$   
 $G_i$

Es sei  $xy_0 \in G$  eine Kante; nach Induktionsannahme hat  $G_0 := G - xy_0$  eine Färbung  $c_0$ . Es sei  $\alpha$  eine darin an  $x$  fehlende Farbe. Weiter sei  $y_0, y_1, \dots, y_k$  eine maximale mit  $y_0$  beginnende Folge verschiedener Nachbarn von  $x$  in  $G$ , so daß in  $c_0$  jeweils  $c_0(xy_i)$  an  $y_{i-1}$  fehlt ( $i = 1, \dots, k$ ). Auf jedem der Graphen  $G_i := G - xy_i$  definieren wir eine Färbung  $c_i$  durch

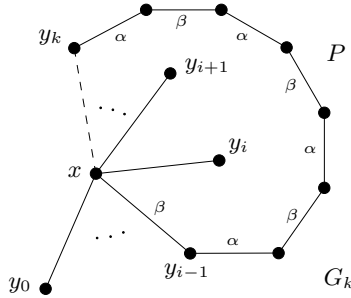
$$c_i(e) := \begin{cases} c_0(xy_{j+1}) & \text{für } e = xy_j \text{ mit } j \in \{0, \dots, i-1\} \\ c_0(e) & \text{sonst;} \end{cases}$$

beachte, daß in jeder dieser Färbungen die gleichen Farben an  $x$  fehlen wie in  $c_0$ .

$\beta$

Es sei nun  $\beta$  eine in  $c_0$  an  $y_k$  fehlende Farbe. Natürlich fehlt  $\beta$  dann auch in  $c_k$  an  $y_k$ . Fehlte  $\beta$  auch an  $x$ , so könnten wir  $c_k$  zu einer Färbung von ganz  $G$  ergänzen, indem wir  $xy_k$  mit  $\beta$  färbten. Die Ecke  $x$  ist also (in jedem  $c_i$ ) mit einer  $\beta$ -Kante inzident. Wegen der Maximalität von  $k$  gibt es daher ein  $i \in \{1, \dots, k-1\}$  mit

$$c_0(xy_i) = \beta.$$

Abb. 4.3.1. Der  $\alpha/\beta$ -Weg  $P$  in  $G_k$ 

Es sei  $P$  der  $\alpha/\beta$ -Weg aus  $y_k$  in  $G_k$  (bezüglich  $c_k$ ; Abb. 4.3.1). Nach (1) endet  $P$  in  $x$  – und zwar mit einer  $\beta$ -Kante, da  $\alpha$  an  $x$  fehlt. Wegen  $\beta = c_0(xy_i) = c_k(xy_{i-1})$  ist dies die Kante  $xy_{i-1}$ . In  $c_0$ , und somit auch in  $c_{i-1}$ , fehlt  $\beta$  jedoch an  $y_{i-1}$ ; es sei  $P'$  der  $\alpha/\beta$ -Weg aus  $y_{i-1}$  in  $G_{i-1}$  (bezüglich  $c_{i-1}$ ). Da  $P'$  eindeutig bestimmt ist, durchläuft  $P'$  zuerst  $y_{i-1}Py_k$ ; beachte, daß die Kanten von  $P\hat{x}$  in  $c_{i-1}$  genauso gefärbt sind wie in  $c_k$ . In  $c_0$ , und daher auch in  $c_{i-1}$ , ist  $y_k$  jedoch mit keiner  $\beta$ -Kante inzident (nach Wahl von  $\beta$ ). Somit endet  $P'$  in  $y_k$ , im Widerspruch zu (1).  $\square$

Der Satz von Vizing teilt die Graphen hinsichtlich ihres chromatischen Indexes in zwei Klassen ein; Graphen  $G$  mit  $\chi'(G) = \Delta(G)$  bezeichnet man häufig als Graphen der *Klasse 1*, Graphen  $G$  mit  $\chi'(G) = \Delta(G) + 1$  als Graphen der *Klasse 2*.

## 4.4 Listenfärbungen

In diesem Abschnitt betrachten wir eine Verallgemeinerung der bislang besprochenen Färbungsprobleme. Gibt man zu jeder Ecke eines Graphen  $G$  eine Liste speziell an dieser Ecke erlaubter Farben vor, so kann man fragen, ob  $G$  eine Eckenfärbung mit Farben aus den jeweiligen Listen besitzt. Analog kann man Kantenfärbungen aus vorgegebenen Listen betrachten.

Ist formal zu  $G = (V, E)$  eine Familie  $(S_v)_{v \in V}$  irgendwelcher Mengen gegeben, so nennen wir eine Eckenfärbung  $c$  von  $G$  mit  $c(v) \in S_v$  für alle  $v \in V$  eine Färbung *aus den Listen*  $S_v$ . Der Graph  $G$  heißt *k-listenfärbbar*, wenn er aus Listen von je  $k$  Farben stets färbbar ist, wenn also zu jeder Familie  $(S_v)_{v \in V}$  mit  $|S_v| = k$  für alle  $v$  eine Eckenfärbung aus den Listen  $S_v$  existiert. Das kleinste  $k \in \mathbb{N}$ , für das  $G$  *k-listenfärbbar* ist, ist die *listenchromatische Zahl*  $ch(G)$  von  $G$ .

Kantenfärbungen aus Listen sind analog definiert. Das kleinste  $k$ , für das  $G$  aus Listen von je  $k$  Farben stets kantenfärbbar ist, ist der



$\text{ch}'(G)$  *listenchromatische Index*  $\text{ch}'(G)$  von  $G$ ; formal definieren wir einfach  $\text{ch}'(G) := \text{ch}(L(G))$  über den Kantengraphen  $L(G)$  von  $G$ .

Zu zeigen, daß ein gegebener Graph  $k$ -listenfärbbar ist, ist im Prinzip schwerer als der Beweis seiner gewöhnlichen  $k$ -Färbbarkeit: letztere ist offenbar gerade der Spezialfall, daß alle Listen gleich sind. Entsprechendes gilt für Kantenfärbungen. Somit haben wir

$$\text{ch}(G) \geq \chi(G) \quad \text{und} \quad \text{ch}'(G) \geq \chi'(G)$$

für alle Graphen  $G$ .

Trotz der obigen (linken) Ungleichung gelten die bekannten allgemeinen oberen Schranken für die chromatische Zahl oftmals auch für die listenchromatische Zahl. Beispiele hierfür sind der Satz von Brooks und Proposition 4.2.2; insbesondere enthalten also auch Graphen hoher listenchromatischer Zahl stets Teilgraphen hohen Minimalgrads. Gleichwohl lassen sich leicht einzelne Graphen  $G$  finden, für die die Werte  $\text{ch}(G)$  und  $\chi(G)$  auseinanderklaffen (Übung); die angesprochene Übertragbarkeit allgemeiner Schranken deutet somit nicht zuletzt darauf hin, wie weit diese Schranken vom tatsächlichen Wert der chromatischen Zahl abweichen können.

Daß die listenchromatische Zahl eine Invariante von grundsätzlich anderem Charakter ist als die chromatische Zahl, zeigt der folgende Satz. Wie bereits erwähnt, gibt es 2-chromatische Graphen mit beliebig hohem Minimalgrad, etwa die Graphen  $K_{n,n}$ . Die listenchromatische Zahl andererseits läßt sich durch hohe Vorgaben für Invarianten wie  $\delta$ ,  $\varepsilon$  oder  $\kappa$  in die Höhe treiben:

**Satz 4.4.1.** (Alon 1993)

*Es existiert eine Funktion  $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ , so daß  $\text{ch}(G) \geq k$  gilt für alle Graphen  $G$  mit Durchschnittsgrad  $d(G) \geq f(k)$ , für alle  $k \in \mathbb{N}$ .*

Der Beweis von Satz 4.4.1 verwendet probabilistische Methoden, wie wir sie in Kapitel 9 kennenlernen werden.

Der eigene Charakter der listenchromatischen Zahl wird durch ein weiteres Phänomen empirisch unterstrichen: selbst in den bereits erwähnten Fällen, wo sich bekannte Schranken für die chromatische Zahl direkt auf die listenchromatische Zahl übertragen lassen, ist der *Beweis* der entsprechenden Aussage oft von ganz anderer Art.

Eines der einfachsten und gleichzeitig eindrucksvollsten Beispiele hierfür ist die Listenversion des Fünffarbensatzes: jeder plättbare Graph ist 5-listenfärbbar. Dies war fast 20 Jahre lang vermutet worden, bis Thomassen 1994 einen ganz einfachen Induktionsbeweis fand. Dieser Beweis benutzt den Fünffarbensatz selbst nicht; wir erhalten diesen somit neu bewiesen als Korollar.

**Satz 4.4.2.** (Thomassen 1994)  
*Jeder ebene Graph ist 5-listenfärbbar.*

*Beweis.* Wir werden die folgende Aussage für alle ebenen Graphen  $G$  mit mindestens drei Ecken beweisen: (3.2.8)

*Ist jedes Innengebiet von  $G$  durch ein Dreieck und sein Außengebiet durch einen Kreis  $C = v_1 \dots v_k v_1$  berandet, ist  $v_1$  bereits mit der Farbe 1 und  $v_2$  mit der Farbe 2 gefärbt, und ist zu jeder anderen Ecke von  $C$  eine Liste von mindestens 3 Farben und zu jeder Ecke von  $G - C$  eine Liste von mindestens 5 Farben gegeben, so ist die Färbung der Ecken  $v_1, v_2$  aus den gegebenen Listen zu einer Färbung von  $G$  erweiterbar.* (\*)

Daß aus (\*) in der Tat die Behauptung des Satzes folgt, sieht man so. Es sei ein beliebiger ebener Graph gegeben, zusammen mit einer Liste von 5 Farben für jede Ecke. Wir erweitern den Graphen durch schrittweises Hinzufügen ebener Kanten zu einem maximal ebenen Graphen  $G$ . Nach Proposition 3.2.8 ist  $G$  ein ebener Dreiecksgraph; es sei  $v_1 v_2 v_3 v_1$  der Rand seines Außengebietes. Wir färben  $v_1$  und  $v_2$  beliebig (unterschiedlich) aus ihren Listen und setzen diese Färbung mit (\*) zu einer Färbung von ganz  $G$  aus den gegebenen Listen fort.

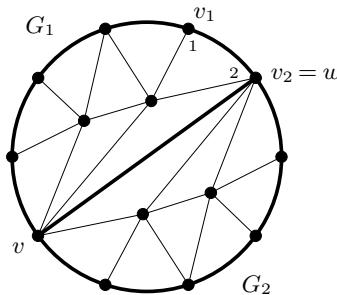


Abb. 4.4.1. Induktionsschritt mit Sehne  $vw$

Wir beweisen jetzt die Aussage (\*), mit Induktion nach  $|G|$ . Ist  $|G| = 3$ , so ist  $G = C$ , und die Behauptung ist trivial. Wir nehmen nun  $|G| \geq 4$  an. Hat  $C$  eine Sehne  $vw$ , so liegt  $vw$  auf zwei eindeutig bestimmten verschiedenen Kreisen  $C_1, C_2 \subseteq C + vw$  mit  $v_1 v_2 \in C_1$  und  $v_1 v_2 \notin C_2$ . Für  $i = 1, 2$  bezeichne  $G_i$  den Untergraphen von  $G$ , der von den Ecken aus  $C_i$  und seinem Innengebiet induziert wird (Abb. 4.4.1). Anwendung der Induktionsannahme, zunächst auf  $G_1$  und dann – mit den dadurch für  $v$  und  $w$  vorgegebenen Farben – auf  $G_2$ , ergibt eine Färbung von  $G$  wie gewünscht.

Hat  $C$  keine Sehne, so seien  $v_1, u_1, \dots, u_m, v_{k-1}$  die Nachbarn von  $v_k$  in ihrer natürlichen Reihenfolge (wie im ersten Beweis des  $u_1, \dots, u_m$

Fünffarbensatzes); all diese Nachbarn  $u_i$  liegen im Innengebiet von  $C$  (Abb. 4.4.2). Da jedes Innengebiet von  $G$  durch ein Dreieck berandet ist, ist  $P := v_1u_1 \dots u_mv_{k-1}$  ein Weg in  $G$ , und  $C' := P \cup (C - v_k)$  ein Kreis.

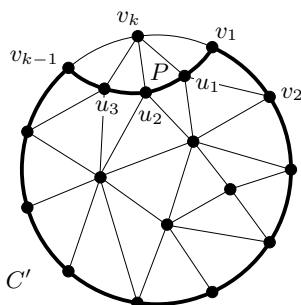
 $C'$ 

Abb. 4.4.2. Induktionsschritt ohne Sehne

Wir wählen zwei verschiedene Farben  $j, \ell \neq 1$  aus der Liste von  $v_k$  und streichen diese Farben aus den Listen aller Ecken  $u_i$ . Jede Liste einer Ecke von  $C'$  hat dann noch mindestens 3 Farben, und so können wir  $C'$  samt den Ecken in seinem Innengebiet, also den Graphen  $G - v_k$ , nach Induktionsannahme färben. Mindestens eine der beiden Farben  $j, \ell$  wird dabei nicht für  $v_{k-1}$  verwendet, und mit dieser Farbe färben wir  $v_k$ .  $\square$

Der Trick des obigen Beweises liegt, wie nicht selten bei Induktionsbeweisen, in einer fein ausbalancierten technischen Verschärfung der zu beweisenden Aussage. Interessanterweise kommt der Beweis sowohl ohne typische Färbeargumente aus (wie etwa die Umfärbung entlang zweifarbiger Wege) als auch ohne die im klassischen Beweis des Fünffarbensatzes implizite Eulerformel. Dies legt den Gedanken nahe, daß es auch bei ungelösten Färbungsproblemen zuweilen vorteilhaft sein könnte, eine Aussage der Form  $\text{ch}(G) \leq k$  zu beweisen statt der formal schwächeren Aussage  $\chi(G) \leq k$ . Leider gilt dies jedoch nicht für das Vierfarbenproblem: plättbare Graphen sind *nicht* generell 4-listenfärbbar.

Wie wir gesehen haben, können die listenchromatische Zahl eines Graphen und seine chromatische Zahl beliebig weit auseinanderklaffen. Umso erstaunlicher ist es, daß für Kantenfärbungen kein entsprechendes Beispiel bekannt ist. Es wird sogar vermutet, daß es keines gibt:

**Listenfärbungsvermutung.** Für jeden Graphen  $G$  gilt  $\text{ch}'(G) = \chi'(G)$ .

Wir werden die Listenfärbungsvermutung für bipartite Graphen beweisen. Der Beweis verwendet als Hilfsmittel Orientierungen von Graphen; siehe Kapitel 0.10. Ist  $D$  ein gerichteter Graph und  $v \in V(D)$ , so

bezeichne  $N^+(v)$  die Menge und  $d^+(v)$  die Anzahl der Ecken  $w$ , für die  $D$  eine von  $v$  nach  $w$  gerichtete Kante enthält.

$N^+(v)$   
 $d^+(v)$

Um zu sehen, wie Orientierungen im Zusammenhang mit Färbungsproblemen ins Spiel kommen, betrachten wir noch einmal den Greedy-Algorithmus aus Abschnitt 4.2. Um den Algorithmus auf einen Graphen  $G$  anzuwenden, müssen wir zunächst eine Eckenaufzählung  $v_1, \dots, v_n$  von  $G$  festlegen. Diese Aufzählung definiert dann eine Orientierung von  $G$ : wir richten einfach jede Kante  $v_i v_j$  "rückwärts", also von  $v_i$  nach  $v_j$  falls  $i > j$  ist. Wenn der Algorithmus nun eine Ecke  $v_i$  färbt, berücksichtigt er nur diejenigen Kanten an  $v_i$ , die von  $v_i$  fortgerichtet sind: gilt  $d^+(v) < k$  für alle Ecken  $v$ , so verwendet er höchstens  $k$  Farben. Die erste durch den Greedy-Algorithmus festgelegte Farbklasse  $U$  hat überdies die folgende Eigenschaft: sie ist eine unabhängige Eckenmenge, in die jede andere Ecke eine (gerichtete) Kante schickt. Die zweite Farbklasse hat dann die gleiche Eigenschaft in  $G - U$ , und so weiter.

Das folgende Lemma verallgemeinert diesen Ansatz auf Orientierungen  $D$  von  $G$ , die nicht notwendig durch eine Eckenaufzählung definiert sind, sondern auch gewisse gerichtete Kreise enthalten dürfen. Dazu nennen wir eine unabhängige Eckenmenge  $U$  in  $D$  einen *Kern* von  $D$ , wenn  $D$  zu jeder Ecke  $v \in D - U$  eine  $v-U$ -Kante enthält, die von  $v$  nach  $U$  gerichtet ist. Beachte, daß für  $D \neq \emptyset$  auch ein Kern von  $D$  nie leer ist.

Kern

**Lemma 4.4.3.** *Es sei  $H$  ein Graph und  $(S_v)_{v \in V(H)}$  eine Familie von Farblisten. Besitzt  $H$  eine Orientierung  $D$  mit  $d^+(v) < |S_v|$  für jede Ecke  $v$ , so daß jeder Untergraph von  $D$  einen Kern hat, dann ist  $H$  aus den Listen  $S_v$  färbbar.*

*Beweis.* Wir verwenden Induktion nach  $|H|$ . Für  $|H| = 0$  ist  $\emptyset$  stets eine geeignete Färbung. Zum Induktionsschritt sei nun  $|H| > 0$ . Es sei  $\alpha$  eine der in den Listen  $S_v$  vorkommenden Farben, und  $D$  eine Orientierung von  $H$  mit den genannten Eigenschaften. Die Ecken  $v \in H$  mit  $\alpha \in S_v$  spannen in  $D$  einen nicht leeren Untergraphen  $D'$  auf. Nach Voraussetzung hat  $D'$  einen Kern  $U$ ; auch  $U$  ist nicht leer.

Wir färben jede Ecke aus  $U$  mit der Farbe  $\alpha$  und entfernen  $\alpha$  aus den Listen  $S_v$  der Ecken  $v \in D' - U$ . Da jede dieser Ecken  $v$  eine Kante nach  $U$  schickt, erfüllt mit den so modifizierten Listen  $S'_v$  dann auch der gerichtete Graph  $D - U$  die Bedingung  $d^+(v) < |S'_v|$  für alle Ecken  $v \in D - U$ . Da  $D - U$  eine Orientierung von  $H - U$  ist, ist  $H - U$  nach Induktionsannahme aus den modifizierten Listen färbbar. Da keine dieser Listen mehr die Farbe  $\alpha$  enthält, ergänzt diese Färbung unsere Färbung  $U \rightarrow \{\alpha\}$  zur gewünschten Listenfärbung von  $H$ .  $\square$

**Satz 4.4.4.** (Galvin 1995)

Für jeden bipartiten Graphen  $G$  gilt  $\text{ch}'(G) = \chi'(G)$ .

$k$  *Beweis.* Es sei  $G = (V, E)$  und  $\chi'(G) =: k$ . Wie immer gilt  $\text{ch}'(G) \geq k$ ; wir beweisen  $\text{ch}'(G) \leq k$ . Wir zeigen mit Lemma 4.4.3, daß der Kantengraph  $H$  von  $G$   $k$ -listenfärbbar ist. Dazu reicht es, eine Orientierung  $D$  von  $H$  zu finden mit  $d^+(v) < k$  für jede Ecke  $v$ , so daß jeder Untergraph von  $D$  einen Kern hat.

$c$  Es sei  $c: E \rightarrow \{1, \dots, k\}$  eine fest gewählte Kantenfärbung von  $G$ .  
 $X, Y$  Nach Annahme ist  $G$  bipartit, etwa mit Eckenpartition  $\{X, Y\}$ . Wir sagen, daß zwei Kanten von  $G$  sich *in  $X$  treffen*, wenn sie eine Ecke aus  $X$  gemeinsam haben. Für  $Y$  formulieren wir entsprechend. Zur  
 $D$  Definition von  $D$  betrachten wir zwei benachbarte  $e, e' \in E$ , etwa mit  $c(e) < c(e')$ . Treffen  $e$  und  $e'$  sich in  $X$ , so richten wir die Kante  $ee' \in H$  von  $e'$  nach  $e$ . Treffen  $e$  und  $e'$  sich in  $Y$ , so richten wir die Kante  $ee' \in H$  von  $e$  nach  $e'$  (Abb. 4.4.3).

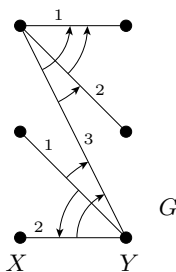


Abb. 4.4.3. Eine Orientierung des Kantengraphen von  $G$

Wie groß ist jetzt  $d^+(e)$  zu gegebenem  $e \in E = V(D)$ ? Ist etwa  $c(e) = i$ , so trägt jedes  $e' \in N^+(e)$ , das  $e$  in  $X$  trifft, eine Farbe aus  $\{1, \dots, i-1\}$ . Analog trägt jedes  $e' \in N^+(e)$ , das  $e$  in  $Y$  trifft, eine Farbe aus  $\{i+1, \dots, k\}$ . Da zwei Nachbarn  $e'$  von  $e$ , die  $e$  beide in  $X$  oder beide in  $Y$  treffen, auch zueinander benachbart sind und somit verschieden gefärbt, gilt damit  $d^+(e) < k$  wie gewünscht.

$D'$  Es bleibt zu zeigen, daß jeder Untergraph  $D'$  von  $D$  einen Kern hat.  
 $E'$  Wir zeigen dies mit Induktion nach  $|D'|$ . Für  $D' = \emptyset$  ist  $\emptyset$  ein Kern; es sei also  $|D'| \geq 1$ . Es sei  $E' := V(D') \subseteq E$ . Für jedes  $x \in X$  sei  $e_x$  die mit  $x$  inzidente Kante  $e \in E'$  mit minimalem  $c(e)$  (falls  $E'$  eine solche Kante enthält); die Menge all dieser Kanten  $e_x$  bezeichnen wir mit  $U$ . Jede Kante  $e' \in E' \setminus U$  trifft dann ein  $e \in U$  in  $X$ , und die Kante  $ee' \in D'$  ist von  $e'$  nach  $e$  gerichtet. Falls  $U$  unabhängig ist, ist  $U$  somit ein Kern von  $D'$ , und wir sind fertig; wir dürfen also annehmen, daß  $U$  nicht unabhängig ist.

$e, e'$  Es seien  $e, e' \in U$  benachbart, etwa mit  $c(e) < c(e')$ . Nach Definition von  $U$  treffen  $e$  und  $e'$  sich in  $Y$ ; die Kante  $ee' \in D'$  ist somit von  $e$  nach  $e'$  gerichtet. Nach Induktionsannahme hat  $D' - e$  einen Kern  $U'$ . Ist  $e' \in U'$ , so ist  $U'$  auch ein Kern von  $D'$ , und wir sind fertig. Anderenfalls existiert ein  $e'' \in U'$ , so daß  $D'$  eine von  $e'$  nach  $e''$  gerichtete Kante

enthält. Träfen  $e'$  und  $e''$  sich in  $X$ , so gälte  $c(e'') < c(e')$  nach Definition von  $D$ , im Widerspruch zu  $e' \in U$ . Somit treffen  $e'$  und  $e''$  sich in  $Y$ , und es gilt  $c(e') < c(e'')$ . Da sich auch  $e$  und  $e'$  in  $Y$  treffen, treffen sich dann auch  $e$  und  $e''$  in  $Y$ , und es gilt  $c(e) < c(e') < c(e'')$ . Die Kante  $ee''$  ist damit von  $e$  nach  $e''$  gerichtet, und  $U'$  wiederum als Kern von  $D'$  erwiesen.  $\square$

Zusammen mit Proposition 4.3.1 erhalten wir:

(4.3.1)

**Korollar 4.4.5.** Für jeden bipartiten Graphen  $G$  gilt  $\text{ch}'(G) = \Delta(G)$ .  $\square$

## 4.5 Perfekte Graphen

Wie bereits in Abschnitt 4.2 angedeutet, kann eine hohe chromatische Zahl als rein globales Phänomen auftreten: selbst wenn ein Graph  $G$  hohe Taillenweite hat, lokal also überall wie ein Baum aussieht, kann  $\chi(G)$  beliebig hoch sein. Umgekehrt stellt sich die Frage, wie Graphen aussehen, in denen dieses globale Phänomen nirgends auftritt.

Bevor wir diese Frage präzisieren, erinnern wir an zwei Definitionen: mit  $\alpha(G)$  bezeichnen wir die größte Mächtigkeit einer unabhängigen Eckenmenge in  $G$ , mit  $\omega(G)$  das größte  $n$  mit  $K^n \subseteq G$ . Offenbar ist  $\alpha(G) = \omega(\overline{G})$  und  $\omega(G) = \alpha(\overline{G})$ .

 $\alpha(G)$   
 $\omega(G)$ 

Ein Graph  $G$  heißt *perfekt*, wenn jeder Untergraph  $H \subseteq G$  die chromatische Zahl  $\chi(H) = \omega(H)$  hat, wenn also die triviale untere Schranke von  $\omega(H)$  Farben stets ausreicht, um die Ecken von  $H$  zu färben. Während für einen beliebigen Graphen  $G$  der Nachweis einer Aussage der Form  $\chi(G) > k$ , also der Nichtfärbbarkeit mit einer gegebenen Anzahl von Farben, schwierig werden kann, existiert somit bei perfekten Graphen (und ihren Untergraphen) dafür stets ein einfaches ‘‘Zertifikat’’ in Form eines geeigneten  $K^{k+1} \subseteq G$ .

perfekt

Die Klasse der perfekten Graphen hat auf den ersten Blick keine besonders natürliche Struktur: nach Definition ist sie zwar abgeschlossen unter der Bildung von Untergraphen (wenn auch nur ‘‘erzwungenermaßen’’), nicht aber unter allgemeiner Teilgraphenbildung oder Kantenkontraktion (Beispiele?). Gleichwohl ist die Perfektion ein zentraler Begriff der Graphentheorie; die Tatsache, daß eine Reihe wichtiger Graphenklassen – scheinbar zufällig – perfekt sind, ist hierfür nur ein oberflächlich sichtbares Symptom.<sup>1</sup>

<sup>1</sup> Die Klasse der perfekten Graphen hat Dualitätseigenschaften, die tiefe Beziehungen etwa zur Optimierung und Komplexitätstheorie aufweisen und noch nicht völlig verstanden sind. Satz 4.5.3 läßt einen Hauch davon erahnen; mehr dazu findet der interessierte Leser in dem in den Notizen zitierten einführenden Übersichtsartikel von Lovász.

Was für Graphen sind also beispielsweise perfekt? Bipartite Graphen etwa sind es, trivialerweise. Daß das Komplement eines bipartiten Graphen stets perfekt ist, ist äquivalent zum Überdeckungssatz 1.1.1 von König (Übung). Sogenannte *Vergleichbarkeitsgraphen* sind perfekt, desgleichen *Intervallgraphen* (siehe Übungen); beide Klassen von Graphen treten in zahlreichen Anwendungen auf.

chordal

Wir betrachten hier beispielhaft nur eine Klasse perfekter Graphen, die sogenannten chordalen Graphen. Ein Graph heißt *chordal* (oder *trianguliert*), wenn er keinen induzierten Kreis der Länge  $\geq 4$  enthält, wenn also jeder seiner Kreise der Länge  $\geq 4$  eine Sehne hat. Um zu zeigen, daß chordale Graphen perfekt sind, charakterisieren wir zunächst die Struktur dieser Graphen. Ist  $G$  ein Graph mit Untergraphen  $G_1$ ,  $G_2$  und  $S$ , so daß  $G = G_1 \cup G_2$  und  $S = G_1 \cap G_2$  ist, so sagen wir,  $G$  entstehe aus  $G_1$  und  $G_2$  durch *Zusammenkleben entlang  $S$* .

Zusammenkleben

[10.3.10] **Proposition 4.5.1.** *Ein Graph ist genau dann chordal, wenn er rekursiv durch Zusammenkleben entlang vollständiger Untergraphen konstruiert werden kann, ausgehend von vollständigen Graphen.*

*Beweis.* Entsteht  $G$  aus zwei chordalen Graphen  $G_1, G_2$  durch Zusammenkleben entlang eines vollständigen Graphen, so ist  $G$  offenbar selbst chordal: jeder in  $G$  induzierte Kreis liegt ganz in  $G_1$  oder ganz in  $G_2$  und hat deshalb keine Länge  $\geq 4$ . Da vollständige Graphen trivialerweise chordal sind, sind es damit auch alle wie angegeben konstruierbaren Graphen.

Umgekehrt sei  $G$  ein chordaler Graph. Wir zeigen mit Induktion nach  $|G|$ , daß  $G$  wie angegeben konstruierbar ist. Ist  $G$  vollständig, so ist dies trivial. Nun sei  $G$  nicht vollständig, insbesondere  $|G| > 1$ , und jeder chordale Graph mit weniger als  $|G|$  Ecken sei wie angegeben konstruierbar. Es seien  $a, b \in G$  zwei nicht benachbarte Ecken, und  $X \subseteq V(G) \setminus \{a, b\}$  ein minimaler  $a$ - $b$ -Trenner. Weiter sei  $C$  die Komponente von  $G - X$ , die  $a$  enthält,  $G_1 := G[V(C) \cup X]$ , und  $G_2 := G - C$ . Dann entsteht  $G$  aus  $G_1$  und  $G_2$  durch Zusammenkleben entlang  $S := G[X]$ .

$a, b, X$   
 $C$   
 $G_1, G_2$   
 $S$

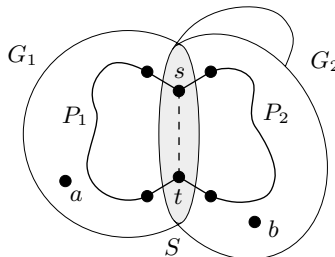


Abb. 4.5.1. Mit  $G_1$  und  $G_2$  ist auch  $G$  chordal

Da  $G_1$  und  $G_2$  als Untergraphen von  $G$  chordal sind und somit nach Induktionsannahme konstruierbar, reicht es zu zeigen, daß  $S$  vollständig ist. Angenommen,  $s, t \in S$  seien zwei nicht benachbarte Ecken. Wegen der Minimalität von  $X = V(S)$  als  $a$ - $b$ -Trenner haben  $s$  und  $t$  beide einen Nachbarn in  $C$ . In  $G_1$  existiert somit ein  $X$ -Weg von  $s$  nach  $t$ ; es sei  $P_1$  ein kürzester solcher Weg. Analog enthält  $G_2$  einen kürzesten  $X$ -Weg  $P_2$  von  $s$  nach  $t$ . Damit ist  $P_1 \cup P_2$  ein sehnloser Kreis der Länge  $\geq 4$  (Abb. 4.5.1), im Widerspruch zur Chordalität von  $G$ .  $\square$

$s, t$

**Proposition 4.5.2.** *Jeder chordale Graph ist perfekt.*

*Beweis.* Da vollständige Graphen perfekt sind, reicht es nach Proposition 4.5.1, zu zeigen, daß ein durch Zusammenkleben perfekter Graphen  $G_1, G_2$  entlang eines vollständigen Graphen  $S$  entstandener Graph  $G$  wiederum perfekt ist. Dazu sei  $H \subseteq G$  ein beliebiger Untergraph; wir zeigen  $\chi(H) \leq \omega(H)$ .

$G_1, G_2, S$   
 $G, H$

Es sei  $H_i := H \cap G_i$  für  $i = 1, 2$  und  $T := H \cap S$ . Dann ist  $T$  wiederum vollständig, und  $H$  entsteht aus  $H_1$  und  $H_2$  durch Zusammenkleben entlang  $T$ . Als Untergraph von  $G_i$  ist  $H_i$  jeweils mit  $\omega(H_i)$  Farben färbbar. Da  $T$  vollständig ist und somit stets injektiv gefärbt, lassen sich zwei solche Färbungen (eine von  $H_1$  und eine von  $H_2$ ) stets zu einer Färbung von  $H$  mit  $\max\{\omega(H_1), \omega(H_2)\} \leq \omega(H)$  Farben zusammensetzen, wenn nötig durch Permutation der Farben in einer der beiden Teilfärbungen.  $\square$

$H_1, H_2, T$

Wir kommen nun zum Hauptsatz der Theorie der perfekten Graphen:

**Satz 4.5.3.** (Lovász 1972)

*Ein Graph ist genau dann perfekt, wenn sein Komplement es ist.*

Dem Beweis des Satzes schicken wir ein einfaches Lemma voraus. Es sei  $G$  ein Graph,  $x \in G$  eine Ecke, und der Graph  $G'$  entstehe aus  $G$  durch Hinzufügung einer neuen Ecke  $x'$  und aller Kanten  $x'y$  mit  $y \in \{x\} \cup N_G(x)$ . Wir sagen,  $G'$  sei aus  $G$  durch *Eckenverdopplung* entstanden (Abb. 4.5.2).

*Eckenverdopplung*

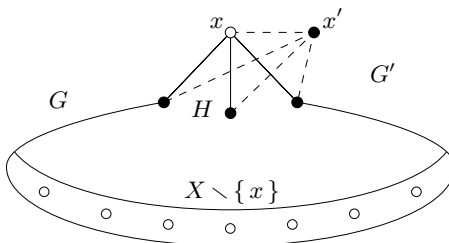


Abb. 4.5.2. Verdopplung der Ecke  $x$



**Lemma 4.5.4.** *Ist  $G$  perfekt, und  $G'$  aus  $G$  durch Eckenverdopplung entstanden, so ist auch  $G'$  perfekt.*

*Beweis.* Wir verwenden Induktion nach  $|G|$ . Für  $|G| = 1$  ist  $G' = K^2$ , und  $K^2$  ist perfekt. Zum Induktionsschritt sei nun  $G$  perfekt und nicht trivial. Es sei  $x \in G$  die zu  $x' \in G'$  verdoppelte Ecke. Zum Beweis, daß auch  $G'$  perfekt ist, ist lediglich  $\chi(G') \leq \omega(G')$  zu zeigen: jeder echte Untergraph  $H$  von  $G'$  ist entweder isomorph zu einem Untergraphen von  $G$  oder durch Eckenverdopplung aus einem echten Untergraphen von  $G$  entstanden; in beiden Fällen ist  $H$  nach Voraussetzung und Induktionsannahme perfekt und daher mit  $\omega(H)$  Farben färbbar.

Es sei  $\omega(G) =: \omega$ ; dann ist  $\omega(G') \in \{\omega, \omega + 1\}$ . Ist  $\omega(G') = \omega + 1$ , so gilt

$$\chi(G') \leq \chi(G) + 1 = \omega + 1 = \omega(G')$$

und wir sind fertig. Es gelte also  $\omega(G') = \omega$ . Dann liegt  $x$  in keinem  $K^\omega \subseteq G'$ : zusammen mit  $x'$  ergäbe dieser sonst einen  $K^{\omega+1}$  in  $G'$ . Wir färben  $G$  nun mit  $\omega$  Farben. Da jeder  $K^\omega \subseteq G$  die Farbklasse  $X$  von  $x$  aber nicht  $x$  selbst trifft, gilt  $\omega(H) < \omega$  für  $H := G - (X \setminus \{x\})$ ; siehe Abb. 4.5.2. Da  $G$  perfekt ist, hat  $H$  eine Färbung mit  $\omega - 1$  Farben. Mit  $X$  ist aber auch die Menge  $(X \setminus \{x\}) \cup \{x'\} = V(G' - H)$  unabhängig, und so können wir diese  $(\omega - 1)$ -Färbung von  $H$  zu einer  $\omega$ -Färbung von  $G'$  ergänzen. Damit gilt  $\chi(G') \leq \omega = \omega(G')$  wie gewünscht.  $\square$

**Beweis von Satz 4.5.3.** Wir zeigen mit Induktion nach  $|G|$ , daß für jeden perfekten Graphen  $G = (V, E)$  auch  $\overline{G}$  perfekt ist. Für  $|G| = 1$  ist dies klar; zum Induktionsschritt sei jetzt  $|G| \geq 2$ . Es sei  $\mathcal{K}$  die Menge aller Eckenmengen vollständiger Teilgraphen von  $G$ . Weiter sei  $\alpha(G) =: \alpha$ , und  $\mathcal{A}$  bezeichne die Menge aller unabhängigen Eckenmengen  $A$  in  $G$  mit  $|A| = \alpha$ .

Jeder echte Untergraph von  $\overline{G}$  ist als Komplement eines echten Untergraphen von  $G$  nach Induktionsannahme perfekt; wir müssen zum Nachweis der Perfektion von  $\overline{G}$  also nur  $\chi(\overline{G}) \leq \omega(\overline{G}) (= \alpha)$  nachweisen. Wir zeigen dazu, daß es ein  $K \in \mathcal{K}$  gibt mit  $K \cap A \neq \emptyset$  für alle  $A \in \mathcal{A}$ ; dann gilt

$$\omega(\overline{G} - K) = \alpha(G - K) < \alpha = \omega(\overline{G}),$$

und daher nach Induktionsannahme

$$\chi(\overline{G}) \leq \chi(\overline{G} - K) + 1 = \omega(\overline{G} - K) + 1 \leq \omega(\overline{G})$$

wie gewünscht.

Nehmen wir also an, es gäbe kein solches  $K$ ; zu jedem  $K \in \mathcal{K}$  existiert dann ein  $A_K \in \mathcal{A}$  mit  $A_K \cap K = \emptyset$ . Wir ersetzen in  $G$  jede Ecke  $x$  durch einen vollständigen Graphen  $G_x$  der Ordnung

$$k(x) := |\{K \in \mathcal{K} \mid x \in A_K\}|$$

 $x, x'$  $\omega$  $X$   
 $H$  $G = (V, E)$   
 $\mathcal{K}$   
 $\alpha, \mathcal{A}$  $A_K$   
 $G_x$  $k(x)$

und verbinden für benachbarte  $x, y \in V$  jeweils alle Ecken aus  $G_x$  mit allen Ecken aus  $G_y$ . Der entstandene Graph  $G'$  hat dann die Eckenmenge  $\bigcup_{x \in V} V(G_x)$ , und zwei Ecken  $v \in G_x$  und  $w \in G_y$  sind in  $G'$  genau dann benachbart, wenn entweder  $x = y$  gilt oder  $x \neq y$  und  $xy \in E$ . Für  $U := \{x \in V \mid k(x) > 0\}$  ist  $G'$  isomorph zu einem aus  $G[U]$  durch sukzessive Eckenverdopplung konstruierten Graphen. Da  $G[U]$  als Untergraph von  $G$  perfekt ist, ist nach Lemma 4.5.4 auch  $G'$  perfekt. Insbesondere gilt also

$$\chi(G') \leq \omega(G'). \quad (1)$$

Um (1) zum Widerspruch zu führen, berechnen wir jetzt nacheinander  $\omega(G')$  und  $\chi(G')$ . Nach Konstruktion von  $G'$  hat jeder maximale vollständige Teilgraph von  $G'$  die Form  $G'[\bigcup_{x \in X} G_x]$  für ein  $X \in \mathcal{K}$ . Für ein geeignetes  $X \in \mathcal{K}$  gilt also

$$\begin{aligned} \omega(G') &= \sum_{x \in X} k(x) \\ &= |\{(x, K) : x \in X, K \in \mathcal{K}, x \in A_K\}| \\ &= \sum_{K \in \mathcal{K}} |X \cap A_K| \\ &\leq |\mathcal{K}| - 1; \end{aligned} \quad (2)$$

die letzte Ungleichung folgt aus der Tatsache, daß  $|X \cap A_K| \leq 1$  ist für alle  $K$  (da  $A_K$  unabhängig ist und  $G[X]$  vollständig), und  $|X \cap A_X| = 0$  (nach Wahl von  $A_X$ ). Andererseits gilt

$$\begin{aligned} |G'| &= \sum_{x \in V} k(x) \\ &= |\{(x, K) : x \in V, K \in \mathcal{K}, x \in A_K\}| \\ &= \sum_{K \in \mathcal{K}} |A_K| \\ &= |\mathcal{K}| \cdot \alpha. \end{aligned}$$

Da  $\alpha(G') \leq \alpha$  ist nach Konstruktion von  $G'$ , gilt somit

$$\chi(G') \geq \frac{|G'|}{\alpha(G')} \geq \frac{|G'|}{\alpha} = |\mathcal{K}|. \quad (3)$$

Aus (2) und (3) zusammen erhalten wir

$$\chi(G') \geq |\mathcal{K}| > |\mathcal{K}| - 1 \geq \omega(G'),$$

im Widerspruch zu (1). □

Da nach Definition der Perfektion jeder Untergraph eines perfekten Graphen perfekt ist, ist die Eigenschaft der Perfektion durch verbotene Untergraphen charakterisierbar: es existiert eine Menge  $\mathcal{H}$  nicht perfekter Graphen mit der Eigenschaft, daß ein Graph genau dann perfekt ist, wenn er keinen zu einem Element von  $\mathcal{H}$  isomorphen Untergraphen hat. (Wir könnten etwa als  $\mathcal{H}$  die Menge aller nicht perfekten Graphen mit Ecken in  $\mathbb{N}$  wählen.)

Ein offensichtliches Ziel ist es nun,  $\mathcal{H}$  möglichst klein zu halten. Eine der bekanntesten Vermutungen der Graphentheorie besagt, daß  $\mathcal{H}$  lediglich alle Kreise ungerader Länge  $\geq 5$  enthalten muß (die offensichtlich nicht perfekt sind) und die Komplemente solcher Kreise (die nach Satz 4.5.3 damit auch nicht perfekt sind). Oder leicht umformuliert:

**Perfect Graph Conjecture.** (Berge 1966)

*Ein Graph  $G$  ist genau dann perfekt, wenn weder  $G$  noch  $\overline{G}$  einen Kreis ungerader Länge  $\geq 5$  als Untergraphen enthält.*

Offenbar impliziert diese Vermutung ihrerseits Satz 4.5.3; auch dieser war ursprünglich von Berge vermutet worden.<sup>2</sup>

Graphen, die weder einen Kreis ungerader Länge  $\geq 5$  noch das Komplement eines solchen Kreises als Untergraph enthalten, nennt man auch Berge-Graphen; dessen obige Vermutung besagt also gerade, daß alle Berge-Graphen perfekt sind. Dies ist näherungsweise von Prömel & Steger (1992) nachgewiesen worden: sie zeigten, daß der Anteil der perfekten Graphen an der Gesamtheit der Berge-Graphen gegebener Ordnung für wachsende Ordnung gegen eins geht.

## Übungen

- 1.<sup>-</sup> Zeige, daß eine positive Lösung des Vierfarbenproblems für Landkarten (wie zu Beginn des Kapitels formuliert) in der Tat äquivalent ist zur Aussage des Vierfarbensatzes (daß jeder ebene Graph 4-färbbar ist).
- 2.<sup>-</sup> Zeige, daß es für das Vierfarbenproblem ausreicht, Landkarten ohne ( $\geq 4$ )-Länderecks zu betrachten – also solche, bei denen jeder Punkt auf dem Rand höchstens dreier Länder liegt.
3. Versuche, den Beweis des Fünffarbensatzes in einen Beweis des Vierfarbensatzes umzuwandeln, wie folgt. Definiere  $v$  und  $H$  wie gehabt, nimm induktiv an, daß  $H$  eine 4-Färbung habe, und folge dann wieder dem Beweis des Fünffarbensatzes. Wo geht dies schief?
4. Leite die chromatische Zahl eines Graphen aus den chromatischen Zahlen seiner Blöcke her.

---

<sup>2</sup> Satz 4.5.3 galt bis zu seinem Beweis als die schwache, die obige Vermutung als die starke Version der *Perfect Graph Conjecture*.

5. <sup>-</sup> Zeige, daß jeder Graph  $G$  eine Eckenaufzählung hat, mit der der Greedy-Algorithmus nur  $\chi(G)$  Farben benötigt.
6. Finde zu jedem  $n > 1$  einen bipartiten Graphen mit  $2n$  Ecken, für den der Greedy-Algorithmus bei (un)geeigneter Eckenaufzählung  $n$  statt 2 Farben benötigt.
7. Betrachte das folgende Verfahren zur Eckenfärbung: finde zunächst eine maximale unabhängige Eckenmenge und färbe diese mit der ersten Farbe; finde dann im Restgraphen eine maximale unabhängige Eckenmenge und färbe diese mit der zweiten Farbe, usw. Vergleiche diesen Algorithmus mit dem Greedy-Algorithmus aus dem Text: welcher ist besser?
8. Zeige, daß die Schranke aus Proposition 4.2.2 für keinen Graphen schlechter ist als die aus Proposition 4.2.1.
9. Finde eine Funktion  $f$ , so daß jeder Graph der Arborizität mindestens  $f(k)$  eine Reihenzahl von mindestens  $k$  hat, und eine Funktion  $g$ , so daß jeder Graph der Reihenzahl mindestens  $g(k)$  eine Arborizität von mindestens  $k$  hat (für alle  $k \in \mathbb{N}$ ).
10. <sup>-</sup> Ein  $k$ -chromatischer Graph  $G$  heißt *kritisch*  $k$ -chromatisch, wenn  $G - v$  für jede Ecke  $v \in G$  mit weniger als  $k$  Farben färbbar ist. Zeige, daß jeder  $k$ -chromatische Graph einen kritisch  $k$ -chromatischen Untergraphen hat, und daß der Minimalgrad jedes solchen Untergraphen mindestens  $k - 1$  beträgt.
11. Bestimme alle kritisch 3-chromatischen Graphen.
12. <sup>+</sup> Zeige, daß jeder kritisch  $k$ -chromatische Graph  $(k - 1)$ -kantenzusammenhängend ist.
13. Finde zu jedem  $k \in \mathbb{N}$  eine Konstante  $c_k > 0$ , so daß jeder Graph  $G$  der Ordnung  $\geq 3k$  und Unabhängigkeitszahl  $\alpha(G) \leq k$  einen Kreis der Länge  $\geq c_k |G|$  enthält.
14. <sup>-</sup> Finde einen Graphen  $G$ , für den der Satz von Brooks eine wesentlich schlechtere Abschätzung für  $\chi(G)$  ergibt als Proposition 4.2.2.
15. <sup>+</sup> Führe den Satz von Brooks auf den Fall zurück, daß  $G$  2-zusammenhängend und  $\Delta(G) \geq 3$  ist. Beweise diesen Fall dann anhand der folgenden beiden Hilfsaussagen.
  - (i) Es sei  $v_1, \dots, v_n$  eine Eckenaufzählung von  $G$ . Hat jedes  $v_i$  ( $i < n$ ) einen Nachbarn  $v_j$  mit  $j > i$ , ist weiter  $v_1 v_n, v_2 v_n \in E(G)$  und  $v_1 v_2 \notin E(G)$ , so benötigt der Greedy-Algorithmus höchstens  $\Delta(G)$  Farben.
  - (ii) Ist  $G$  nicht vollständig, und ist  $v_n \in G$  eine Ecke maximalen Grades, so hat  $v_n$  Nachbarn  $v_1, v_2$  wie in (i).
16. Für einen Graphen  $G$  und  $k \in \mathbb{N}$  bezeichne  $P_G(k)$  die Anzahl der möglichen Eckenfärbungen  $V(G) \rightarrow \{1, \dots, k\}$  von  $G$ . Zeige, daß  $P_G$  ein Polynom in  $k$  vom Grad  $n := |G|$  ist, bei dem  $k^n$  den Koeffizienten 1 hat und  $k^{n-1}$  den Koeffizienten  $-||G||$ . (Man nennt  $P_G$  das *chromatische Polynom* von  $G$ ).

- (Tip: Induktion nach  $\|G\|$ . Zum Induktionsschritt vergleiche die Größen  $P_G(k)$ ,  $P_{G-e}(k)$  und  $P_{G/e}(k)$ .)
- 17.<sup>+</sup> Bestimme die Klasse aller Graphen  $G$  mit  $P_G(k) = k(k-1)^{n-1}$ . (Wie in der vorigen Übung sei  $n := |G|$ , und  $P_G$  bezeichne das chromatische Polynom von  $G$ .)
  18. Ersetze in der Definition von “ $k$ -konstruierbar” die Operation (ii) durch (ii)' *Jeder Obergraph eines  $k$ -konstruierbaren Graphen ist  $k$ -konstruierbar*, und die Hajós-Operation (iii) durch die Operation (iii)' *Sind  $x, y_1, y_2 \in V(G)$  mit  $y_1y_2 \in E(G)$  und  $xy_1, xy_2 \notin E(G)$ , und ist sowohl  $G + xy_1$  als auch  $G + xy_2$   $k$ -konstruierbar, dann ist auch  $G$   $k$ -konstruierbar*. Zeige, daß bezüglich der neuen Definition ein Graph genau dann  $k$ -konstruierbar ist, wenn seine chromatische Zahl mindestens  $k$  ist.
  19. Bestimme den chromatischen Index des Petersen-Graphen (Abb. 5.6.1).
  - 20.<sup>-</sup> Eine  $n \times n$ -Matrix mit Einträgen aus  $\{1, \dots, n\}$  heißt *Lateinisches Quadrat*, wenn jedes  $i \in \{1, \dots, n\}$  in jeder Spalte und jeder Zeile genau einmal auftritt. Führe die Konstruktion Lateinischer Quadrate auf ein Färbungsproblem zurück.
  21. Zeige ohne Proposition 4.3.1, daß  $\chi'(G) = k$  gilt für jeden  $k$ -regulären bipartiten Graphen  $G$ .
  22. Beweise Proposition 4.3.1 aus der Aussage der vorigen Übung.
  - 23.<sup>+</sup> Zeige, daß es zu jedem  $k \in \mathbb{N}$  einen  $k$ -chromatischen Graphen gibt, der kein Dreieck enthält.
  - 24.<sup>-</sup> Zeige (ohne Satz 4.4.2), daß jeder ebene Graph 6-listenfärbbar ist.
  25. Finde einen 2-färbbaren Graphen, der nicht 2-listenfärbbar ist.
  - 26.<sup>-</sup> Finde eine Funktion  $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  mit  $\text{ch}'(G) \leq f(\chi'(G))$  für alle Graphen  $G$ .
  27. Vergleiche die listenchromatische Zahl eines Graphen mit seiner Reihenzahl: welche ist größer? Versuche, die Satz 4.4.1 entsprechende Aussage für die Reihenzahl zu zeigen.
  - 28.<sup>+</sup> Beweise  $\text{ch}(K_2^r) = r$ .  
(Tip: Induktion nach  $r$ .)
  29. Die *Totalfärbungszahl*  $\chi''(G)$  eines Graphen  $G = (V, E)$  ist die geringste Anzahl von Farben, mit denen die Ecken und Kanten von  $G$  gleichzeitig so gefärbt werden können, daß je zwei benachbarte oder inzidente Elemente von  $V \cup E$  verschiedene Farben tragen. Die *Totalfärbungsvermutung* besagt, daß  $\chi''(G) \leq \Delta(G) + 2$  sei. Finde eine in  $\text{ch}'$  ausgedrückte obere Schranke für die Totalfärbungszahl, und benutze diese Schranke, um eine Abschwächung der Totalfärbungsvermutung aus der Listenfärbungsvermutung abzuleiten.
  - 30.<sup>-</sup> Finde einen gerichteten Graphen, der keinen Kern hat.

- 31.<sup>+</sup> Beweise den Satz von Richardson, daß jeder gerichtete Graph ohne gerichtete Kreise ungerader Länge einen Kern besitzt.
- 32.<sup>+</sup> Zeige, daß jeder bipartite plättbare Graph 3-listenfärbbar ist.  
(Tip: Verwende die vorige Übung und Lemma 4.4.3.)
- 33.<sup>-</sup> Zeige, daß Perfektion weder hinsichtlich des Löschens von Kanten noch hinsichtlich der Kantenkontraktion abgeschlossen ist.
34. Beweise mit Hilfe von Satz 1.1.1, daß das Komplement eines bipartiten Graphen stets perfekt ist.
35. Finde – unter Benutzung der Resultate dieses Kapitels – einen einzeiligen Beweis des folgenden Satzes von König: in jedem bipartiten Graphen ohne isolierte Ecken ist die geringste Mächtigkeit einer alle Ecken treffenden Kantenmenge gleich der größten Mächtigkeit einer unabhängigen Eckenmenge.
36. Ein Graph  $G$  ist ein *Vergleichbarkeitsgraph*, wenn eine Halbordnung auf  $V(G)$  existiert, in der genau die in  $G$  benachbarten Elemente vergleichbar sind. Zeige, daß jeder Vergleichbarkeitsgraph perfekt ist.
37. Ein Graph  $G = (V, E)$  heißt *Intervallgraph*, wenn es eine Menge  $\{I_v \mid v \in V\}$  reeller Intervalle gibt, so daß genau dann  $I_u \cap I_v \neq \emptyset$  gilt, wenn  $uv \in E$  ist.
- Zeige, daß jeder Intervallgraph chordal ist.
  - Zeige, daß das Komplement eines Intervallgraphen stets ein Vergleichbarkeitsgraph ist.
- (Umgekehrt ist auch jeder chordale Graph, dessen Komplement ein Vergleichbarkeitsgraph ist, ein Intervallgraph; dies ist ein Satz von Gilmore und Hoffman (1964).)
38. Zeige, daß  $\chi(H) \in \{\omega(H), \omega(H) + 1\}$  gilt für jeden Kantengraphen  $H = L(G)$ .
- 39.<sup>+</sup> Charakterisiere die Graphen  $G$ , deren Kantengraphen perfekt sind.
40. Zeige, daß ein Graph  $G$  genau dann perfekt ist, wenn jeder nicht leere Untergraph  $H$  von  $G$  eine unabhängige Eckenmenge  $A$  mit  $\omega(H - A) < \omega(H)$  enthält.
- 41.<sup>+</sup> Betrachte die Graphen  $G$ , für die bei jedem Untergraphen  $H \subseteq G$  jede maximale unabhängige Eckenmenge von  $H$  jeden maximalen vollständigen Teilgraphen von  $H$  trifft.
- Zeige, daß diese Graphen  $G$  perfekt sind.
  - Zeige, daß diese Graphen  $G$  genau die Graphen sind, die keinen  $P^3$  als Untergraphen enthalten.
- 42.<sup>+</sup> Zeige, daß man in jedem perfekten Graphen  $G$  eine Menge  $\mathcal{A}$  unabhängiger Eckenmengen und eine Menge  $\mathcal{O}$  von Eckenmengen vollständiger Teilgraphen finden kann, so daß  $\bigcup \mathcal{A} = V(G) = \bigcup \mathcal{O}$  gilt und jede Menge aus  $\mathcal{A}$  jede Menge aus  $\mathcal{O}$  trifft.  
(Tip: Lemma 4.5.4.)

- 43.<sup>+</sup> Es sei  $G$  ein perfekter Graph. Wie im Beweis von Satz 4.5.3 ersetze jede Ecke  $x$  von  $G$  durch einen perfekten Graphen  $G_x$ ; die  $G_x$  seien jedoch nicht notwendig vollständig. Zeige, daß dennoch der entstehende Graph  $G'$  wiederum perfekt ist.
44. Es seien  $\mathcal{H}_1$  und  $\mathcal{H}_2$  zwei minimale Mengen nicht perfekter Graphen, beide mit der Eigenschaft, daß ein Graph genau dann perfekt ist, wenn er keinen Untergraphen in  $\mathcal{H}_i$  hat ( $i = 1, 2$ ). Enthalten  $\mathcal{H}_1$  und  $\mathcal{H}_2$  bis auf Isomorphie die gleichen Graphen?

## Notizen

Das Standardwerk über Färbungsprobleme ist T.R. Jensen & B. Toft, *Graph Coloring Problems*, Wiley 1995. Das Buch gibt nach einem kurzen Überblick über die wichtigsten bekannten Resultate und Forschungsrichtungen des Gebiets eine umfassende Darstellung mehr als 200 offener Färbungsprobleme. Gewissermaßen im Vorübergehen, als Hintergrund zu den einzelnen Problemen, referiert es die gesamte gegenwärtige Färbungstheorie und verweist auf die entsprechende Literatur. Die meisten der folgenden Bemerkungen sind bei Jensen & Toft weiter ausgeführt; alle hier nicht gegebenen Quellenverweise sind dort zu finden.

Das *Vierfarbenproblem*, ob die Länder einer Landkarte stets so mit vier Farben gefärbt werden können, daß keine zwei Länder mit gemeinsamer Grenze gleich gefärbt sind, war eine Frage, die ein gewisser Francis Guthrie 1852 seinem Bruder Frederick stellte; dieser war damals Mathematikstudent in Cambridge. Bekannt wurde das Problem durch einen Vortrag von Cayley an der London Mathematical Society im Jahre 1878. Bereits im Jahr darauf gab Kempe einen vermeintlichen Beweis, der 1890 von Heawood zum Fünffarbensatz korrigiert wurde. Im Jahre 1880 kündigte Tait weitere Beweise an, die er jedoch nie (erfolgreich) ausarbeitete; siehe die Notizen zu Kapitel 8.

Der erste weitgehend akzeptierte Beweis des Vierfarbensatzes stammt von Appel & Haken (1977). Der Beweis beruht auf Ideen, die bereits in der Arbeit von Kempe angelegt sind und später von Birkhoff und Heesch wesentlich weiterentwickelt wurden. Zunächst wird gezeigt, daß jeder ebene Dreiecksgraph eine von 1482 sogenannten "unvermeidbaren Konfigurationen" enthalten muß. Im zweiten Schritt wird mit Hilfe eines Computers gezeigt, daß jede dieser Konfigurationen "reduzierbar" ist: jeder sie enthaltende ebene Dreiecksgraph kann durch die Zusammensetzung von 4-Färbungen kleinerer ebener Dreiecksgraphen ebenfalls 4-gefärbt werden. Nimmt man beide Schritte zusammen, so folgt der Vierfarbensatz induktiv.

Auch der Beweis von Appel & Haken ist nicht ohne Kritik geblieben, nicht nur wegen der Verwendung eines Computers. Eine Antwort auf solche Kritik und eine Reihe von Korrekturen einzelner Fehler (durch Erweiterung der Liste unvermeidbarer Konfigurationen) geben die Autoren in K. Appel & W. Haken, *Every Planar Map is Four Colorable*, American Mathematical Society 1989, einer 741 Seiten starken Langfassung ihres Beweises. Einen wesentlich kürzeren und einfacheren Beweis, der im wesentlichen auf den gleichen Ideen beruht (und auch einen Computer heranzieht) aber zumindest in seinem

schriftlichen Teil normal nachvollziehbar ist, geben N. Robertson, D. Sanders, P.D. Seymour & R. Thomas, The four-colour theorem, *J. Combin. Theory B* **70** (1997).

Färbungsprobleme auf Flächen höheren Geschlechts haben wir in diesem Kapitel gar nicht angesprochen. Gleichwohl bilden sie einen wesentlichen und interessanten Teil der Färbungstheorie; siehe B. Mohar & C. Thomassen, *Graphs on Surfaces*, Johns Hopkins University Press 2000  $\pm \epsilon$ .

Einen relativ kurzen Beweis des Satzes von Grötzsch gibt C. Thomassen, Grötzsch's 3-color theorem and its counterparts for the torus and the projective plane, *J. Combin. Theory B* **62** (1994), 268–279. Der in den Übungen angedeutete kürzere Beweis des Satzes von Brooks, bei dem der Greedy-Algorithmus auf eine geschickte Eckenaufzählung angewendet wird, stammt von Lovász (1973).

Für den Satz 9.2.2 von Erdős, daß es Graphen mit beliebig hoher chromatischer Zahl und Tailenweite gibt, existieren mittlerweile auch konstruktive Beweise; die ersten solchen Graphen konstruierte Lovász 1968.

A. Urquhart, The graph constructions of Hajós and Ore, *J. Graph Theory* **26** (1997), 211–215, zeigte, daß die Graphen mit chromatischer Zahl  $\geq k$  nicht nur alle einen  $k$ -konstruierbaren Teilgraphen haben (wie im Satz von Hajós), sondern sogar alle selbst  $k$ -konstruierbar sind. Ansätze, eine hohe chromatische Zahl mit algebraischen Mitteln nachzuweisen, wurden von Kleitman & Lovász (1982) und von Alon & Tarsi (1992) entwickelt; siehe den unten zitierten Artikel von Alon.

Listenfärbungen wurden zuerst 1976 von Vizing betrachtet. Vizing bewies damals unter anderem die Listenversion des Satzes von Brooks; einen kürzeren Beweis geben A.V. Kostochka, M. Stiebitz und B. Wirth, The colour theorems of Brooks and Gallai, Manuskript 1995. M. Voigt (1993) konstruierte einen ebenen Graphen mit 238 Ecken, der nicht 4-listenfärbbar ist; Thomassens Listenversion des Fünffarbensatzes ist somit bestmöglich.

Sowohl die Listenfärbungsvermutung als auch Galvins Beweis des bipartiten Falls gelten allgemeiner für Multigraphen. Unser Beweis von Satz 4.4.4 folgt Galvins Originalarbeit; eine etwas kompaktere Fassung, in der die gerichteten Kantengraphen und ihre Kerne nicht explizit auftreten sondern in das Hauptargument integriert sind, gibt Slivnik in *Combinatorics, Probability and Computing* **5** (1996), 91–94.

Einen Überblick über Resultate, Techniken und offene Probleme aus dem Bereich der Listenfärbungen gibt N. Alon, Restricted colorings of graphs, in (K. Walker, Hrsg.): *Surveys in Combinatorics*, LMS Lecture Notes **187**, Cambridge University Press 1993. Dort findet sich auch eine Beweis von Satz 4.4.1. Kahn (1994) zeigte, daß die Listenfärbungsvermutung asymptotisch richtig ist: für jedes  $\epsilon > 0$  gilt  $ch'(G) \leq (1 + \epsilon)\Delta(G)$  für alle Graphen  $G$  mit hinreichend großem  $\Delta(G)$ .

Die Totalfärbungsvermutung wurde um 1965 unabhängig von Vizing und Behad aufgestellt; siehe Jensen & Toft.

Proposition 4.5.1 stammt von Dirac (1961). Unser Beweis von Satz 4.5.3, dem *Perfect Graph Theorem*, folgt dem Übersichtsartikel von L. Lovász, Perfect graphs, in (L.W. Beineke und R.J. Wilson, Hrsg.): *Selected Topics in Graph Theory 2*, Academic Press 1983. Kurz nach seinem Beweis durch Lovász



wurde der Satz unabhängig auch von Fulkerson bewiesen. Einen sehr eleganten und kurzen Beweis gibt G.S. Gasparian, Minimal imperfect graphs: a simple approach, *Combinatorica* **16** (1996), 209–212; dieser Beweis ist auch in der englischen Ausgabe dieses Buches dargestellt. Eine leicht lesbare Einführung in perfekte Graphen samt Anwendungen gibt M.C. Golumbic, *Algorithmic Graph Theory and Perfect Graphs*, Academic Press 1980. Daß ‘fast alle’ Berge-Graphen perfekt sind bewiesen H.J. Prömel & A. Steger, Almost all Berge graphs are perfect, *Combinatorics, Probability and Computing* **1** (1992), 53–79.

Stellen wir uns einen Graphen einmal als ein Netzwerk vor: durch seine Kanten fließe ein Strom irgendwelcher Art – Wasser, Elektrizität, Daten oder Ähnliches. Wie könnten wir dies genauer modellieren?

Wesentliche Eigenschaften eines solchen Flusses haben wir erfaßt, wenn wir zu jeder Kante  $e = xy$  wissen, wieviel Fluß durch diese Kante fließt, und in welche Richtung: von  $x$  nach  $y$  oder umgekehrt. In unserem Modell könnten wir diese Information so beschreiben: fließt durch  $e$  ein Fluß der Stärke  $k \in \mathbb{N}$  von  $x$  nach  $y$ , so ordnen wir dem Eckenpaar  $(x, y)$  die Zahl  $k$  zu; fließt durch  $e$  ein Fluß der Stärke  $k$  umgekehrt von  $y$  nach  $x$ , so ordnen wir  $(x, y)$  die Zahl  $-k$  zu. Ist  $f: V^2 \rightarrow \mathbb{Z}$  eine solche Zuordnung, so gilt offenbar  $f(x, y) = -f(y, x)$  für je zwei benachbarte Ecken  $x, y \in G$ .

In dem zu modellierenden Netzwerk wird gewöhnlich nur an wenigen ausgezeichneten Knotenpunkten Strom entspringen oder versickern: aus jedem anderen Punkt fließt gerade so viel Strom heraus wie in ihn hineinfließt. Was bedeutet dies für unser Modell? Es bedeutet, daß  $f$  an den meisten Ecken  $x$  der *Kirchhoffschen Regel*

Kirchhoff-  
Regel

$$\sum_{y \in N(x)} f(x, y) = 0$$

genügt.

Jede Abbildung  $f: V^2 \rightarrow \mathbb{Z}$  mit den genannten beiden Eigenschaften werden wir als *Fluß* auf  $G$  bezeichnen; die Gruppe  $\mathbb{Z}$  werden wir dabei gelegentlich durch andere Gruppen ersetzen, und statt schlichter Graphen werden wir allgemeiner Multigraphen betrachten.<sup>1</sup> Wie wir sehen werden, ist die Theorie solcher Flüsse nicht nur in der offensichtlichen

---

<sup>1</sup> Sätze, deren Beweise auf Aussagen aus früheren Kapiteln zurückgreifen, werden wir nur für schlichte Graphen formulieren. Gleichwohl gelten auch diese Aussagen sinngemäß für Multigraphen.

Weise auf echte Flüsse anwendbar: sie fügt sich überdies so nahtlos in den Gesamtrahmen der Graphentheorie ein, daß sich ganz erstaunliche Beziehungen zu anderen Fragen ergeben – insbesondere zu Zusammenhangs- und Färbungsproblemen.

## 5.1 Flüsse und Rundflüsse

$G = (V, E)$  Es sei  $G = (V, E)$  ein Multigraph. Jeder Kante  $e \in E$  ist also eine ein- oder zweielementige Menge  $\{x, y\} \subseteq V$  zugeordnet, die Menge ihrer Endecken. Wir erinnern daran, daß auch Schlingen und Doppelkanten von  $G$  als Kreise gelten. Färbungen von  $G$  sind definiert wie für Graphen; hat  $G$  eine Schlinge, so hat  $G$  keine Eckenfärbung und wir setzen  $\chi(G) := \infty$ .

Im Zusammenhang mit Flüssen werden wir von “Richtungen” einer Kante  $e = xy$  sprechen müssen. Da  $e$  durch  $x$  und  $y$  nicht mehr eindeutig bestimmt ist, reicht dazu die Festlegung eines der Paare  $(x, y)$  und  $(y, x)$  nicht mehr aus: wir müssen  $e$  stets dazu nennen. Zu diesem Zweck definieren wir

$$\vec{E} := \{(e, x, y) \mid e \in E; x, y \in V; e = xy\}.$$

*Richtung*  
 $(e, x, y)$  Jede Kante  $e = xy$  mit  $x \neq y$  hat damit die zwei *Richtungen*  $(e, x, y)$  und  $(e, y, x)$ ; Schlingen  $e = xx$  haben nur eine Richtung, das Tripel  $(e, x, x)$ . Zu gegebenem  $\vec{e} = (e, x, y) \in \vec{E}$  schreiben wir  $\bar{e} := (e, y, x)$ , und für  $\vec{F} \subseteq \vec{E}$  setzen wir

$$\bar{\vec{F}} := \{\bar{e} \mid \vec{e} \in \vec{F}\}.$$

Beachte, daß  $\vec{E}$  selbst symmetrisch ist, d.h. es gilt  $\vec{E} = \bar{\vec{E}}$ .

Für  $X, Y \subseteq V$  (nicht notwendig disjunkt) schreiben wir

$$\vec{F}(X, Y) := \{(e, x, y) \in \vec{F} \mid x \in X; y \in Y; x \neq y\},$$

$\vec{F}(x, Y)$  sowie  $\vec{F}(x, Y) := \vec{F}(\{x\}, Y)$  etc. Zur Abkürzung setzen wir

$$\vec{F}(x) := \vec{F}(x, V) = \vec{F}(\{x\}, \overline{\{x\}}).$$

$\bar{X}$  (Hier, wie auch später, bezeichnet  $\bar{X}$  das Komplement  $V \setminus X$  einer Eckenmenge  $X \subseteq V$ .) Beachte, daß etwaige Schlingen an Ecken  $x \in X \cap Y$  in  $\vec{F}(X, Y)$  und  $\vec{F}(x)$  nicht enthalten sind.

Es sei  $H$  eine kommutative Halbgruppe.<sup>2</sup> Wir schreiben  $H$  additiv und bezeichnen das neutrale Element von  $H$  mit 0. Für Eckenmengen

<sup>2</sup> Dieses Kapitel enthält keinerlei Gruppentheorie. Die einzigen Halbgruppen, die wir für  $H$  betrachten werden, sind die natürlichen, ganzen und reellen Zahlen, die zyklischen Gruppen  $\mathbb{Z}_k$  der ganzen Zahlen modulo  $k$ , und (einmal) die Klein’sche Vierergruppe.

$X, Y \subseteq V$  (nicht notwendig disjunkt) und eine Abbildung  $f: \vec{E} \rightarrow H$  setzen wir  $f$

$$f(X, Y) := \sum_{\vec{e} \in \vec{E}(X, Y)} f(\vec{e}). \quad f(X, Y)$$

Statt  $f(\{x\}, Y)$  schreiben wir wieder  $f(x, Y)$  etc.  $f(x, Y)$

Im folgenden nehmen wir an, daß  $H$  sogar eine (abelsche) Gruppe ist. Wir nennen  $f$  einen *Rundfluß* auf  $G$  mit Werten in  $H$ , oder kurz einen  *$H$ -Rundfluß*, wenn  $f$  den folgenden beiden Bedingungen genügt: *Rundfluß*

(F1)  $f(e, x, y) = -f(e, y, x)$  für alle  $(e, x, y) \in \vec{E}$  mit  $x \neq y$ ;

(F2)  $f(v, V) = 0$  für alle  $v \in V$ .

Erfüllt  $f$  die Bedingung (F1), so gilt

$$f(X, X) = 0$$

für jedes  $X \subseteq V$ . Erfüllt es (F2), so gilt

$$f(X, V) = \sum_{x \in X} f(x, V) = 0.$$

Damit folgt:

**Proposition 5.1.1.** *Ist  $f$  ein Rundfluß, so gilt  $f(X, \overline{X}) = 0$  für jede Eckenmenge  $X \subseteq V$ .* [5.3.1]  
[5.5.2]  
[5.6.1]

*Beweis.*  $f(X, \overline{X}) = f(X, V) - f(X, X) = 0 - 0 = 0.$  □

Da Brücken alleine einen Schnitt bilden, haben nach Proposition 5.1.1 Rundflüsse auf Brücken den Wert null:

**Korollar 5.1.2.** *Ist  $f$  ein Rundfluß und  $e = xy$  eine Brücke in  $G$ , so gilt  $f(e, x, y) = 0$ .* □

## 5.2 Netzwerke

In diesem Abschnitt geben wir eine exemplarische Einführung in die Art von Netzwerktheorie, die sich als Beweistechnik bei Zusammenhangs- und Paarungsproblemen als natürlich und hilfreich erwiesen hat. Wir beweisen dazu einen mittlerweile klassischen Satz dieser Theorie, das sogenannte *Max-Flow Min-Cut Theorem* von Ford und Fulkerson. Aus diesem Satz folgt bereits ohne Schwierigkeiten der Satz von Menger (siehe Übungen), eine der Grundlagen aller Zusammenhagsuntersuchungen.

Als Ausgangspunkt betrachten wir die Aufgabe, Flüsse zu modellieren, die an einem Netzwerkknoten  $s$  entspringen und an einem anderen Netzwerkknoten  $t$  versickern. Jede Netzwerkleitung zwischen zwei benachbarten Knoten habe eine gewisse Kapazität, die die Stromstärke durch diese Leitung beschränkt. Wir interessieren uns dann für die maximale Stärke des Gesamtstroms von  $s$  nach  $t$  durch das Netzwerk. Diese hängt offenbar irgendwie von den zugrundegelegten Kapazitäten ab – wie genau, wollen wir herausfinden.

$G = (V, E)$   
 $s, t, c, N$

Es seien  $G = (V, E)$  ein Multigraph und  $s, t \in V$  zwei fest gewählte verschiedene Ecken. Es sei  $c: \vec{E} \rightarrow \mathbb{N}$  eine Abbildung; wir nennen  $c$  eine *Kapazitätsfunktion* auf  $G$  und das Tupel  $N := (G, s, t, c)$  ein *Netzwerk*. Beachte, daß  $c$  für die beiden Richtungen einer Kante unabhängig definiert ist: die ‘‘Kapazität von  $e$ ’’ hängt also von der betrachteten Durchflußrichtung ab.<sup>3</sup>

Netzwerk

Fluß in  $N$

Wir nennen eine Abbildung  $f: \vec{E} \rightarrow \mathbb{R}$  auf  $G$  einen *Fluß in  $N$* , wenn sie den folgenden Bedingungen genügt (Abb. 5.2.1):

$$(F1) \quad f(e, x, y) = -f(e, y, x) \text{ für alle } (e, x, y) \in \vec{E} \text{ mit } x \neq y;$$

$$(F2') \quad f(v, V) = 0 \text{ für alle } v \in V \setminus \{s, t\};$$

$$(F3) \quad f(\vec{e}) \leq c(\vec{e}) \text{ für alle } \vec{e} \in \vec{E}.$$

ganzzahlig

Wir nennen  $f$  *ganzzahlig*, wenn alle Werte von  $f$  in  $\mathbb{Z}$  liegen.

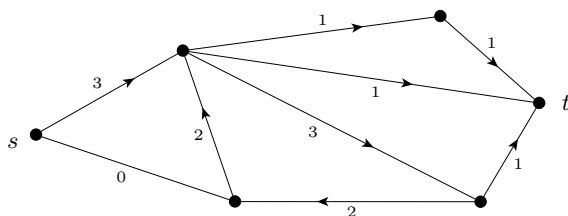


Abb. 5.2.1. Ein Fluß der Stärke 3; die angegebenen Flußwerte gelten in Pfeilrichtung

$f$   
 Schnitt  
 Kapazität

Im folgenden sei  $f$  ein Fluß in  $N$ . Ist  $S \subseteq V$  mit  $s \in S$  und  $t \in \bar{S}$ , so bezeichnen wir das Paar  $(S, \bar{S})$  als *Schnitt in  $N$* , und  $c(S, \bar{S})$  als *Kapazität dieses Schnittes*.

Da  $f$  statt (F2) jetzt nur (F2') erfüllen muß, ist  $f(X, \bar{X})$  im Gegensatz zu Proposition 5.1.1 nicht mehr für alle Eckenmengen  $X \subseteq V$  null. Für Schnitte ist dieser Wert jedoch stets gleich:

**Proposition 5.2.1.** *Für jeden Schnitt  $(S, \bar{S})$  in  $N$  gilt  $f(S, \bar{S}) = f(s, \bar{S})$ .*

<sup>3</sup> Schlingen bilden mal wieder eine Ausnahme, wenn auch keine interessante.

*Beweis.* Analog zum Beweis von Proposition 5.1.1 gilt:

$$\begin{aligned} f(S, \bar{S}) &= f(S, V) - f(S, S) \\ &\stackrel{(F1)}{=} f(s, V) + \sum_{v \in S \setminus \{s\}} f(v, V) - 0 \\ &\stackrel{(F2')}{=} f(s, V). \quad \square \end{aligned}$$

Den für alle Schnitte gleichen Wert  $f(S, \bar{S})$  aus Proposition 5.2.1 nennen wir die *Stärke* von  $f$  und bezeichnen ihn mit  $|f|$ ;<sup>4</sup> siehe Abb. 5.2.1. Da  $f$  der Bedingung (F3) genügt, gilt

$$|f| = f(S, \bar{S}) \leq c(S, \bar{S})$$

für jeden Schnitt  $(S, \bar{S})$  in  $N$ ; die größtmögliche Stärke eines Flusses in  $N$  ist also höchstens so groß wie die kleinste Kapazität eines Schnittes in  $N$ . Das folgende *Max-Flow Min-Cut Theorem* besagt, daß stets ein Fluß existiert, dessen Stärke diese obere Schranke annimmt:

**Satz 5.2.2.** (Ford & Fulkerson 1956)

*In jedem Netzwerk ist die größte Stärke eines Flusses gleich der kleinsten Kapazität eines Schnittes.*

*Beweis.* Es sei  $N = (G, s, t, c)$  ein beliebiges Netzwerk, mit  $G =: (V, E)$ . Wir werden eine Folge  $f_0, f_1, f_2, \dots$  ganzzahliger Flüsse in  $N$  von streng wachsender Stärke definieren, also mit

$$|f_0| < |f_1| < |f_2| < \dots$$

Da mit einem Fluß auch seine Stärke ganzzahlig ist, gilt dann jeweils  $|f_{n+1}| \geq |f_n| + 1$ . Da überdies die Stärke aller Flüsse in  $N$  durch die Kapazität eines jeden Schnittes nach oben beschränkt ist, wird unsere Folge mit einem Fluß  $f_n$  abbrechen. Wir werden dazu dann einen Schnitt der Kapazität  $c_n = |f_n|$  finden; da trivialerweise in  $N$  jede Flußstärke nach oben durch  $c_n$  und jede Schnittkapazität nach unten durch  $|f_n|$  beschränkt ist, ist  $f_n$  damit ein Fluß größter Stärke und  $c_n$  eine kleinste Schnittkapazität, und die Behauptung folgt.

Als  $f_0$  wählen wir den Nullfluß, setzen also  $f_0(\bar{e}) := 0$  für alle  $\bar{e} \in \bar{E}$ . Ist für ein  $n \in \mathbb{N}$  bereits ein Fluß  $f_n$  ganzzahliger Stärke in  $N$  definiert, so bezeichne  $S_n$  die Menge aller Ecken  $v$ , für die  $G$  einen  $s$ - $v$ -Kantenzug  $x_0 e_0 \dots e_{\ell-1} x_\ell$  mit

$$f_n(\bar{e}_i) < c(\bar{e}_i)$$

für alle  $i < \ell$  enthält; hier sei  $\bar{e}_i := (e_i, x_i, x_{i+1})$ , und natürlich  $x_0 = s$  und  $x_\ell = v$ .

<sup>4</sup> Formal kann  $|f|$  also durchaus negativ sein. Durch Vertauschung der Rollen von  $s$  und  $t$  in  $N$  läßt sich das Vorzeichen von  $|f|$  jedoch nach Geschmack ändern.

W

Ist  $t \in S_n$ , so sei  $W = x_0 e_0 \dots e_{\ell-1} x_\ell$  der entsprechende  $s$ - $t$ -Kantenzug, oBdA ohne Eckenwiederholung, und

 $\epsilon$ 

$$\epsilon := \min \{ c(\bar{e}_i) - f_n(\bar{e}_i) \mid i < \ell \}.$$

Offenbar ist  $\epsilon > 0$ , und da  $f_n$  (wie  $c$ ) nach Annahme ganzzahlig ist, ist  $\epsilon \in \mathbb{N}$ . Wir setzen

$$f_{n+1}: \bar{e} \mapsto \begin{cases} f_n(\bar{e}) + \epsilon & \text{für } \bar{e} = \bar{e}_i, \quad i = 0, \dots, \ell - 1; \\ f_n(\bar{e}) - \epsilon & \text{für } \bar{e} = \bar{e}_i, \quad i = 0, \dots, \ell - 1; \\ f_n(\bar{e}) & \text{für } e \notin W. \end{cases}$$

Anschaulich entsteht  $f_{n+1}$  aus  $f_n$ , indem wir einen zusätzlichen Fluß der Stärke  $\epsilon$  entlang  $W$  von  $s$  nach  $t$  schicken.

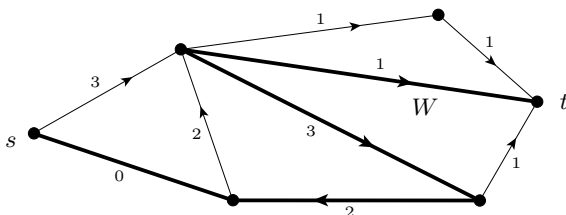


Abb. 5.2.2. Ein Kantenzug  $W$  mit  $\epsilon = 2$  bei konstanter Kapazitätsfunktion  $c = 3$

Offenbar ist  $f_{n+1}$  wieder ein ganzzahliger Fluß in  $N$ . Zur Bestimmung von  $|f_{n+1}|$  betrachten wir den Wert  $|f_{n+1}| = f_{n+1}(s, V)$ . Da  $W$  die Ecke  $s$  nur einmal enthält, ist  $\bar{e}_0$  das einzige Tripel  $(e, x, y)$  mit  $x = s$  und  $y \in V$ , dessen Wert geändert wurde. Dieser Wert, und somit der von  $f_{n+1}(s, V)$ , wurde erhöht. Es gilt also  $|f_{n+1}| > |f_n|$  wie erwünscht.

Ist  $t \notin S_n$ , so ist  $(S_n, \bar{S}_n)$  ein Schnitt in  $N$ . Nach (F3) für  $f_n$  und Definition von  $S_n$  gilt

$$f_n(\bar{e}) = c(\bar{e})$$

für alle  $\bar{e} \in \bar{E}(S_n, \bar{S}_n)$ . Damit gilt

$$|f_n| = f_n(S_n, \bar{S}_n) = c(S_n, \bar{S}_n)$$

wie gewünscht. □

Da der im Beweis von Satz 5.2.2 konstruierte Fluß ganzzahlig ist, haben wir die folgende Aussage mitbewiesen:

**Korollar 5.2.3.** *In jedem Netzwerk (mit ganzzahliger Kapazitätsfunktion) gibt es einen Fluß maximaler Stärke, der ganzzahlig ist.* □

### 5.3 Gruppenwertige Flüsse

Es sei  $G = (V, E)$  ein Multigraph und  $H$  eine abelsche Gruppe. Sind  $f$  und  $g$  zwei  $H$ -Rundflüsse, so sind offenbar auch  $f + g: \vec{e} \mapsto f(\vec{e}) + g(\vec{e})$  und  $-f: \vec{e} \mapsto -f(\vec{e})$  zwei  $H$ -Rundflüsse. Die  $H$ -Rundflüsse auf  $G$  bilden also selbst in natürlicher Weise eine Gruppe.

Eine Abbildung  $f: \vec{E} \rightarrow H$  ist *nirgends null*, wenn  $f(\vec{e}) \neq 0$  gilt für alle  $\vec{e} \in \vec{E}$ . Einen  $H$ -Rundfluß, der nirgends null ist, nennen wir einen  $H$ -Fluß. Beachte, daß die Menge der  $H$ -Flüsse auf  $G$  nicht unter Addition abgeschlossen ist: zwei  $H$ -Flüsse können sich auf einer Kante  $\vec{e}$  zu null addieren, und ihre Summe ist dann kein  $H$ -Fluß mehr. Existiert auf  $G$  ein  $H$ -Fluß, so hat  $G$  nach Korollar 5.1.2 keine Brücke.

Für endliche Gruppen  $H$  hängt die Anzahl der  $H$ -Flüsse auf  $G$ , und insbesondere ihre Existenz, überraschenderweise nur von der Mächtigkeit von  $H$  ab, nicht von  $H$  selbst:

**Satz 5.3.1.** (Tutte 1954)

Zu jedem Multigraphen  $G$  existiert ein Polynom  $P$  mit der Eigenschaft, daß für jede endliche abelsche Gruppe  $H$  die Anzahl der  $H$ -Flüsse auf  $G$  gleich  $P(|H| - 1)$  ist.

*Beweis.* Es sei  $G = (V, E)$ ; wir verwenden Induktion nach  $m := |E|$ . Wir nehmen zunächst an, daß alle Kanten von  $G$  Schlingen sind. Ist  $H$  eine beliebige abelsche Gruppe, so ist jede Abbildung  $\vec{E} \rightarrow H \setminus \{0\}$  ein  $H$ -Fluß auf  $G$ . Da  $|\vec{E}| = |E|$  ist, wenn alle Kanten Schlingen sind, gibt es  $(|H| - 1)^m$  solche Abbildungen, und  $P := x^m$  ist das gesuchte Polynom. (5.1.1)

Es gebe nun eine Kante  $e_0 = xy \in E$  mit  $x \neq y$ ; es sei  $\vec{e}_0 := (e_0, x, y)$  und  $E' := E \setminus \{e_0\}$ . Wir betrachten die Multigraphen  $e_0 = xy$   
 $E'$

$$G_1 := G - e_0 \quad \text{und} \quad G_2 := G/e_0.$$

Nach Induktionsannahme gibt es für  $i = 1, 2$  jeweils ein Polynom  $P_i$ , so daß für jede endliche abelsche Gruppe  $H$  und  $k = k(H) := |H| - 1$  die Anzahl der  $H$ -Flüsse auf  $G_i$  gleich  $P_i(k)$  ist. Wir werden zeigen, daß für jedes  $H$  die Anzahl der  $H$ -Flüsse auf  $G$  gleich  $P_2(k) - P_1(k)$  ist; insgesamt ist dann  $P := P_2 - P_1$  das gesuchte Polynom.  $P_1, P_2$   
 $k$

Im folgenden sei also  $H$  fest gegeben. Wir bezeichnen die Menge aller  $H$ -Flüsse auf  $G$  mit  $F$ , wollen also  $H$   
 $F$

$$|F| = P_2(k) - P_1(k) \tag{1}$$

zeigen. Die  $H$ -Flüsse auf  $G_1$  sind nun genau die Einschränkungen auf  $\vec{E}'$  derjenigen  $H$ -Rundflüsse auf  $G$ , die auf  $e_0$  null sind aber sonst nirgends. Bezeichnen wir die Menge dieser Rundflüsse auf  $G$  mit  $F_1$ , so gilt damit  $F_1$

$$P_1(k) = |F_1|.$$



Analog wollen wir jetzt zeigen, daß die  $H$ -Flüsse auf  $G_2$  bijektiv denjenigen  $H$ -Rundflüssen auf  $G$  entsprechen, die nirgends null sind außer möglicherweise auf  $e_0$ . Bezeichnen wir die Menge dieser Rundflüsse auf  $G$  mit  $F_2$ , so gilt dann

$$P_2(k) = |F_2|,$$

und  $F_2$  ist die disjunkte Vereinigung von  $F_1$  und  $F$ . Damit wird (1) und der Satz bewiesen sein.

In  $G_2$  sei  $v_0 := v_{e_0}$  die aus  $e_0$  kontrahierte Ecke (Abb. 5.3.1; siehe Kapitel 0.10). Wir suchen eine Bijektion  $f \mapsto g$  zwischen  $F_2$  und der Menge der  $H$ -Flüsse auf  $G_2$ . Dazu definieren wir  $g$  als die Einschränkung von  $f$  auf  $\vec{E}' \setminus \vec{E}'(y, x)$ . (Da die  $x$ - $y$ -Kanten  $e \in E'$  in  $G_2$  zu Schlingen werden, haben sie dort nur die eine Richtung  $(e, v_0, v_0)$ , und deren  $g$ -Wert legen wir als  $f(e, x, y)$  fest.) Damit ist  $g$  in der Tat ein  $H$ -Fluß auf  $G_2$ ; die Kirchhoff-Regel (F2) in  $v_0$  gilt nach Proposition 5.1.1 für  $G$  mit  $X := \{x, y\}$ .

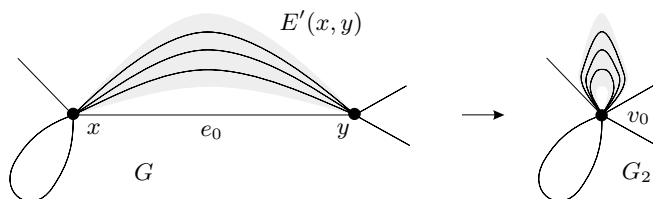


Abb. 5.3.1. Kontraktion der Kante  $e_0$

Es bleibt zu zeigen, daß diese Abbildung  $f \mapsto g$  eine Bijektion ist. Wollen wir zu einem gegebenen  $H$ -Fluß  $g$  auf  $G_2$  ein  $f \in F_2$  finden mit  $f \mapsto g$ , so liegt  $f(\vec{e})$  für alle  $\vec{e} \in \vec{E}' \setminus \vec{E}'(y, x)$  bereits fest, als  $f(\vec{e}) = g(\vec{e})$ ; durch (F1) ist dann auch  $f(\vec{e}) = -f(\vec{e})$  für alle  $\vec{e} \in \vec{E}'(y, x)$  bestimmt. Unsere Abbildung  $f \mapsto g$  ist also genau dann bijektiv, wenn wir zu gegebenem  $g$  auch die verbleibenden Werte  $f(\vec{e}_0)$  und  $f(\vec{e}_0)$  stets auf genau eine Weise so definieren können, daß  $f$  in  $\vec{e}_0$  und  $\vec{e}_0$  die Bedingung (F1) und in  $x$  und  $y$  die Bedingung (F2) erfüllt (und somit ein Rundfluß aus  $F_2$  ist).

Dies ist in der Tat der Fall. Da nämlich  $g$  in  $v_0$  der Bedingung (F2) genügt, gilt mit  $V' := V \setminus \{x, y\}$  für die bereits festliegenden  $f$ -Werte

$$f(x, V') + f(y, V') = g(v_0, V') = 0. \quad (2)$$

Mit

$$h := \sum_{\vec{e} \in \vec{E}'(x, y)} f(\vec{e}) \quad \left( = \sum_{e \in E'(x, y)} g(e, v_0, v_0) \right)$$

erfordert (F2), daß

$$0 = f(x, V) = f(\bar{e}_0) + h + f(x, V')$$

und

$$0 = f(y, V) = f(\bar{e}_0) - h + f(y, V')$$

gilt, d.h. wir müssen

$$f(\bar{e}_0) := -f(x, V') - h \quad \text{und} \quad f(\bar{e}_0) := -f(y, V') + h$$

setzen. Wegen (2) gilt dann  $f(\bar{e}_0) + f(\bar{e}_0) = 0$ , d.h.  $f$  erfüllt auch (F1). □

Das Polynom  $P$  aus Satz 5.3.1 nennt man das *Flußpolynom* von  $G$ .

*Fluß-  
polynom*

**Korollar 5.3.2.** *Sind  $H$  und  $H'$  zwei endliche abelsche Gruppen gleicher Mächtigkeit, so hat  $G$  genau dann einen  $H$ -Fluß, wenn  $G$  einen  $H'$ -Fluß hat.* □

[5.4.5]

Korollar 5.3.2 ist für die algebraische Flußtheorie von grundlegender Bedeutung: es zeigt, daß etwaige Schwierigkeiten bei Existenzbeweisen von  $H$ -Flüssen kaum gruppentheoretischer Natur sein werden. Andererseits kann es durchaus hilfreich sein, wenn wir uns bei bekannter oder zu zeigender Existenz eines  $H$ -Flusses die Gruppe aussuchen dürfen; ein hübsches Beispiel dafür werden wir in Proposition 5.4.5 kennenlernen.

Es sei  $k \geq 1$  eine natürliche Zahl und  $G = (V, E)$  ein Multigraph. Einen  $\mathbb{Z}$ -Fluß  $f$  auf  $G$  mit  $0 < |f(\bar{e})| < k$  für alle  $\bar{e} \in \bar{E}$  bezeichnet man als  $k$ -Fluß. Jeder  $k$ -Fluß ist offenbar auch ein  $m$ -Fluß für alle  $m > k$ . Zu gegebenem  $G$  stellt sich somit die Frage nach dem kleinsten  $k$  (falls überhaupt eins existiert), für das  $G$  einen  $k$ -Fluß zuläßt. Wir nennen dieses  $k$  die *Flußzahl* von  $G$  und bezeichnen es mit  $\varphi(G)$ ; hat  $G$  keinerlei  $k$ -Fluß, so setzen wir  $\varphi(G) := \infty$ .

$k$

$k$ -Fluß

Flußzahl

$\varphi(G)$

Die Frage nach dem Wert von  $\varphi(G)$  für natürlich auftretende Graphen  $G$  führt auf einige der tiefsten Probleme der Graphentheorie. Wir verschieben die Behandlung dieser Frage auf die Abschnitte 5.4 und 5.6 und ordnen sie zunächst in den weiteren Rahmen der  $H$ -Flüsse ein.

Zwischen  $k$ -Flüssen und  $\mathbb{Z}_k$ -Flüssen gibt es eine enge Beziehung. Bezeichnet  $\sigma_k$  den kanonischen Homomorphismus  $i \mapsto \bar{i}$  von  $\mathbb{Z}$  nach  $\mathbb{Z}_k$ , so definiert jeder  $k$ -Fluß durch Komposition mit  $\sigma_k$  einen  $\mathbb{Z}_k$ -Fluß. Interessanterweise gilt auch die Umkehrung: aus jedem  $\mathbb{Z}_k$ -Fluß auf einem Multigraphen läßt sich ein  $k$ -Fluß auf ihm konstruieren. Angesichts von Korollar 5.3.2 reduziert sich die allgemeine Frage nach der Existenz von  $H$ -Flüssen damit ganz auf die Frage nach der Existenz von  $k$ -Flüssen.

$\sigma_k$

[5.4.1]  
[5.4.2]  
[5.4.3]  
[5.4.5]

**Satz 5.3.3.** (Tutte 1950)

Ein Multigraph hat genau dann einen  $k$ -Fluß, wenn er einen  $\mathbb{Z}_k$ -Fluß hat.

*Beweis.* Es sei  $g$  ein  $\mathbb{Z}_k$ -Fluß auf einem Multigraphen  $G = (V, E)$ ; wir konstruieren einen  $k$ -Fluß  $f$  auf  $G$ . OBdA habe  $G$  keine Schlingen. Es sei  $F$  die Menge aller Abbildungen  $f: \vec{E} \rightarrow \mathbb{Z}$ , die (F1) erfüllen sowie  $|f(\vec{e})| < k$  (für alle  $\vec{e} \in \vec{E}$ ) und  $\sigma_k \circ f = g$ ; beachte, daß mit  $g$  auch jedes  $f \in F$  nirgends null ist.

Wir zeigen zunächst, daß  $F$  nicht leer ist. Da wir jedes  $g(\vec{e}) \in \mathbb{Z}_k$  als  $\bar{i}$  mit  $|i| < k$  schreiben und dann  $f(\vec{e}) := i$  setzen können, gibt es sicher eine Abbildung  $f: \vec{E} \rightarrow \mathbb{Z}$  mit  $|f(\vec{e})| < k$  für alle  $\vec{e} \in \vec{E}$  und  $\sigma_k \circ f = g$ . Für jede Kante  $e \in E$  bezeichnen wir nun eine ihrer beiden Richtungen mit  $\vec{e}$  und definieren  $f': \vec{E} \rightarrow \mathbb{Z}$  vermöge  $f'(\vec{e}) := f(\vec{e})$  und  $f'(\bar{e}) := -f(\vec{e})$  für jedes  $e \in E$ . Damit erfüllt  $f'$  (F1) und hat seine Werte im gewünschten Bereich; zu zeigen ist, daß die Abbildungen  $\sigma_k \circ f'$  und  $g$  auch in den Gegenrichtungen  $\bar{e}$  der Kanten  $e$  übereinstimmen. Da  $\sigma_k$  ein Homomorphismus ist, gilt jedoch

$$(\sigma_k \circ f')(\bar{e}) = \sigma_k(-f(\vec{e})) = -(\sigma_k \circ f)(\bar{e}) = -g(\bar{e}) = g(\bar{e});$$

es ist also  $f' \in F$ , d.h.  $F$  ist in der Tat nicht leer.

Unser Ziel ist es, ein  $f \in F$  zu finden, das die Kirchhoff-Regel (F2) erfüllt und somit ein  $k$ -Fluß ist. Wir wählen dazu ein  $f \in F$ , für das die Summe

$$K(f) := \sum_{x \in V} |f(x, V)|$$

aller Abweichungen von der Kirchhoff-Regel minimal ist. Wir werden  $K(f) = 0$  zeigen; offenbar gilt dann auch  $f(x, V) = 0$  für jedes  $x$ , wie gewünscht.

Angenommen,  $K(f) \neq 0$ . Da  $f$  die Bedingung (F1) erfüllt, und somit  $\sum_{x \in V} f(x, V) = f(V, V) = 0$  ist, existiert dann eine Ecke  $x$  mit

$$f(x, V) > 0. \tag{1}$$

Es sei  $X \subseteq V$  die Menge aller Ecken  $x'$ , für die  $G$  einen Kantenzug  $x_0 e_0 \dots e_{\ell-1} x_\ell$  von  $x$  nach  $x'$  enthält mit  $f(e_i, x_i, x_{i+1}) > 0$  für alle  $i < \ell$ ; weiter sei  $X' := X \setminus \{x\}$ .

Wir zeigen zunächst, daß  $X'$  eine Ecke  $x'$  mit  $f(x', V) < 0$  enthält. Nach Definition von  $X$  gilt  $f(e, x', y) \leq 0$  für alle Kanten  $e = x'y$  mit  $x' \in X$  und  $y \in \bar{X}$ . Insbesondere gilt dies für  $x' = x$ . Aus  $f(x, V) > 0$  folgt somit  $f(x, X') > 0$ . Wegen (F1) gilt dann  $f(X', x) < 0$ , und überdies  $f(X', X') = 0$ . Somit ist

$$\sum_{x' \in X'} f(x', V) = f(X', V) = f(X', \bar{X}) + f(X', x) + f(X', X') < 0,$$

d.h. für mindestens ein  $x' \in X'$  gilt in der Tat

$$f(x', V) < 0. \quad (2)$$

Wegen  $x' \in X$  gibt es einen Kantenzug  $W = x_0 e_0 \dots e_{\ell-1} x_\ell$  von  $x$  nach  $x'$  mit  $f(e_i, x_i, x_{i+1}) > 0$  für alle  $i < \ell$ . Wir modifizieren  $f$  nun dadurch, daß wir zusätzlich einen Fluß der Stärke  $k$  rückwärts entlang  $W$  schicken: wir definieren  $f': \vec{E} \rightarrow \mathbb{Z}$  durch

$$f': \vec{e} \mapsto \begin{cases} f(\vec{e}) - k & \text{für } \vec{e} = (e_i, x_i, x_{i+1}), \quad i = 0, \dots, \ell - 1; \\ f(\vec{e}) + k & \text{für } \vec{e} = (e_i, x_{i+1}, x_i), \quad i = 0, \dots, \ell - 1; \\ f(\vec{e}) & \text{für } e \notin W. \end{cases}$$

Nach Wahl von  $W$  gilt  $|f'(\vec{e})| < k$  für alle  $\vec{e} \in \vec{E}$ , d.h. mit  $f$  ist auch  $f'$  in  $F$ .

Wie wirkt sich die Modifikation von  $f$  auf  $K$  aus? An allen inneren Ecken  $v$  von  $W$  und außerhalb von  $W$  bleibt die bisherige Abweichung von der Kirchhoff-Regel erhalten: es gilt

$$f'(v, V) = f(v, V) \quad \text{für alle } v \in V \setminus \{x, x'\}. \quad (3)$$

Für  $x$  und  $x'$  andererseits ist

$$f'(x, V) = f(x, V) - k \quad \text{und} \quad f'(x', V) = f(x', V) + k. \quad (4)$$

Da  $g$  ein  $\mathbb{Z}_k$ -Fluß ist, also

$$\sigma_k(f(x, V)) = g(x, V) = \bar{0} \in \mathbb{Z}_k$$

und

$$\sigma_k(f(x', V)) = g(x', V) = \bar{0} \in \mathbb{Z}_k,$$

sind  $f(x, V)$  und  $f(x', V)$  Vielfache von  $k$ . Mit (1) und (2) ergibt dies  $f(x, V) \geq k$  und  $f(x', V) \leq -k$ . Damit folgt aus (4)

$$|f'(x, V)| < |f(x, V)| \quad \text{und} \quad |f'(x', V)| < |f(x', V)|.$$

Zusammen mit (3) folgt  $K(f') < K(f)$ , im Widerspruch zur Wahl von  $f$ .

Es gilt somit wie behauptet  $K(f) = 0$ , und  $f$  ist ein  $k$ -Fluß auf  $G$ .  $\square$

Da die Summe zweier  $\mathbb{Z}_k$ -Rundflüsse stets wieder ein  $\mathbb{Z}_k$ -Rundfluß ist, sind  $\mathbb{Z}_k$ -Flüsse oft einfacher zu konstruieren – durch Summierung geeigneter Teilflüsse – als  $k$ -Flüsse. Bei der Entscheidung der Frage, ob ein gegebener Graph einen  $k$ -Fluß hat, ist Satz 5.3.3 daher eine wesentliche Hilfe. In den folgenden Abschnitten werden wir mehrere Beispiele hierfür kennenlernen.

## 5.4 $k$ -Flüsse für kleine $k$

Trivialerweise hat ein Graph genau dann einen 1-Fluß (die leere Menge), wenn er keine Kanten hat. In diesem Abschnitt stellen wir einige einfache Beispiele von hinreichenden Bedingungen zusammen, unter denen ein Graph einen 2-, 3- oder 4-Fluß hat. Weitere Beispiele finden sich in den Übungen.

[5.6.1] **Proposition 5.4.1.** *Ein Graph hat genau dann einen 2-Fluß, wenn all seine Eckengrade gerade sind.*

(5.3.3) *Beweis.* Nach Satz 5.3.3 hat ein Graph  $G = (V, E)$  genau dann einen 2-Fluß, wenn er einen  $\mathbb{Z}_2$ -Fluß hat, d.h. wenn die konstante Abbildung  $\bar{E} \rightarrow \mathbb{Z}_2$  mit Wert  $\bar{1}$  der Kirchhoff-Regel (F2) genügt. Dies ist genau dann der Fall, wenn alle Eckengrade in  $G$  gerade sind.  $\square$

*gerader  
Graph*

Für den Rest dieses Kapitels nennen wir einen Graphen *gerade*, wenn all seine Eckengrade gerade sind.

**Proposition 5.4.2.** *Ein kubischer Graph hat genau dann einen 3-Fluß, wenn er bipartit ist.*

(0.6.1)  
(5.3.3) *Beweis.* Es sei  $G = (V, E)$  ein kubischer Graph. Wir nehmen zuerst an, daß  $G$  einen 3-Fluß hat, und somit auch einen  $\mathbb{Z}_3$ -Fluß  $f$ . Ist  $C = x_0 \dots x_\ell x_0$  ein Kreis in  $G$ , so ordnet  $f$  den Kanten  $e_i = x_i x_{i+1}$  von  $C$  (mit  $x_{\ell+1} := x_0$ ) bei festem Durchlaufsinne abwechselnd die Werte  $\bar{1}$  und  $\bar{2}$  zu: wäre  $f(e_{i-1}, x_{i-1}, x_i) = f(e_i, x_i, x_{i+1})$  für irgendein  $i$ , so könnte  $f$  für keinen Wert  $\neq \bar{0}$  der dritten Kante an  $x_i$  dort der Bedingung (F2) genügen. Damit hat  $C$  gerade Länge, und  $G$  ist bipartit nach Proposition 0.6.1.

Umgekehrt sei  $G$  nun bipartit, mit Eckenpartition  $\{X, Y\}$ . Die Abbildung  $\bar{E} \rightarrow \mathbb{Z}_3$  definiert durch  $f(e, x, y) := \bar{1}$  und  $f(e, y, x) := \bar{2}$  für alle Kanten  $e = xy$  mit  $x \in X$  und  $y \in Y$  ist ein  $\mathbb{Z}_3$ -Fluß auf  $G$ . Nach Satz 5.3.3 hat  $G$  dann auch einen 3-Fluß.  $\square$

Welche Flußzahl haben die vollständigen Graphen  $K^n$ ? Für ungerades  $n > 1$  gilt  $\varphi(K^n) = 2$  nach Proposition 5.4.1. Für  $n = 2$  haben wir  $\varphi(K^2) = \infty$ , und wie man leicht direkt zeigt (oder aus den Propositionen 5.4.2 und 5.4.5 folgert), ist  $\varphi(K^4) = 4$ . Interessanterweise ist  $K^4$  der einzige vollständige Graph mit Flußzahl 4:

**Proposition 5.4.3.** *Für alle geraden  $n > 4$  gilt  $\varphi(K^n) = 3$ .*

*Beweis.* Nach Proposition 5.4.1 ist  $\varphi(K^n) \geq 3$  für gerade  $n$ ; wir zeigen mit Induktion nach  $n$ , daß jedes  $G = K^n$  mit geradem  $n > 4$  einen 3-Fluß hat. (5.3.3)

Zunächst sei  $n = 6$ . Dann ist  $G$  die kantendisjunkte Vereinigung dreier Graphen  $G_1, G_2, G_3$ , mit  $G_1, G_2 = K^3$  und  $G_3 = K_{3,3}$ . Nach Proposition 5.4.1 haben  $G_1$  und  $G_2$  jeweils einen 2-Fluß, und  $G_3$  hat nach Proposition 5.4.2 einen 3-Fluß. Die Vereinigung dieser Flüsse ist ein 3-Fluß auf  $G$ .

Es sei nun  $n > 6$ , und die Behauptung gelte für  $n - 2$ . Offenbar ist  $G$  die kantendisjunkte Vereinigung eines  $K^{n-2}$  und eines Graphen  $G' = (V', E')$  mit  $G' = \overline{K^{n-2}} * K^2$ . Der  $K^{n-2}$  hat einen 3-Fluß nach Induktionsannahme. Nach Satz 5.3.3 reicht es also, einen  $\mathbb{Z}_3$ -Fluß auf  $G'$  zu finden. Für jede Ecke  $z$  des  $\overline{K^{n-2}} \subseteq G'$  sei  $f_z$  ein  $\mathbb{Z}_3$ -Fluß auf dem Dreieck  $xyz \subseteq G'$ , wobei  $e = xy$  die Kante des  $K^2$  in  $G'$  ist. Es sei  $f: \overline{E'} \rightarrow \mathbb{Z}_3$  die Summe dieser Flüsse. Offenbar ist  $f$  nirgends null, außer möglicherweise in  $(e, x, y)$  und  $(e, y, x)$ . Ist  $f(e, x, y) \neq \bar{0}$ , so ist  $f$  der gesuchte  $\mathbb{Z}_3$ -Fluß auf  $G'$ . Ist  $f(e, x, y) = \bar{0}$ , so ist  $f + f_z$  (für ein beliebiges  $z$ ) ein  $\mathbb{Z}_3$ -Fluß auf  $G'$ . □

**Proposition 5.4.4.** *Jeder 4-kantenzusammenhängende Graph hat einen 4-Fluß.*

*Beweis.* Es sei  $G$  ein 4-kantenzusammenhängender Graph. Nach Korollar 2.5.2 hat  $G$  zwei kantendisjunkte Spannbäume  $T_i, i = 1, 2$ . Zu jeder Kante  $e \notin T_i$  sei  $C_{i,e}$  der eindeutig bestimmte Kreis in  $T_i + e$  und  $f_{i,e}$  ein  $f_{1,e}, f_{2,e}$  “ $\mathbb{Z}_4$ -Fluß der Stärke  $\bar{i}$  um  $C_{i,e}$  herum”, genauer: ein  $\mathbb{Z}_4$ -Rundfluß auf  $G$  mit Werten  $\bar{i}$  und  $-\bar{i}$  auf den Kanten von  $C_{i,e}$  und null sonst. (2.5.2)

Es sei  $f_1 := \sum_{e \notin T_1} f_{1,e}$ . Da jedes  $e \notin T_1$  auf nur einem Kreis  $C_{1,e'}$  liegt, nämlich für  $e' = e$ , nimmt  $f_1$  außerhalb von  $T_1$  nur die Werte  $\bar{1}$  und  $-\bar{1}$  ( $= \bar{3}$ ) an. Weiter sei f<sub>1</sub>

$$E := \{e \in E(T_1) \mid f_1(e) = \bar{0}\}$$

und  $f_2 := \sum_{e \in E} f_{2,e}$ . Wie oben nimmt  $f_2$  auf  $E$  nur den Wert  $\bar{2}$  ( $= -\bar{2}$ ) an. Als Summe von lauter  $\mathbb{Z}_4$ -Rundflüssen ist auch  $f := f_1 + f_2$  ein  $\mathbb{Z}_4$ -Rundfluß auf  $G$ . Und überdies ist  $f$  nirgends null: auf Kanten aus  $E$  ist  $f$  konstant  $\bar{2}$ , auf Kanten von  $T_1 - E$  ist  $f = f_1$  (und damit nicht null nach Wahl von  $E$ ), und auf allen Kanten außerhalb von  $T_1$  ist  $f$  entweder  $\bar{1}$  oder  $\bar{3}$ . Somit ist  $f$  ein  $\mathbb{Z}_4$ -Fluß auf  $G$ , und die Behauptung folgt mit Satz 5.3.3. f<sub>2</sub>  
f □

Die folgende Proposition beschreibt die Graphen mit einem 4-Fluß im Rückgriff auf diejenigen mit einem 2-Fluß.

**Proposition 5.4.5.**

- (i) Ein Graph hat genau dann einen 4-Fluß, wenn er die Vereinigung zweier gerader Teilgraphen ist.
- (ii) Ein kubischer Graph hat genau dann einen 4-Fluß, wenn er 3-kantenfärbbar ist.

(5.3.2)  
(5.3.3)

*Beweis.* Es sei  $\mathbb{Z}_2^2$  die Klein'sche Vierergruppe in ihrer Darstellung als direktes Produkt  $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$  mit komponentenweiser Addition. (Die Elemente von  $\mathbb{Z}_2^2$  sind also die Paare  $(a, b)$  mit  $a, b \in \mathbb{Z}_2$ , und es gilt  $(a, b) + (a', b') = (a + a', b + b')$ .) Nach Korollar 5.3.2 und Satz 5.3.3 hat ein Graph genau dann einen 4-Fluß, wenn er einen  $\mathbb{Z}_2^2$ -Fluß hat.

(i) Die behauptete Äquivalenz folgt mit der Vorbemerkung direkt aus Proposition 5.4.1.

(ii) Es sei  $G = (V, E)$  ein kubischer Graph. Wir nehmen zuerst an, daß  $G$  einen  $\mathbb{Z}_2^2$ -Fluß  $f$  hat und definieren eine Kantenfärbung  $E \rightarrow \mathbb{Z}_2^2 \setminus \{0\}$ . Wegen  $a = -a$  für alle  $a \in \mathbb{Z}_2^2$  gilt  $f(\bar{e}) = f(\bar{e})$  für jedes  $\bar{e} \in \bar{E}$ ; wir färben die Kante  $e$  mit dieser Farbe  $f(\bar{e})$ . Trügen nun zwei Kanten mit gemeinsamer Endecke  $v$  die gleiche Farbe, so summierten sich die Werte von  $f$  auf diesen beiden Kanten zu 0, und die dritte mit  $v$  inzidente Kante hätte nach (F2) den  $f$ -Wert 0. Dies widerspricht der Annahme, daß  $f$  als  $\mathbb{Z}_2^2$ -Fluß nirgends null ist; unsere Kantenfärbung von  $G$  ist also korrekt.

Da die drei Elemente von  $\mathbb{Z}_2^2 \setminus \{0\}$  sich zu 0 summieren, definiert umgekehrt jede 3-Kantenfärbung  $c: E \rightarrow \mathbb{Z}_2^2 \setminus \{0\}$  vermöge  $f(\bar{e}) = f(\bar{e}) = c(e)$  für alle  $\bar{e} \in \bar{E}$  einen  $\mathbb{Z}_2^2$ -Fluß auf  $G$ .  $\square$

**Korollar 5.4.6.** Ein kubischer 3-kantenfärbbarer Graph hat keine Brücke.  $\square$

## 5.5 Flüsse und Färbungen

In diesem Abschnitt zeigen wir einen ganz erstaunlichen Zusammenhang zwischen Flüssen und Färbungen: jeder  $k$ -Eckenfärbung eines ebenen Multigraphen entspricht ein  $k$ -Fluß auf seinem Dual, und umgekehrt. Die Untersuchung von Rundflüssen auf nicht ebenen Multigraphen erweist sich damit als eine natürliche Verallgemeinerung der bekannten (Landkarten-) Färbungsprobleme in der Ebene.

$G = (V, E)$   
 $G^*$

Es seien  $G = (V, E)$  und  $G^* = (V^*, E^*)$  duale ebene Multigraphen. Der Einfachheit halber nehmen wir zunächst an, daß  $G$  und  $G^*$  weder

Brücken noch Schlingen haben<sup>5</sup> und nicht trivial sind. Für Kantenmengen  $F \subseteq E$  schreiben wir

$$F^* := \{e^* \in E^* \mid e \in F\}. \quad F^*$$

Da  $e \mapsto e^*$  eine Bijektion von  $E$  nach  $E^*$  ist, schreiben wir auch beliebig gegebene Teilmengen von  $E^*$  meist in der Form  $F^*$  und sehen  $F \subseteq E$  als hierdurch mitdefiniert an.

Wie können wir die in einem Rundfluß  $g$  auf  $G^*$  enthaltene Information mittels der Dualitätsbeziehung zwischen  $G$  und  $G^*$  auch für  $G$  nutzbar machen? Unsere einfachste allgemeine Aussage über Rundflüsse ist Proposition 5.1.1: danach ist  $g(X, \overline{X}) = 0$  für alle  $X \subseteq V^*$ . Den minimalen Schnitten  $E^*(X, \overline{X})$  in  $G^*$  entsprechen nach Proposition 3.6.1 gerade die Kreise in  $G$ . Betrachten wir nun die Hintereinanderausführung  $f$  der Abbildungen  $e \mapsto e^*$  und  $g$  und summieren  $f$  über die Kanten eines beliebigen Kreises in  $G$ , so sollte dann auch hier das Ergebnis null sein.

Natürlich hat die Sache noch einen technischen Haken. Da  $g$  nicht auf  $E^*$  sondern auf  $\vec{E}^*$  definiert ist, ist auch  $f$  nicht wie oben definierbar: zuvor müssen wir die Bijektion  $e \mapsto e^*$  zu einer Bijektion von  $\vec{E}$  nach  $\vec{E}^*$  verfeinern, jedem  $\vec{e} \in \vec{E}$  also kanonisch eine der beiden Richtungen von  $e^*$  zuordnen. Dazu dient unser erstes Lemma. Danach zeigen wir dann, daß  $f$  sich in der Tat entlang Kreisen von  $G$  zu null summiert.

Ist  $C = v_0 \dots v_{\ell-1} v_0$  ein Kreis mit Kanten  $e_i = v_i v_{i+1}$  (und  $v_\ell := v_0$ ), so nennen wir

$$\vec{C} := \{(e_i, v_i, v_{i+1}) \mid i < \ell\} \quad \vec{C}$$

einen *Kreis mit Drehsinn*. Die Definition von  $\vec{C}$  hängt natürlich von der Eckenaußenzählung von  $C$  ab: jeder Kreis in  $G$  hat genau zwei Drehsinne. Da umgekehrt jedoch  $C$  aus  $\vec{C}$  rekonstruierbar ist, werden wir informell auch dann über  $C$  sprechen, wenn formal nur  $\vec{C}$  definiert wurde.

Kreis mit  
Drehsinn

**Lemma 5.5.1.** *Es existiert eine Bijektion  $*$ :  $\vec{e} \mapsto \vec{e}^*$  von  $\vec{E}$  nach  $\vec{E}^*$  mit den folgenden Eigenschaften.*

- (i) Die  $\vec{e}^*$  zugrundeliegende Kante ist jeweils  $e^*$ , d.h.  $\vec{e}^*$  ist eine der beiden Richtungen  $\vec{e}^*, \overleftarrow{e}^*$  von  $e^*$ .
- (ii) Ist  $C \subseteq G$  ein Kreis,  $F := E(C)$ , und  $X \subseteq V^*$  so daß  $F^* = E^*(X, \overline{X})$ , dann existiert ein Drehsinn  $\vec{C}$  von  $C$  mit  $\{\vec{e}^* \mid \vec{e} \in \vec{C}\} = E^*(X, \overline{X})$ .

---

<sup>5</sup> Wollten wir diese zulassen, so müßten wir im folgenden auch ebenen Schlingen zwei Richtungen geben. Dies ist natürlich ohne weiteres möglich, verträgt sich aber nicht so gut mit unserer Konvention, daß (abstrakte) Schlingen nur eine Richtung haben.



Der Beweis von Lemma 5.5.1 ist nicht ganz trivial: er beruht auf einer topologischen Eigenschaft der Ebene, ihrer sogenannten *Orientierbarkeit*, und ist im Rahmen dieses Abschnitts nicht darstellbar. Gleichwohl ist die Aussage des Lemmas anschaulich einfach und plausibel. Definieren wir nämlich etwa für  $e = vw$  und  $e^* = xy$  die Zuordnung  $(e, v, w) \mapsto (e, v, w)^* \in \{(e^*, x, y), (e^*, y, x)\}$  stets dadurch, daß wir  $e$  (und seine Endecken) in  $e^*$  (und seine Endecken) durch eine Drehung im Uhrzeigersinn überführen (Abb. 5.5.1), so genügt die Abbildung  $\vec{e} \mapsto \vec{e}^*$  der Aussage des Lemmas.

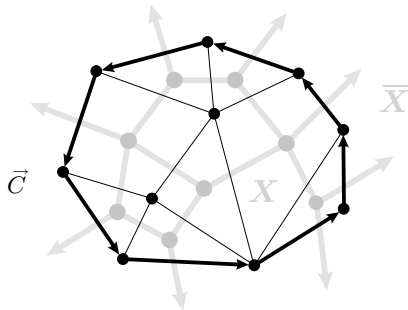


Abb. 5.5.1. Gerichtete Kreis-Schnitt-Dualität

$f, g$  Für eine abelsche Gruppe  $H$  seien  $f: \vec{E} \rightarrow H$  und  $g: \vec{E}^* \rightarrow H$  zwei Abbildungen mit

$$f(\vec{e}) = g(\vec{e}^*)$$

für alle  $\vec{e} \in \vec{E}$ . Für  $\vec{F} \subseteq \vec{E}$  setzen wir

$$f(\vec{C}) \text{ etc.} \quad f(\vec{F}) := \sum_{\vec{e} \in \vec{F}} f(\vec{e}).$$

### Lemma 5.5.2.

- (i) Die Abbildung  $g$  erfüllt genau dann (F1), wenn  $f$  es tut.
- (ii) Die Abbildung  $g$  ist genau dann ein Rundfluß auf  $G^*$ , wenn  $f$  (F1) erfüllt und  $f(\vec{C}) = 0$  gilt für jeden Kreis  $\vec{C}$  in  $G$  mit Drehsinn.

$(3.6.1)$   
 $(5.1.1)$  *Beweis.* Aussage (i) folgt aus der Bijektivität der Abbildung  $\vec{e} \mapsto \vec{e}^*$  und Lemma 5.5.1 (i).

Zur Vorwärtsrichtung der Aussage (ii) nehmen wir an, daß  $g$  ein Rundfluß auf  $G^*$  ist und betrachten einen Kreis  $C \subseteq G$  mit gegebenem Drehsinn. Es sei  $F := E(C)$ . Nach Proposition 3.6.1 ist  $F^*$  ein minimaler Schnitt in  $G^*$ , also  $F^* = E^*(X, \bar{X})$  für ein geeignetes  $X \subseteq V^*$ . Nach Definition von  $f$  und  $g$ , Lemma 5.5.1 (ii) und Proposition 5.1.1 ist

$$f(\vec{C}) = \sum_{\vec{e} \in \vec{C}} f(\vec{e}) = \sum_{\vec{d} \in \vec{E}^*(X, \bar{X})} g(\vec{d}) = g(X, \bar{X}) = 0$$

für einen der beiden Drehsinne  $\vec{C}$  von  $C$ . Wegen  $f(\vec{C}) = -f(\vec{C})$  ist dann auch der entsprechende Wert für unseren gegebenen Drehsinn von  $C$  null.

Zur Rückrichtung ist zu zeigen, daß  $g$  der Kirchhoff-Regel (F2) genügt, an jeder Ecke  $x \in V^*$  also  $g(x, V^*) = 0$  gilt. Wir zeigen dazu, daß  $g(x, V(B)) = 0$  ist für jeden  $x$  enthaltenden Block  $B$  des Graphen  $G^*$ ; da jede mit  $x$  inzidente Kante von  $G^*$  in genau einem solchen Block liegt, ist dann auch  $g(x, V^*) = 0$ .

Es sei also  $x \in V^*$  gegeben und  $B$  ein beliebiger  $x$  enthaltender Block von  $G^*$ . Da  $G^*$  als nicht triviales Dual keine isolierten Ecken hat, ist  $B - x \neq \emptyset$ . Wir bezeichnen mit  $F^*$  die Menge aller mit  $x$  inzidenten Kanten von  $B$  (Abb. 5.5.2), und mit  $X$  die Eckenmenge der  $x$  enthaltenden Komponente von  $G^* - F^*$ . Dann gilt  $\emptyset \neq V(B - x) \subseteq \bar{X}$ , wegen der Maximalität von  $B$  als artikulationsfreier Teilgraph. Nach Definition von  $X$  ist daher

$$F^* = E^*(X, \bar{X}), \tag{1}$$

d.h.  $F^*$  ist ein Schnitt in  $G^*$ . Da  $G^*$  als Dual zusammenhängend ist, ist auch  $G^*[\bar{X}]$  zusammenhängend:  $x$  trennt  $B$  nicht, und von jeder Ecke

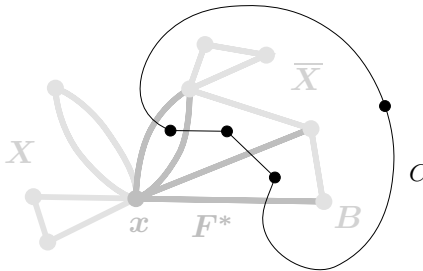


Abb. 5.5.2. Der Schnitt  $F^*$  in  $G^*$

aus  $\bar{X}$  führt in  $G^*$  ein Weg  $P$  nach  $x$ ; dessen vorletzte Ecke liegt in  $B - x$ , und es gilt  $P\hat{x} \subseteq G^*[\bar{X}]$ . Da  $X$  und  $\bar{X}$  somit beide in  $G^*$  zusammenhängend sind, ist  $F^*$  sogar ein minimaler Schnitt in  $G^*$ ; es sei  $C$  der nach Proposition 3.6.1 existierende Kreis in  $G$  mit  $E(C) = F$ . Nach Lemma 5.5.1 (ii) hat  $C$  einen Drehsinn  $\vec{C}$  mit  $\{\vec{e}^* \mid \vec{e} \in \vec{C}\} = \vec{E}^*(X, \bar{X})$ . Nach (1) gilt jedoch  $\vec{E}^*(X, \bar{X}) = \vec{E}^*(x, V(B))$ , und es folgt

$$g(x, V(B)) = g(X, \bar{X}) = f(\vec{C}) = 0$$

nach Definition von  $f$  und  $g$ . □

Mit Hilfe von Lemma 5.5.2 können wir nun unseren Dualitätssatz zwischen Färbungen und Flüssen ebener Graphen beweisen. Ist  $P = v_0 \dots v_\ell$  ein Weg mit Kanten  $e_i = v_i v_{i+1}$  ( $i < \ell$ ), so setzen wir (abhängig von der genannten Eckenfolge von  $P$ )

$$\vec{P} := \{(e_i, v_i, v_{i+1}) \mid i < \ell\} \tag{P}$$

$v_0 \rightarrow v_\ell$ -  
Weg

und nennen  $\vec{P}$  einen  $v_0 \rightarrow v_\ell$ -Weg. Wiederum ist durch  $\vec{P}$  auch  $P$  implizit gegeben.

**Satz 5.5.3.** (Tutte 1954)

Für jedes Paar dualer ebener Multigraphen  $G$  und  $G^*$  gilt

$$\chi(G) = \varphi(G^*).$$

(0.5.5) *Beweis.* Es sei  $G =: (V, E)$  und  $G^* =: (V^*, E^*)$ . Für  $|G| \in \{1, 2\}$  ist die Behauptung leicht geprüft; wir nehmen  $|G| \geq 3$  an und verwenden Induktion nach der Anzahl der Brücken in  $G$ . Ist  $e \in G$  eine Brücke, so ist  $e^*$  eine Schlinge von  $G^*$ , und  $G^* - e^*$  dual zu  $G/e$ . (Warum?) Nach Induktionsannahme gilt daher

$$\chi(G) = \chi(G/e) = \varphi(G^* - e^*) = \varphi(G^*);$$

bei der ersten und letzten Gleichheit geht ein, daß  $e$  wegen  $|G| \geq 3$  nicht die einzige Kante von  $G$  ist.

Es ist also nur der Induktionsanfang zu zeigen: wir nehmen an, daß  $G$  keine Brücke hat. Hat  $G$  eine Schlinge, so hat  $G^*$  eine Brücke, und es gilt nach Konvention  $\chi(G) = \infty = \varphi(G^*)$ . Im folgenden sei  $G$  daher auch schlingenlos. Damit ist  $\chi(G)$  endlich; wir zeigen für beliebiges  $k \geq 2$ , daß  $G$  genau dann  $k$ -färbbar ist, wenn  $G^*$  einen  $k$ -Fluß besitzt. Da  $G$  – und damit auch  $G^*$  – weder Brücken noch Schlingen hat, sind die Lemmas 5.5.1 und 5.5.2 auf  $G$  und  $G^*$  anwendbar. Es sei  $\vec{e} \mapsto \vec{e}^*$  die Bijektion zwischen  $\vec{E}$  und  $\vec{E}^*$  aus Lemma 5.5.1.

Wir nehmen zuerst an, daß  $G^*$  einen  $k$ -Fluß hat. Trivialerweise hat  $G^*$  dann auch einen  $\mathbb{Z}_k$ -Fluß  $g$ . Wie zuvor sei  $f: \vec{E} \rightarrow \mathbb{Z}_k$  definiert durch  $f(\vec{e}) := g(\vec{e}^*)$ . Wir werden mit Hilfe von  $f$  eine Eckenfärbung  $c: V \rightarrow \mathbb{Z}_k$  von  $G$  konstruieren.

Dazu sei  $T$  ein normaler Spannbaum in  $G$ , sagen wir mit Wurzel  $r$ . Wir setzen  $c(r) := \bar{0}$ . Für jede andere Ecke  $v \in V$  sei  $c(v) := f(\vec{P})$ , wobei  $\vec{P}$  der Weg von  $r$  nach  $v$  in  $T$  sei. Um zu prüfen, ob damit benachbarte Ecken stets verschieden gefärbt sind, betrachten wir eine beliebige Kante  $e = vw \in E$ . Da  $T$  normal ist, dürfen wir annehmen, daß  $v < w$  gilt in der Baumordnung von  $T$ . Ist  $e$  eine Kante von  $T$ , so gilt dann  $c(w) - c(v) = f(e, v, w)$  nach Definition von  $c$ , und somit  $c(v) \neq c(w)$ , da  $g$  (und damit  $f$ ) ja nirgends null ist. Ist  $e \notin T$ , so sei  $\vec{P}$  der Weg von  $v$  nach  $w$  in  $T$ . Dann gilt

$$c(w) - c(v) = f(\vec{P}) = -f(e, w, v) = f(e, v, w) \neq \bar{0}$$

nach Lemma 5.5.2 (ii).

Umgekehrt nehmen wir nun  $\chi(G) \leq k$  an; es sei  $c: V \rightarrow \{1, \dots, k\}$  eine  $k$ -Färbung von  $G$ . Wir definieren  $f: \vec{E} \rightarrow \mathbb{Z}$  durch

$$f(e, v, w) := c(w) - c(v),$$

und  $g: \vec{E}^* \rightarrow \mathbb{Z}$  durch  $g(\vec{e}^*) := f(\vec{e})$ . Offenbar erfüllt  $f$  (F1) und hat seine Werte in  $\{\pm 1, \dots, \pm(k-1)\}$ ; nach Lemma 5.5.2 (i) gilt beides dann auch für  $g$ . Nach Definition von  $f$  gilt überdies  $f(\vec{C}) = 0$  für jeden Kreis  $\vec{C}$  mit Drehsinn. Nach Lemma 5.5.2 (ii) ist  $g$  daher ein  $k$ -Fluß.  $\square$

## 5.6 Die Tutte'schen Flußvermutungen

Wie bestimmen wir die Flußzahl eines gegebenen Graphen? Hat überhaupt jeder brückenlose Graph eine Flußzahl, einen  $k$ -Fluß für irgend-ein  $k$ ? Können Flußzahlen beliebig groß werden, oder gibt es ein  $k \in \mathbb{N}$  mit  $\varphi(G) \leq k$  für alle brückenlosen Graphen  $G$ ? Können wir zu gegebenem  $k$  die Graphen mit einem  $k$ -Fluß charakterisieren?

Von den vier obigen Fragen werden wir in diesem Abschnitt im wesentlichen nur die zweite und dritte beantworten: jeder brückenlose Multigraph hat einen 6-Fluß. Ein Graph hat also insbesondere genau dann eine Flußzahl, wenn er keine Brücke hat. Die Frage nach einer Charakterisierung der Graphen mit einem  $k$ -Fluß stellt sich nach Proposition 5.4.1 damit nur noch für  $k = 3, 4, 5$ . Die folgenden Vermutungen von Tutte, dem Begründer der algebraischen Flußtheorie, geben mögliche Teilantworten.

Die bekannteste und älteste der Tutte'schen Vermutungen ist seine sogenannte *Fünfflußvermutung*:

**Fünfflußvermutung.** (Tutte 1954)

*Jeder brückenlose Multigraph hat einen 5-Fluß.*

Welche Graphen haben einen 4-Fluß? Nach Proposition 5.4.4 gehören die 4-kantenzusammenhängenden Graphen dazu. Der Petersen-Graph (Abb. 5.6.1) andererseits ist ein Beispiel eines brückenlosen Graphen ohne 4-Fluß: da er kubisch aber nicht 3-kantenfärbbar ist (Übung zu Kapitel 4), kann er nach Proposition 5.4.5 (ii) keinen 4-Fluß haben.

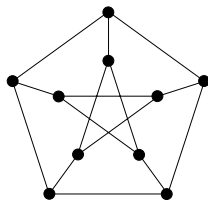


Abb. 5.6.1. Der Petersen-Graph

Die Tutte'sche *Vierflußvermutung* besagt nun, daß der Petersen-Graph in jedem Graphen ohne 4-Fluß auftreten muß:

**Vierflußvermutung.** (Tutte 1966)

*Jeder brückenlose Multigraph, der nicht den Petersen-Graphen als Minor enthält, hat einen 4-Fluß.*

Nach Proposition 0.7.2 kann man in der Vierflußvermutung das Wort "Minor" durch "topologischen Minor" ersetzen.

Selbst wenn sie wahr ist, ist die Vierflußvermutung natürlich nicht bestmöglich: ein  $K^{11}$  beispielsweise enthält den Petersen-Graphen als Minor, hat aber dennoch einen 4-Fluß (und sogar einen 2-Fluß). Die Vermutung erscheint natürlicher für weniger dichte Graphen, und in der Tat bilden die kubischen Graphen einen wesentlichen Spezialfall; siehe dazu die Notizen.

*Snark*

Einen kubischen brückenlosen Graphen oder Multigraphen ohne 4-Fluß (äquivalent: ohne 3-Kantenfärbung) nennt man einen *Snark*. Die Vierflußvermutung für kubische Graphen besagt also, daß jeder Snark den Petersen-Graphen zum Minor hat; der Petersen-Graph ist also in diesem Sinne der kleinste Snark. Snarks treten sowohl beim Vierfarbensatz als auch bei der Fünfflußvermutung als harter Kern des Problems auf: der Vierfarbensatz ist äquivalent zu der Aussage, daß es keinen plättbaren Snark gibt (Übung), und man kann zeigen, daß die Fünfflußvermutung bereits dann wahr ist, wenn sie für alle Snarks gilt.<sup>6</sup> Obwohl die Snarks eine so spezielle Graphenklasse bilden, scheint keines der genannten Probleme durch die Reduktion auf Snarks wesentlich einfacher zu werden.<sup>7</sup>

Wir erwähnen noch die etwas weniger bekannte *Dreiflußvermutung*:

**Dreiflußvermutung.** (Tutte 1972)

*Jeder Multigraph ohne einen Schnitt aus genau einer oder genau drei Kanten hat einen 3-Fluß.*

Auch die Dreiflußvermutung ist natürlich nicht bestmöglich: es gibt durchaus Graphen mit Schnitten aus drei Kanten, die einen 3-Fluß haben (Übung).

Alle drei Flußvermutungen sind nach dem Dualitätssatz 5.5.3 wahr für plättbare Graphen, und sicher auch daher motiviert: die Dreiflußvermutung für plättbare Graphen ist äquivalent zum Satz 4.1.3 von

---

<sup>6</sup> Entsprechendes gilt für eine andere bekannte Vermutung, die sogenannte *cycle double cover conjecture* (siehe Übungen).

<sup>7</sup> Die Unberechenbarkeit von Snarks wurde bereits gezeigt von Lewis Carroll, *The Hunting of the Snark*, Macmillan 1876.

Grötzsch, die Vierflußvermutung zum Vierfarbensatz (der Petersen-Graph ist nicht plättbar), und die Fünfflußvermutung zum Fünffarbensatz.

Zum Schluß beweisen wir jetzt den Hauptsatz des Kapitels:

**Satz 5.6.1.** (Seymour 1981)

*Jeder brückenlose Graph hat einen 6-Fluß.*

*Beweis.* Es sei  $G = (V, E)$  ein Graph ohne Brücke. Da 6-Flüsse auf den Komponenten von  $G$  sich zu einem 6-Fluß auf  $G$  addieren, dürfen wir  $G$  als zusammenhängend voraussetzen; da  $G$  keine Brücke hat, ist  $G$  damit 2-kantenzusammenhängend. Nach dem Satz von Menger (2.3.5 (ii)) enthält jeder 2-kantenzusammenhängende Graph zu gegebenen Ecken  $v, w$  einen  $v$  und  $w$  enthaltenden zusammenhängenden geraden Teilgraphen – z.B. die Vereinigung zweier kantendisjunkter  $v-w$ -Wege. Dies werden wir im folgenden verwenden.

(2.3.5)  
(5.1.1)  
(5.4.1)

Wir konstruieren eine Folge  $H_0, \dots, H_n$  disjunkter zusammenhängender und gerader Teilgraphen von  $G$ , sowie eine Folge  $F_1, \dots, F_n$  nicht leerer Kantenmengen zwischen diesen Teilgraphen. Die  $F_i$  werden jeweils nur eine oder zwei Kanten enthalten, und zwar zwischen  $H_i$  und  $H_0 \cup \dots \cup H_{i-1}$ . Wir schreiben  $H_i =: (V_i, E_i)$ ,

$H_0, \dots, H_n$   
 $F_1, \dots, F_n$

$V_i, E_i$

$$H^i := (H_0 \cup \dots \cup H_i) + (F_1 \cup \dots \cup F_i)$$

$H^i$

und  $H^i =: (V^i, E^i)$ . Beachte, daß jedes  $H^i = (H^{i-1} \cup H_i) + F_i$  zusammenhängend ist (Induktion nach  $i$ ). Aus unserer Annahme, daß  $H_i$  gerade sei, folgt nach Proposition 5.4.1 (oder direkt mit Proposition 0.2.1), daß  $H_i$  keine Brücke hat.

$V^i, E^i$

Als  $H_0$  wählen wir einen beliebigen  $K^1$  in  $G$ . Für ein  $i > 0$  seien nun  $H_0, \dots, H_{i-1}$  und  $F_1, \dots, F_{i-1}$  bereits definiert. Ist  $V^{i-1} = V$ , so beenden wir die Konstruktion und setzen  $i-1 =: n$ . Anderenfalls sei  $X_i \subseteq \overline{V^{i-1}}$  minimal mit  $X_i \neq \emptyset$  und

$n$   
 $X_i$

$$|E(X_i, \overline{V^{i-1}} \setminus X_i)| \leq 1 \tag{1}$$

(Abb. 5.6.2); ein solches  $X_i$  existiert, da  $\overline{V^{i-1}}$  ein Kandidat ist. Da  $G$  2-kantenzusammenhängend ist, folgt aus (1)  $E(X_i, V^{i-1}) \neq \emptyset$ . Wegen der Minimalität von  $X_i$  ist  $G[X_i]$  zusammenhängend und brückenlos, also 2-kantenzusammenhängend oder ein  $K^1$ . Als Elemente von  $F_i$  wählen wir beliebig eine oder zwei Kanten aus  $E(X_i, V^{i-1})$ , wenn möglich zwei. Als  $H_i$  wählen wir einen beliebigen zusammenhängenden geraden Teilgraphen von  $G[X_i]$ , der die Enden der Kanten aus  $F_i$  in  $X_i$  enthält.

$F_i$

Zum Schluß unserer Konstruktion setzen wir  $H^n =: H$  und  $E' := E \setminus E(H)$ . Nach Definition von  $n$  ist  $H$  ein aufspannender zusammenhängender Teilgraph von  $G$ .

$H$   
 $E'$

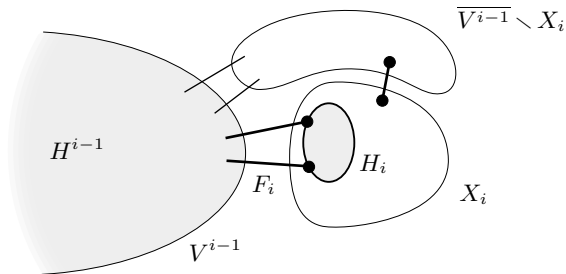


Abb. 5.6.2. Konstruktion der  $H_i$  und  $F_i$

$f_n, \dots, f_0$   
 $\overline{C}_e$   
 $f_e$   
 $f_n$

Wir definieren jetzt rückwärts-induktiv eine Folge  $f_n, \dots, f_0$  von  $\mathbb{Z}_3$ -Rundflüssen auf  $G$ . Für jede Kante  $e \in E'$  sei  $\overline{C}_e$  ein  $e$  enthaltender Kreis mit Drehsinn in  $H + e$ , und  $f_e$  ein positiver Fluß um  $\overline{C}_e$  herum; formal sei  $f_e$  ein  $\mathbb{Z}_3$ -Rundfluß auf  $G$  mit  $f_e^{-1}(\overline{0}) = \overline{E} \setminus (\overline{C}_e \cup \overline{C}_e)$ . Es sei  $f_n$  die Summe all dieser  $f_e$ . Da jedes  $e' \in E'$  nur auf einem der Kreise  $C_e$  liegt (nämlich auf  $C_{e'}$ ), ist  $f_n(\overline{e}) \neq \overline{0}$  für alle  $\overline{e} \in \overline{E}'$ .

Es seien nun  $\mathbb{Z}_3$ -Rundflüsse  $f_n, \dots, f_i$  auf  $G$  für ein  $i \leq n$  bereits definiert, und es gelte

$$f_i(\overline{e}) \neq \overline{0} \text{ für alle } \overline{e} \in \overline{E}' \cup \bigcup_{j>i} \overline{F}_j; \tag{2}$$

$\overline{F}_j$   
 $e$

hier sei  $\overline{F}_j := \{ \overline{e} \in \overline{E} \mid e \in F_j \}$ . Wir wollen  $f_{i-1}$  so definieren, daß (2) auch für  $i - 1$  gilt.

Dazu betrachten wir zuerst den Fall, daß  $|F_i| = 1$  ist, etwa  $F_i = \{e\}$ . Wir setzen in diesem Fall  $f_{i-1} := f_i$ , müssen also zeigen, daß  $f_i(\overline{e}) \neq \overline{0}$  ist für die beiden Richtungen  $\overline{e}$  von  $e$ . Aus  $|F_i| = 1$  folgt nach Wahl von  $F_i$ , daß  $G$  wirklich nur eine  $X_i - V^{i-1}$ -Kante enthält. Da  $G$  2-kantenzusammenhängend ist, enthält  $G$  dann noch mindestens – und wegen (1) genau – eine Kante  $e'$  zwischen  $X_i$  und  $\overline{V^{i-1}} \setminus X_i$ . Wir zeigen, daß  $f_i(\overline{e}') \neq \overline{0}$  ist für die beiden Richtungen  $\overline{e}'$  von  $e'$ ; da  $\{e, e'\}$  ein Schnitt in  $G$  ist, ist nach Proposition 5.1.1 dann auch jeweils  $f_i(\overline{e}) \neq \overline{0}$ .

$e'$

Wir beweisen  $f_i(\overline{e}') \neq \overline{0}$  mit (2): wir zeigen, daß  $e' \in E' \cup \bigcup_{j>i} F_j$  ist, d.h. daß  $e'$  in keinem  $H_k$  liegt und in keinem  $F_j$  mit  $j \leq i$ . Da beide Endecken von  $e'$  in  $\overline{V^{i-1}}$  liegen, liegt  $e'$  sicher in keinem  $F_j$  mit  $j \leq i$  und in keinem  $H_k$  mit  $k < i$ . Jedes  $H_k$  mit  $k \geq i$  ist aber ein Teilgraph von  $G[\overline{V^{i-1}}]$ . Da  $e'$  eine Brücke von  $G[\overline{V^{i-1}}]$  ist aber  $H_k$  keine Brücke hat, kann  $e'$  daher nicht in  $H_k$  liegen. Damit erfüllt  $f_{i-1}$  im betrachteten Fall in der Tat die Aussage (2) für  $i - 1$ .

$e_1, e_2$   
 $C$

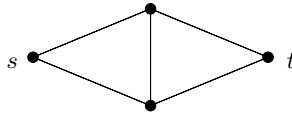
Wir betrachten nun den Fall  $|F_i| = 2$ , etwa  $F_i = \{e_1, e_2\}$ . Da sowohl  $H_i$  als auch  $H^{i-1}$  zusammenhängend ist, gibt es in  $H^i = (H_i \cup H^{i-1}) + F_i$  einen Kreis  $C$ , der die Kanten  $e_1$  und  $e_2$  enthält. Ist  $f_i$  auf beiden Kanten nicht null, so setzen wir wieder  $f_{i-1} := f_i$ . Anderenfalls haben  $e_1$  und  $e_2$  Richtungen  $\overline{e}_1$  und  $\overline{e}_2$  mit oBdA  $f_i(\overline{e}_1) = \overline{0}$  und  $f_i(\overline{e}_2) \in \{\overline{0}, \overline{1}\}$ . Es sei  $\overline{C}$  der Drehsinn von  $C$  mit  $\overline{e}_2 \in \overline{C}$ , und  $g$  ein Fluß der Stärke

$\bar{1}$  um  $\bar{C}$  herum (formal: ein  $\mathbb{Z}_3$ -Rundfluß auf  $G$  mit  $g(\bar{e}_2) = \bar{1}$  und  $g^{-1}(\bar{0}) = \bar{E} \setminus (\bar{C} \cup \bar{C})$ ). Wir setzen dann  $f_{i-1} := f_i + g$ . Nach Wahl der Richtungen  $\bar{e}_1$  und  $\bar{e}_2$  ist  $f_{i-1}$  auf beiden Kanten nicht null. Da  $f_{i-1}$  auf ganz  $\bar{E}' \cup \bigcup_{j>i} \bar{F}_j$  mit  $f_i$  übereinstimmt und (2) für  $i$  gilt, gilt (2) somit wiederum auch für  $i-1$ .

Mit  $f_0$  erhalten wir schließlich einen  $\mathbb{Z}_3$ -Rundfluß auf  $G$ , der nirgends null ist außer möglicherweise auf Kanten der Teilgraphen  $H_i$ ,  $i = 0, \dots, n$ . Durch Komposition mit der Abbildung  $\bar{h} \mapsto 2\bar{h}$  von  $\mathbb{Z}_3$  nach  $\mathbb{Z}_6$  ( $h \in \{1, 2\}$ ) wird  $f_0$  zu einem  $\mathbb{Z}_6$ -Rundfluß  $f$  auf  $G$  mit Werten in  $\{\bar{0}, \bar{2}, \bar{4}\}$  für alle Kanten, die in einem  $H_i$  liegen, und mit Werten in  $\{\bar{2}, \bar{4}\}$  für alle anderen Kanten. Addieren wir zu  $f$  einen 2-Fluß auf  $H_i$  für jedes  $i$  (formal: einen  $\mathbb{Z}_6$ -Rundfluß auf  $G$  mit Werten in  $\{\bar{1}, -\bar{1}\}$  auf den Kanten von  $H_i$  und  $\bar{0}$  sonst; solche Flüsse existieren nach Proposition 5.4.1), so erhalten wir einen  $\mathbb{Z}_6$ -Rundfluß auf  $G$ , der nirgends null ist. Nach Satz 5.3.3 hat  $G$  damit einen 6-Fluß, wie behauptet.  $\square$

## Übungen

1.  $\bar{\quad}$  Beweise Proposition 5.2.1 mit Induktion nach  $|S|$ .
2. (i)  $\bar{\quad}$  Finde zu jedem  $n \in \mathbb{N}$  eine Kapazitätsfunktion für das abgebildete Netzwerk, bei der der Algorithmus aus dem Beweis des *max-flow min-cut theorem* bei ungünstiger Wahl der den Fluß erhöhenden Wege  $W$  mehr als  $n$  solcher Wege konstruiert.



(ii)  $\bar{\quad}$  Zeige, daß bei der Wahl stets *kürzester* den Fluß erhöhender Wege  $W$  die Anzahl der Iterationen (d.h. der konstruierten Wege) durch eine Funktion in der Ecken- oder Kantenzahl des Netzwerks beschränkbar ist, und finde eine solche Schranke.

3.  $\bar{\quad}$  Leite aus dem *max-flow min-cut theorem* den Satz von Menger (2.3.4) her.

(Tip: Die Kantenversion ist einfach. Simuliere die Eckensversion durch Anwendung der Kantenversion auf einen geeigneten Hilfsgraphen.)

4.  $\bar{\quad}$  Es sei  $f$  ein  $H$ -Rundfluß auf  $G$  und  $g: H \rightarrow H'$  ein Gruppenhomomorphismus. Zeige, daß  $g \circ f$  ein  $H'$ -Rundfluß auf  $G$  ist. Ist  $g \circ f$  auch ein  $H'$ -Fluß, wenn  $f$  ein  $H$ -Fluß ist?
5.  $\bar{\quad}$  Zeige, daß ein Graph genau dann einen  $k$ -Fluß hat (zu gegebenem  $k$ ), wenn jeder seiner Blöcke einen  $k$ -Fluß hat.



- 6.<sup>-</sup> Zeige, daß  $\varphi(G/e) \leq \varphi(G)$  gilt für jeden Multigraphen  $G$  und jede Kante  $e \in G$ . Ist die Klasse aller Multigraphen mit einem  $k$ -Fluß (für festes  $k$ ) somit unter Minorenbildung abgeschlossen?
- 7.<sup>-</sup> Bestimme die Flußzahl von  $K^4$  direkt, ohne Resultate aus Abschnitt 5.4 zu verwenden.
8. Es sei  $H$  eine abelsche Gruppe,  $G$  ein Graph, und  $T$  ein Spannbaum in  $G$ . Zeige, daß jede Abbildung aus der Menge der Richtungen von  $E(G) \setminus E(T)$  nach  $H$ , die (F1) erfüllt, eindeutig zu einem  $H$ -Rundfluß auf  $G$  fortsetzbar ist.

Die folgenden drei Übungen sollen ohne Zuhilfenahme des Sechsfußsatzes (5.6.1) gelöst werden.

9. Zeige (ohne Verwendung der folgenden Übungen), daß  $\varphi(G) < \infty$  gilt für jeden brückenlosen Multigraphen  $G$ .
10. In einem Graphen  $G$  gebe es  $m$  Spannbäume, so daß keine Kante von  $G$  in jedem dieser Spannbäume liegt. Zeige  $\varphi(G) \leq 2^m$ .
11. Es sei  $G$  ein brückenloser zusammenhängender Graph mit  $n$  Ecken und  $m$  Kanten. Zeige anhand eines normalen Spannbaums von  $G$ , daß  $\varphi(G) \leq m - n + 2$  ist.
12. Zeige, daß jeder Multigraph  $G$  mit einem Hamiltonkreis (einem Kreis in  $G$ , der alle Ecken von  $G$  enthält) einen 4-Fluß hat.
13. Eine Familie nicht notwendig verschiedener Kreise in einem Graphen  $G$  ist eine *doppelte Kreisüberdeckung* von  $G$ , wenn jede Kante von  $G$  auf genau zweien dieser Kreise liegt. Eine bekannte Vermutung, die *cycle double cover conjecture*, besagt, daß jeder brückenlose Multigraph eine doppelte Kreisüberdeckung hat. Zeige, daß jeder Multigraph mit einem 4-Fluß eine doppelte Kreisüberdeckung besitzt.
- 14.<sup>-</sup> Bestimme die Flußzahl von  $C^5 * K^1$ , des Rades mit 5 Speichen.
15. Finde brückenlose Graphen  $G$  und  $H = G - e$  mit  $2 < \varphi(G) < \varphi(H)$ .
16. Beweise Proposition 5.4.1, ohne Satz 5.3.3 zu benutzen.
- 17.<sup>+</sup> Beweise den Satz von Heawood, daß ein ebener Dreiecksgraph genau dann 3-färbbar ist, wenn all seine Ecken geraden Grad haben.
- 18.<sup>-</sup> Finde einen brückenlosen Graphen, der einen Schnitt aus genau drei Kanten und einen 3-Fluß hat.
19. Zeige, daß die Dreiflußvermutung für plättbare Multigraphen äquivalent ist zum Satz 4.1.3 von Grötzsch.
20. (i)<sup>-</sup> Zeige, daß der Vierfarbensatz äquivalent ist zu der Aussage, daß es keinen plättbaren Snark gibt, daß also jeder kubische brückenlose plättbare Multigraph einen 4-Fluß hat.  
(ii) Kann man in (i) "brückenlos" durch "3-zusammenhängend" ersetzen?

- 21.<sup>+</sup> Zeige, daß ein Graph  $G = (V, E)$  genau dann einen  $k$ -Fluß hat, wenn eine Orientierung  $D$  von  $G$  existiert, in der für jedes  $X \subseteq V$  mindestens  $1/k$  der Kanten aus  $E(X, \bar{X})$  von  $X$  nach  $\bar{X}$  gerichtet sind.
- 22.<sup>-</sup> Leite aus dem Sechsfußsatz 5.6.1 die entsprechende Aussage für Multigraphen her.

## Notizen

Die Theorie der Netzwerke ist eine der Anwendungen der Graphentheorie, aus denen diese in den letzten Jahrzehnten wesentliche Impulse erhalten hat. Das *Max-Flow Min-Cut Theorem* (Satz 5.2.2) von Ford und Fulkerson steht am Anfang dieser Entwicklung; sie geht jedoch wesentlich darüber hinaus. Betrachtungen etwa zur Zuverlässigkeit von Netzwerken können auf interessante Zusammenhangsprobleme führen, oder auf Fragen aus der Theorie der Zufallsgraphen (siehe Kapitel 9).

Das klassische Buch zur frühen Netzwerktheorie ist L.R. Ford & D.R. Fulkerson, *Flows in Networks*, Princeton University Press 1962. Eine neuere umfassende Darstellung geben R.K. Ahuja, T.L. Magnanti & J.B. Orlin, *Network flows*, Prentice-Hall 1993; siehe auch das Kapitel von A. Frank in *Handbook of Combinatorics* (R.L. Graham, M. Grötschel & L. Lovász, Hrsg.), North-Holland 1995. Eine allgemeine Einführung in die algorithmische Graphentheorie, darunter in die Theorie der Netzwerke, gibt D. Jungnickel, *Graphen, Netzwerke und Algorithmen*, BI-Wissenschaftsverlag 1987. Faßt man das Problem, einen Fluß maximaler Stärke durch ein gegebenes Netzwerk zu finden, als Problem der Linearen Optimierung auf, so kann man das *max-flow min-cut theorem* aus deren Dualitätssatz herleiten. Dies ist bei Jungnickel angedeutet; siehe auch A. Schrijver, *Theory of integer and linear programming*, Wiley 1986.

Die algebraische Flußtheorie wurde im wesentlichen von Tutte entwickelt und ist von ihm in W.T. Tutte, *Graph Theory*, Addison-Wesley 1984, in einem allgemeineren algebraischen Rahmen dargestellt. Eine Übersicht gibt F. Jaeger, *Nowhere-zero flow problems*, in L.W. Beineke & R.J. Wilson (Hrsg.), *Selected Topics in Graph Theory 3*, Academic Press 1988. Eingehende Darstellungen der Tutte'schen Flußvermutungen finden sich bei Jaeger und bei T.R. Jensen & B. Toft, *Graph Coloring Problems*, Wiley 1995. Robertson, Sanders, Seymour und Thomas kündigten 1998 einen Beweis der Vierflußvermutung für kubische Graphen an.

Der Sechsfußsatz 5.6.1 ist von P.D. Seymour, *Nowhere-zero 6-flows*, *J. Combin. Theory B* **30** (1981), 130–135; dort ist auch die Zurückführung der Tutte'schen Fünfflußvermutung auf Snarks angedeutet. Unser Beweis, daß alle vollständigen Graphen gerader Ordnung  $> 4$  einen 3-Fluß haben (Proposition 5.4.3), stammt von Jensen.

Schließlich sei noch das *Tutte-Polynom* eines Graphen erwähnt, eine gemeinsame Verallgemeinerung seines chromatischen Polynoms und seines Flußpolynoms. Dies ist nur die Spitze eines Eisbergs: das Tutte-Polynom hat weitreichende Beziehungen bis hin zur Knotentheorie und statistischen Physik; siehe D.J.A. Welsh, *Complexity: knots, colourings and counting* (LMS Lecture Notes **186**), Cambridge University Press 1993.



Leitfaden dieses Kapitels ist die Frage, inwieweit globale Annahmen über einen Graphen, etwa zu seinem Durchschnittsgrad oder seiner chromatischen Zahl, die Existenz einer konkret vorgegebenen Teilstruktur erzwingen können. Wieviele Kanten etwa müssen wir einem Graphen auf  $n$  Ecken geben, um sicher sein zu können, daß irgendwo in ihm ein vollständiger Graph  $K^r$  liegt, zu vorgegebenem  $r$ ? Oder auch nur ein  $K^r$ -Minor? Oder ein  $TK^r$ , ein topologischer  $K^r$ -Minor? Reicht die Annahme einer hohen chromatischen Zahl aus, um die eine oder andere dieser Teilstrukturen zu erzwingen?

Fragen dieser Art gehören zu den klassischen Problemstellungen der Graphentheorie; man faßt sie im weiteren Sinne unter der Bezeichnung *extremale Graphentheorie* zusammen. Die Sätze dieses Kapitels reichen vom Klassiker der extremalen Graphentheorie, dem Satz von Turán, bis hin zu tiefliegenden und überraschenden neueren Resultaten über Minoren und topologische Minoren. Dabei wird ein wenig von der Vielfalt der Methoden sichtbar werden, die die extremale Graphentheorie besonders auszeichnet.

*extremale  
Graphen-  
theorie*

## 6.1 Teilgraphen

Es sei  $H$  ein Graph. Wieviele Kanten reichen aus, um in einem Graphen gegebener Eckenzahl einen zu  $H$  isomorphen Teilgraphen zu erzwingen? Umgekehrt ausgedrückt: was ist die größtmögliche Kantenzahl eines Graphen  $G$  auf  $n$  Ecken, der  $H$  nicht als Teilgraphen enthalten soll? Wie sieht ein solcher Graph aus? Ist er eindeutig bestimmt?

Einen Graphen  $G$  wie oben nennt man *extremal* mit der Eigenschaft  $H \not\subseteq G$ ; seine Kantenzahl bezeichnet man mit  $\text{ex}(n, H)$ .  $G$  ist also genau dann extremal ohne  $H$ -Teilgraphen, wenn  $H \not\subseteq G$  gilt aber  $H \subseteq G'$  für jeden Graphen  $G'$  mit  $|G'|$  Ecken und mehr als  $\|G\|$  Kanten.

*extremal  
 $\text{ex}(n, H)$*

Ist  $G$  extremal ohne  $H$ -Teilgraphen, so ist  $G$  insbesondere kantenmaximal mit  $H \not\subseteq G$ . Die Umkehrung braucht jedoch nicht zu gelten (Abb. 6.1.1); Extremalität ist also allgemein eine stärkere Eigenschaft als Kantenmaximalität.



Abb. 6.1.1. Zwei mit  $P^3 \not\subseteq G$  kantenmaximale Graphen  $G$ ; ist der rechte extremal?

Betrachten wir unser eingangs formuliertes allgemeines Problem, zu gegebenem Graphen  $H$  die mit  $H \not\subseteq G$  extremalen Graphen  $G$  und ihre Kantenzahl zu bestimmen, zunächst exemplarisch für  $H = K^r$  (mit  $r > 1$ ). Offensichtliche Kandidaten für Extremalität ohne  $K^r$ -Teilgraphen sind die vollständig  $(r - 1)$ -partiten Graphen; diese sind jedenfalls schon einmal kantenmaximal ohne  $K^r$ . Welche unter den vollständig  $(r - 1)$ -partiten Graphen mit gegebener Eckenzahl aber haben die meisten Kanten? Offensichtlich diejenigen, bei denen die Ecken so gleichmäßig wie möglich auf die Partitions Mengen verteilt sind, sich deren Mächtigkeiten also um höchstens 1 unterscheiden: sind nämlich  $V_1, V_2$  zwei Partitions Mengen mit  $|V_1| - |V_2| \geq 2$ , so erhöht sich die Anzahl der Kanten in unserem vollständig  $(r - 1)$ -partiten Graphen um mindestens 1, wenn wir eine Ecke von  $V_1$  nach  $V_2$  versetzen.

Den eindeutig bestimmten vollständig  $(r - 1)$ -partiten Graphen auf  $n \geq r - 1$  Ecken, dessen Partitions Mengen sich in ihrer Mächtigkeit um höchstens 1 unterscheiden, nennt man einen *Turángraphen*; wir bezeichnen ihn mit  $T^{r-1}(n)$  und seine Kantenzahl mit  $t_{r-1}(n)$  (Abb. 6.1.2). Für  $n < r - 1$  übernehmen wir diese Definition mit der Maßgabe, daß die Partitions Mengen ausnahmsweise auch leer sein dürfen; offenbar gilt dann  $T^{r-1}(n) = K^n$  für alle  $n \leq r - 1$ .

$T^{r-1}(n)$   
 $t_{r-1}(n)$

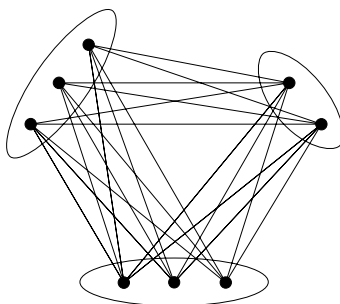


Abb. 6.1.2. Der Turángraph  $T^3(8)$

Wie der folgende Satz zeigt, ist der Turángraph  $T^{r-1}(n)$  in der Tat extremal ohne  $K^r$ ; insbesondere gilt also  $\text{ex}(n, K^r) = t_{r-1}(n)$ . Er ist als Extremalgraph sogar eindeutig bestimmt:

**Satz 6.1.1.** (Turán 1941)

Für alle  $r, n \in \mathbb{N}$  mit  $r > 1$  ist jeder Graph  $G \not\supseteq K^r$  mit  $n$  Ecken und  $\text{ex}(n, K^r)$  Kanten ein  $T^{r-1}(n)$ . [7.2.2]

*Beweis.* Wir verwenden Induktion nach  $n$ . Für  $n \leq r-1$  gilt  $G = K^n = T^{r-1}(n)$  wie behauptet. Zum Induktionsschritt sei jetzt  $n \geq r$ .

Da  $G$  kantenmaximal ohne  $K^r$ -Teilgraph ist, hat  $G$  einen Teilgraphen  $K = K^{r-1}$ , etwa mit Ecken  $x_1, \dots, x_{r-1}$ . Nach Induktionsannahme hat  $G - K$  höchstens  $t_{r-1}(n - r + 1)$  Kanten, und jede Ecke von  $G - K$  hat höchstens  $r - 2$  Nachbarn in  $K$ . Somit gilt

$$\|G\| \leq t_{r-1}(n - r + 1) + (n - r + 1)(r - 2) + \binom{r-1}{2} = t_{r-1}(n); \quad (1)$$

die Gleichheit rechts folgt sofort aus einer Betrachtung des Turángraphen  $T^{r-1}(n)$  (Abb. 6.1.3).

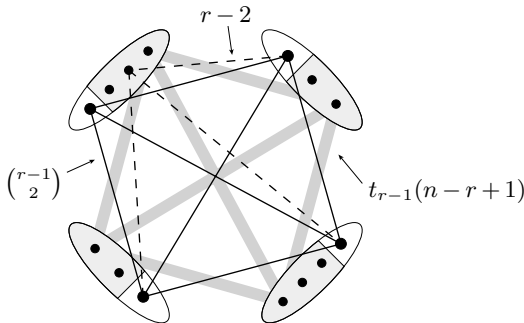


Abb. 6.1.3. Die Gleichung aus (1) für  $r = 5$  und  $n = 14$

Da  $G$  extremal ohne  $K^r$  ist und auch  $T^{r-1}(n)$  keinen  $K^r$  enthält, gilt Gleichheit in (1). Jede Ecke von  $G - K$  hat daher *genau*  $r - 2$  Nachbarn in  $K$  – wie die Ecken aus  $K$  selbst. Für  $i = 1, \dots, r - 1$  sei

$$V_i := \{v \in V(G) \mid vx_j \in E(G) \Leftrightarrow i \neq j\} \quad V_1, \dots, V_{r-1}$$

die Menge aller Ecken von  $G$ , deren  $r - 2$  Nachbarn in  $K$  genau die Ecken außer  $x_i$  sind. Wegen  $K^r \not\subseteq G$  ist jede der Eckenmengen  $V_i$  unabhängig, und sie partitionieren  $V(G)$ .  $G$  ist also  $(r - 1)$ -partit. Da  $T^{r-1}(n)$  unter den  $(r - 1)$ -partiten Graphen mit  $n$  Ecken die meisten Kanten hat, folgt  $G = T^{r-1}(n)$  aus der angenommenen Extremalität von  $G$ .  $\square$

Der Turángraph  $T^{r-1}(n)$  hat größenordnungsmäßig  $n^2$  Kanten: für alle  $n$  und  $r$  gilt

$$t_{r-1}(n) \leq \frac{1}{2}n^2 \frac{r-2}{r-1},$$

mit Gleichheit immer dann, wenn  $n$  durch  $r-1$  teilbar ist (Übung). Es ist daher bemerkenswert, daß für hinreichend großes  $n$  nur  $\epsilon n^2$  mehr Kanten als  $t_{r-1}(n)$  nicht nur einen  $K^r$ -Teilgraphen erzwingen (wie nach dem Satz von Turán), sondern sogar einen  $K_s^r$  mit beliebig großem  $s$  – einen Graphen also, in dem es von  $K^r$ -Teilgraphen nur so wimmelt:

**Satz 6.1.2.** (Erdős & Stone 1946)

Zu jedem  $r \in \mathbb{N}$  mit  $r \geq 2$ , jedem  $s \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$  und jedem  $\epsilon > 0$  existiert ein  $n_0 \in \mathbb{N}$  mit der Eigenschaft, daß jeder Graph mit  $n \geq n_0$  Ecken und mindestens

$$t_{r-1}(n) + \epsilon n^2$$

Kanten einen  $K_s^r$  als Teilgraphen enthält.

Den Beweis von Satz 6.1.2 verschieben wir auf den Abschnitt 6.5: dort werden wir ein mächtiges Beweismittel in der extremalen Graphentheorie kennenlernen, das Regularitätslemma von Szemerédi. Den Satz von Erdős und Stone werden wir aus diesem Lemma herleiten.

Der Satz von Erdős und Stone ist nicht nur an sich interessant, er hat auch ein ganz erstaunliches Korollar. Betrachten wir einmal, zu gegebenem Graphen  $H$  und  $n \in \mathbb{N}$ , die Zahl  $h_n := \text{ex}(n, H) / \binom{n}{2}$ . Ist  $G$  ein Graph auf  $n$  Ecken, so hat  $G$  höchstens  $\binom{n}{2}$  Kanten. Die Zahl  $h_n$  bezeichnet also den maximalen Anteil an seinen möglichen Kanten, die  $G$  haben kann, ohne  $H$  als Teilgraphen zu enthalten.

Könnte es sein, daß diese Zahl  $h_n$  im wesentlichen nur von  $H$  abhängt, daß der kleinste einen  $H$ -Teilgraphen erzwingende Kantenanteil für wachsende Eckenzahl konvergiert? Aus Satz 6.1.2 folgt nicht nur dieses. Es folgt sogar, daß  $h_n$  asymptotisch durch eine einfache Invariante von  $H$  bestimmt ist: durch seine chromatische Zahl!

**Korollar 6.1.3.** Für jeden Graphen  $H$  mit mindestens einer Kante gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \text{ex}(n, H) \binom{n}{2}^{-1} = \frac{\chi(H) - 2}{\chi(H) - 1}.$$

Zum Beweis von Korollar 6.1.3 brauchen wir als Lemma, daß  $t_{r-1}(n)$  auch für Werte von  $n$ , die kein Vielfaches von  $r-1$  sind, nicht zu stark von seinem sonstigen Wert  $\frac{1}{2}n^2(r-2)/(r-1)$  abweicht und  $t_{r-1}(n)/\binom{n}{2}$  entsprechend konvergiert. Ein Tip zum Beweis des Lemmas findet sich bei den Übungen.

**Lemma 6.1.4.**

[6.1.2]

$$\lim_{n \rightarrow \infty} t_{r-1}(n) \binom{n}{2}^{-1} = \frac{r-2}{r-1}.$$

□

**Beweis von Korollar 6.1.3.** Es sei  $r := \chi(H)$ . Da  $H$  nicht mit  $r-1$  Farben färbbar ist, gilt  $H \not\subseteq T^{r-1}(n)$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ , und somit

$$t_{r-1}(n) \leq \text{ex}(n, H).$$

Andererseits gilt  $H \subseteq K_s^r$  für hinreichend große  $s$ , und daher

$$\text{ex}(n, H) \leq \text{ex}(n, K_s^r)$$

für alle diese  $s$ . Im folgenden sei ein solches  $s$  fest gewählt. Nach Satz 6.1.2 gilt nun für jedes  $\epsilon > 0$  schließlich, d.h. wenn  $n$  groß genug ist,

$$\text{ex}(n, K_s^r) < t_{r-1}(n) + \epsilon n^2,$$

insgesamt also

$$\begin{aligned} t_{r-1}(n) / \binom{n}{2} &\leq \text{ex}(n, H) / \binom{n}{2} \\ &\leq \text{ex}(n, K_s^r) / \binom{n}{2} \\ &< t_{r-1}(n) / \binom{n}{2} + \epsilon n^2 / \binom{n}{2} \\ &= t_{r-1}(n) / \binom{n}{2} + 2\epsilon / \left(1 - \frac{1}{n}\right) \\ &\leq t_{r-1}(n) / \binom{n}{2} + 4\epsilon \quad (\text{für } n \geq 2). \end{aligned}$$

Mit  $t_{r-1}(n) / \binom{n}{2}$  konvergiert daher  $\text{ex}(n, H) / \binom{n}{2}$  gegen  $(r-2)/(r-1)$  (Lemma 6.1.4), d.h. es gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \text{ex}(n, H) \binom{n}{2}^{-1} = \frac{r-2}{r-1}$$

wie behauptet. □

Für bipartite Graphen  $H$  sagt uns Korollar 6.1.3, daß deutlich weniger als  $\binom{n}{2}$  Kanten ausreichen, um  $H$  als Teilgraphen zu erzwingen. Wie man zeigen kann, gilt

$$c_1 n^{2 - \frac{2}{r+1}} \leq \text{ex}(n, K_{r,r}) \leq c_2 n^{2 - \frac{1}{r}}$$

mit von  $r$  abhängigen Konstanten  $c_1, c_2$ . Ist  $H$  ein Wald, so folgt  $H \subseteq G$  bereits aus hinreichend großem  $\varepsilon(G)$ , d.h.  $\text{ex}(n, H)$  ist höchstens linear in  $n$  (Übung 4). Erdős und Sós vermuteten bereits in 1963, daß  $\text{ex}(n, T) \leq \frac{1}{2}(k-1)n$  gilt für alle Bäume mit  $k \geq 2$  Kanten; als allgemeine Schranke für alle  $n$  wäre dies für jedes  $T$  bestmöglich. Einzelheiten finden sich in den Übungen 12–15.



## 6.2 Topologische Minoren

Wie wir in Abschnitt 6.1 sahen, wächst die zur Erzwingung eines  $K^r$ -Teilgraphen in  $G$  erforderliche Kantenanzahl  $t_{r-1}(n) + 1$  quadratisch mit  $n = |G|$ ; insbesondere existiert keine Funktion  $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  mit der Eigenschaft, daß jeder Graph mit einem Durchschnittsgrad von mindestens  $f(r)$  einen  $K^r$  enthält. In Kapitel 9 werden wir sehen, daß dieses Phänomen durchaus nicht eine spezielle Eigenschaft des  $K^r$  oder ähnlich dichter Graphen ist: zu jedem Graphen  $H$ , der mindestens einen Kreis enthält, gibt es Graphen  $G$  beliebig hohen Minimalgrades mit  $H \not\subseteq G$ .

Bei Minoren und topologischen Minoren liegen die Dinge anders. Daß hinreichend hoher Durchschnittsgrad – also eine lediglich linear in der Eckenzahl wachsende Anzahl von Kanten – grundsätzlich die Existenz eines topologischen  $K^r$ -Minors erzwingt, sahen wir bereits in Satz 2.6.1; der Beweis dort ergab, daß ein Durchschnittsgrad von  $2^{\binom{r}{2}}$  dazu ausreicht. In diesem Abschnitt beweisen wir nun das – angesichts der Nichttrivialität des Beweises von Satz 2.6.1 ganz erstaunliche – Resultat, daß sogar ein Durchschnittsgrad von etwa  $r^2$  reicht: es existiert eine Konstante  $c$ , so daß jeder Graph mit Durchschnittsgrad mindestens  $cr^2$  einen  $K^r$  als topologischen Minor (und damit auch als gewöhnlichen Minor) enthält.

Der folgende Satz wurde 1994 unabhängig von Bollobás & Thomason und von Komlós & Szemerédi bewiesen.

**Satz 6.2.1.** *Es existiert ein  $c \in \mathbb{R}$ , so daß für jedes  $r \in \mathbb{N}$  jeder Graph  $G$  mit Durchschnittsgrad  $d(G) \geq cr^2$  einen  $K^r$  als topologischen Minor enthält.*

Der Beweis von Satz 6.2.1 wird den Rest dieses Abschnitts in Anspruch nehmen. Wir brauchen dazu zwei neue Begriffe. Eine Menge  $U$  von Ecken in einem Graphen  $G$  heiße *verbunden* (in  $G$ ), wenn  $G$  zu beliebigen verschiedenen Ecken  $u_1, \dots, u_{2h} \in U$  stets  $h$  disjunkte Wege  $P_i = u_{2i-1} \dots u_{2i}$  enthält,  $i = 1, \dots, h$ .<sup>1</sup> Der Graph  $G$  selbst heißt  *$(k, \ell)$ -verbunden*, wenn jede Menge von  $k$  Ecken eine verbundene  $\ell$ -elementige Teilmenge enthält.

Wie können wir den in Satz 6.2.1 gesuchten  $TK^r$  in  $G$  finden? Die Grundidee ist, zunächst die Menge  $X$  seiner Verzweigungsecken und zu jeder Verzweigungsecke disjunkt  $r - 1$  Nachbarn festzulegen. Fassen wir die Kanten einer Verzweigungsecke zu ihren Nachbarn als Anfangsstücke der  $r - 1$  mit ihr inzidenten unterteilten Kanten des  $K^r$  auf, so bleibt die Aufgabe, diese Nachbarn entsprechend paarweise durch Wege in  $G - X$  zu verbinden. Dies wäre möglich, wenn die Menge  $Y := N(X)$  in  $G - X$  verbunden wäre.

<sup>1</sup> In einem  $k$ -verbundenen Graphen – siehe Kapitel 2.6 – ist also jede Menge von bis zu  $2k + 1$  Ecken verbunden.

verbunden

$(k, \ell)$ -  
verbunden

Darauf zu hoffen, ist jedoch unrealistisch: selbst ein beliebig hoch vorgegebener Durchschnittsgrad von  $G$  wird nicht allgemein zur Folge haben, daß jede Menge von  $r(r-1)$  Ecken in  $G$  verbunden ist. (Warum nicht?) Worauf wir aber hoffen können, ist folgendes: wählen wir für  $X$  deutlich mehr als  $r$  Ecken, und hat jede dieser Ecken deutlich mehr als  $r-1$  Nachbarn, so könnte  $Y = N(X)$  so groß werden, daß der hohe Durchschnittsgrad von  $G$  die Existenz einer immer noch großen verbundenen Teilmenge  $Z \subseteq Y$  garantiert. Dazu müßte  $G$  dann  $(k, \ell)$ -verbunden sein für ein  $k \leq |Y|$  und ein  $\ell \geq |Z|$ .

Daß die Ecken aus  $X$  hinreichend viele Nachbarn haben, ist durch eine hohe Wahl von  $d(G)$  leicht zu erreichen: nach Proposition 0.2.2 enthält  $G$  einen Teilgraphen  $G'$ , dessen Minimalgrad mindestens  $\varepsilon(G) = \frac{1}{2}d(G)$  beträgt, und wir können  $X$  und  $Y$  in diesem Teilgraphen  $G'$  wählen. Ein anderes Problem ist schon ernster. Es wird nämlich nicht ausreichen, daß  $\ell$  (und damit  $Z$ ) absolut gesehen groß ist: ist  $k$  (und  $Y$ ) noch wesentlich größer, so könnte es passieren, daß  $Z$  trotz seiner Größe bloß die Nachbarn von nur einigen der Ecken aus  $X$  enthält. Wir müssen also erreichen, daß  $\ell$  auch relativ zu  $k$  groß ist. Dies sicherzustellen ist der Zweck unseres ersten Lemmas (6.2.2): es gibt eine hinreichende Bedingung dafür an, daß ein Graph  $(k, \lceil k/2 \rceil)$ -verbunden ist.

Was ist diese hinreichende Bedingung? Daß der Graph einen besonders dichten Minor  $H$  enthält, gemessen sowohl am vorgegebenen  $k$  als auch an seiner eigenen Ordnung  $|H|$ . Genauer: der Minimalgrad von  $H$  muß einen festen positiven Anteil sowohl von  $k$  als auch von  $|H|$  übertreffen. Daß ein derart dichter Graph  $H$  selbst relativ große verbundene Eckenmengen enthält, überrascht nicht. Die Idee ist daher, Eckenmengen von  $G$  wie unser  $Z$  dadurch als verbunden zu erweisen, daß wir sie zunächst disjunkt mit den Verzweigungsmengen von  $H$  verbinden – hoher Durchschnittsgrad sichert vermöge Satz 0.4.2 auch hohen Zusammenhang – und dann dessen hohe Verbundenheit auszunutzen (Abb. 6.2.1).

Wie aber kann hoher Durchschnittsgrad allein die Existenz eines derart dichten Minors sichern? Dies ist in der Tat erstaunlich – und die dem Beweis des entsprechenden Lemmas (6.2.3) zugrundeliegenden Ideen<sup>2</sup> gehören zu den besonderen Leckerbissen der endlichen Graphentheorie.

Nun aber zum Beweis von Satz 6.2.1.

**Lemma 6.2.2.** *Jeder  $k$ -zusammenhängende Graph  $G$ , der einen Minor  $H$  mit  $2\delta(H) \geq |H| + \frac{3}{2}k$  enthält, ist  $(k, \lceil k/2 \rceil)$ -verbunden.*

*Beweis.* Es sei  $\mathcal{V} := \{V_x \mid x \in V(H)\}$  die Menge der den Ecken von  $H$  entsprechenden Verzweigungsmengen in  $G$ . Zum Beweis der  $(k, \lceil k/2 \rceil)$ -Verbundenheit von  $G$  seien  $k$  verschiedene Ecken  $v_1, \dots, v_k \in G$  gegeben. (2.3.1)

$V, V_x$   
 $v_1, \dots, v_k$

<sup>2</sup> Siehe hierzu die Notizen am Ende des Kapitels.

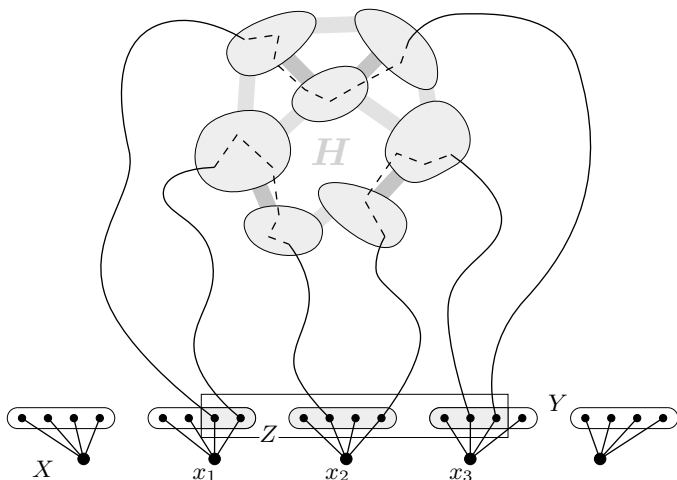


Abb. 6.2.1. Ein  $TK^3$  in  $G$  mit Verzweigungsecken  $x_1, x_2, x_3$

**Verbindung** Eine Folge  $P_1, \dots, P_k$  disjunkter Wege nennen wir eine *Verbindung*, wenn die  $P_i$  jeweils in  $v_i$  beginnen und in paarweise verschiedenen Verzweigungsmengen  $V \in \mathcal{V}$  enden; die  $P_i$  selbst nennen wir *Verbindungswege*. Da nach der Voraussetzung über  $H$  sicher  $|H| \geq k$  ist und  $G$   $k$ -zusammenhängend, existieren solche Verbindungen in  $G$ : sind  $w_1, \dots, w_k$  beliebige Ecken aus paarweise verschiedenen  $V \in \mathcal{V}$ , so enthält  $G$  nach dem Satz von Menger  $k$  disjunkte  $\{v_1, \dots, v_k\} - \{w_1, \dots, w_k\}$ -Wege, und diese bilden offenbar eine Verbindung.

**Verbindungsweg**

$\mathcal{P}$   
 $P_1, \dots, P_k$   
 $f(P_i)$

Es sei nun  $\mathcal{P} = (P_1, \dots, P_k)$  eine Verbindung mit möglichst wenigen Kanten, die in *keinem*  $G[V]$  mit  $V \in \mathcal{V}$  liegen. Bezeichnen wir mit  $f(P_i)$  die Anzahl der Kanten von  $P_i$  außerhalb aller  $G[V]$ , so sei also  $\sum_{i=1}^k f(P_i)$  minimal. In jedem  $V \in \mathcal{V}$ , das von irgendeinem Verbindungsweg  $P_i$  getroffen wird, endet dann auch ein Verbindungsweg: wenn nicht, könnten wir  $P_i$  selbst bereits in  $V$  enden lassen und dabei  $f(P_i)$  senken. Damit enthalten also genau  $k$  Verzweigungsmengen eine Ecke eines Verbindungsweges; wir setzen

$$\begin{aligned} \mathcal{U} &:= \{V \in \mathcal{V} \mid \text{genau ein } P_i \text{ trifft } V\} \\ \mathcal{W} &:= \{V \in \mathcal{V} \mid \text{mehr als ein } P_i \text{ trifft } V\}. \end{aligned}$$

Um später zeigen zu können, daß  $\mathcal{U}$  mindestens so groß ist wie  $\mathcal{W}$ , beweisen wir zunächst folgendes:

Jedes  $V \in \mathcal{W}$  wird von einem Verbindungsweg getroffen, der  $V$  wieder verläßt und als nächste Verzweigungsmenge eine Menge aus  $\mathcal{U}$  trifft (wo er endet). (1)

Angenommen,  $V_x \in \mathcal{W}$  sei ein Gegenbeispiel zu (1). Wegen

$$2\delta(H) \geq |H| + \frac{3}{2}k \geq \delta(H) + \frac{3}{2}k$$

ist  $\delta(H) \geq \frac{3}{2}k$ . Wegen  $|\mathcal{U} \cup \mathcal{W}| = k$  hat  $x$  daher einen Nachbarn  $y$  in  $H$  mit  $V_y \in \mathcal{V} \setminus (\mathcal{U} \cup \mathcal{W})$ ; es sei  $w_x w_y$  eine Kante von  $G$  mit  $w_x \in V_x$  und  $w_y \in V_y$ . Es sei  $Q = w \dots w_y$  ein Weg in  $G[V_x \cup \{w_y\}]$ , von dessen Ecken nur  $w$  auf einem Verbindungsweg liegt – sagen wir, auf  $P_i$ . Ersetzen wir in  $\mathcal{P}$  den Weg  $P_i$  durch  $P'_i := P_i w Q$ , so erhalten wir wieder eine Verbindung.

Ist  $P_i$  nicht der Verbindungsweg, der in  $V_x$  endet, so gilt  $f(P'_i) \leq f(P_i)$ . Aus der Minimalität von  $\mathcal{P}$  folgt somit  $f(P'_i) = f(P_i)$ , d.h.  $P_i$  endet in der Verzweigungsmenge  $W$ , die es unmittelbar nach  $V_x$  erreicht. Da  $V_x$  ein Gegenbeispiel zu (1) ist, ist  $W \notin \mathcal{U}$ , also  $W \in \mathcal{W}$ . Es sei  $P \neq P_i$  ein weiterer Verbindungsweg, der  $W$  trifft. Dann endet  $P$  nicht in  $W$ ; es sei  $P' \subseteq P$  das (minimale) Anfangsstück von  $P$ , das in  $W$  endet. Ersetzen wir in  $\mathcal{P}$  nun  $P_i$  und  $P$  durch  $P'_i$  und  $P'$ , so erhalten wir eine Verbindung, die der Minimalität von  $\mathcal{P}$  widerspricht (Abb. 6.2.2).

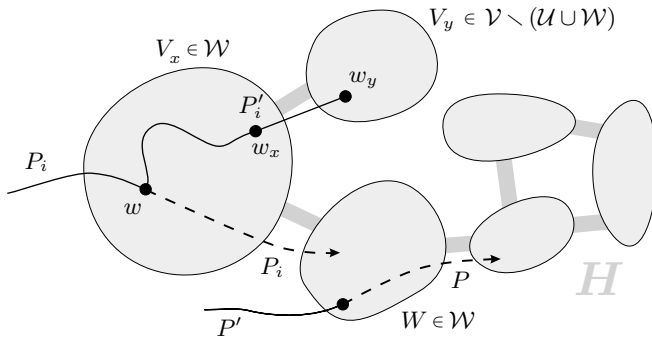


Abb. 6.2.2. Endet  $P_i$  nicht in  $V_x$ , so ersetzen wir  $P_i$  und  $P$  durch  $P'_i$  und  $P'$

Nehmen wir nun an, daß  $P_i$  in  $V_x$  endet; dann ist  $f(P'_i) = f(P_i) + 1$ . Wegen  $V_x \in \mathcal{W}$  existiert ein Verbindungsweg  $P_j$ , der  $V_x$  trifft und wieder verläßt; es sei  $P'_j$  das in  $V_x$  endende Anfangsstück von  $P_j$ . Damit ist  $f(P'_j) \leq f(P_j) - 1$ ; da Ersetzung von  $P_i$  und  $P_j$  durch  $P'_i$  und  $P'_j$  in  $\mathcal{P}$  wieder eine Verbindung ergibt, folgt aus der Minimalität von  $\mathcal{P}$  dann  $f(P'_j) = f(P_j) - 1$ , d.h.  $P_j$  endet in der Verzweigungsmenge  $W$ , die es unmittelbar nach  $V_x$  erreicht. Wie oben ist dann  $W \in \mathcal{W}$ , und wir können auch  $P$  und  $P'$  wie oben definieren. Ersetzen wir in  $\mathcal{P}$  nun  $P_i$ ,  $P_j$  und  $P$  durch  $P'_i$ ,  $P'_j$  und  $P'$ , so erhalten wir endgültig eine Verbindung, die der Minimalität von  $\mathcal{P}$  widerspricht (Abb. 6.2.3). Damit ist (1) bewiesen.

Mit Hilfe von (1) finden wir eine Injektion  $\mathcal{W} \rightarrow \mathcal{U}$  wie folgt: zu gegebenem  $W \in \mathcal{W}$  wähle einen Verbindungsweg, der  $W$  durchläuft und

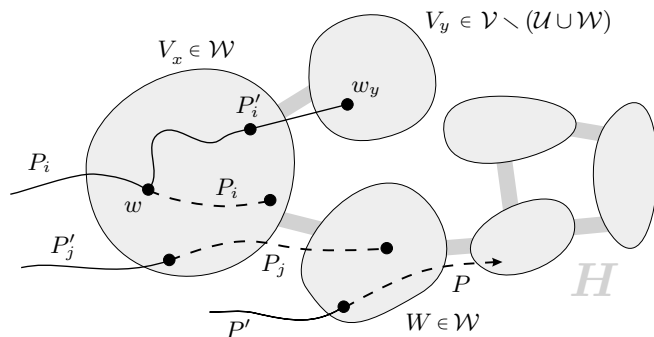


Abb. 6.2.3. Endet  $P_i$  in  $V_x$ , so ersetzen wir  $P_i, P_j, P$  durch  $P'_i, P'_j, P'$

als nächste Verzweigungsmenge eine Menge  $U \in \mathcal{U}$  erreicht, und setze  $W \mapsto U$ . Damit ist  $|\mathcal{U}| \geq |\mathcal{W}|$ , und somit  $|\mathcal{U}| \geq \lceil k/2 \rceil$ .

Wir dürfen  $\mathcal{P}$  also so aufgezählt annehmen, daß für  $u := |\mathcal{U}| \geq \lceil k/2 \rceil$  die Wege  $P_1, \dots, P_u$  in einer Menge aus  $\mathcal{U}$  enden. Wegen  $2\delta(H) \geq |H| + \frac{3}{2}k$  finden wir nun für je zwei Mengen  $V_x, V_y \in \mathcal{U}$  mindestens  $\frac{3}{2}k$  Mengen  $V_z$  mit  $xz, yz \in E(H)$ . Mindestens  $k/2$  dieser Mengen  $V_z$  liegen dann nicht in  $\mathcal{U} \cup \mathcal{W}$ . Sind nun verschiedene  $U_1, \dots, U_{2h} \in \mathcal{U}$  beliebig gegeben (also  $h \leq u/2 \leq k/2$ ), so finden wir auf diese Weise schrittweise  $h$  verschiedene Mengen  $V^i \in \mathcal{V} \setminus (\mathcal{U} \cup \mathcal{W})$  ( $i = 1, \dots, h$ ), so daß  $V^i$  in  $G$  mit  $U_{2i-1}$  und mit  $U_{2i}$  durch eine Kante verbunden ist. Damit ist die Menge  $\{v_1, \dots, v_u\}$  verbunden, und das Lemma bewiesen.  $\square$

**Lemma 6.2.3.** Jeder Graph  $G$  mit  $\varepsilon(G) \geq k \geq 6$  ( $k \in \mathbb{N}$ ) hat einen Minor  $H$  mit  $2\delta(H) \geq |H| + \frac{1}{6}k$ .

*Beweis.* Wir wählen zunächst einen ( $\preceq$ -)minimalen Minor  $G_0$  von  $G$  mit  $\varepsilon(G_0) \geq k$ . Wegen der Minimalität von  $G_0$  gilt  $\delta(G_0) > k$  und  $\varepsilon(G_0) = k$  (sonst könnten wir eine Ecke oder Kante von  $G_0$  löschen), und somit

$$k + 1 \leq \delta(G_0) \leq d(G_0) = 2k.$$

Es sei  $x_0 \in G_0$  eine Ecke minimalen Grades.

Ist  $k$  ungerade, so sei  $m := (k+1)/2$  und

$$G_1 := G_0[\{x_0\} \cup N_{G_0}(x_0)].$$

Dann ist  $|G_1| = d_{G_0}(x_0) + 1 \leq 2k + 1 \leq 2(k+1) = 4m$ . Wegen der Minimalität von  $G_0$  gehen bei der Kontraktion einer jeden Kante  $x_0y \in G_0$  mindestens  $k+1$  Kanten verloren. Die Ecken  $x_0$  und  $y$  haben also

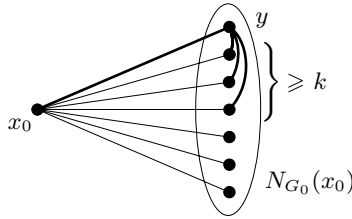


Abb. 6.2.4. Der Graph  $G_1 \preceq G$ : eine erste Näherung an den gesuchten Minor  $H$

mindestens  $k$  gemeinsame Nachbarn, d.h. es gilt  $\delta(G_1) \geq k + 1 = 2m$  (Abb. 6.2.4). Ist  $k$  gerade, so setzen wir  $m := k/2$  und

$$G_1 := G_0 [N_{G_0}(x_0)]. \quad G_1$$

Dann ist  $|G_1| = d_{G_0}(x_0) \leq 2k = 4m$ , und wie oben folgt  $\delta(G_1) \geq k = 2m$ . In beiden Fällen haben wir also eine ganze Zahl  $m \geq k/2$  und einen Graphen  $G_1 \preceq G$  gefunden mit

$$|G_1| \leq 4m \quad (1)$$

und  $\delta(G_1) \geq 2m$ , also

$$\varepsilon(G_1) \geq m \geq k/2 \geq 3. \quad (2)$$

Unser Graph  $G_1$  ist mit seinen  $2\delta(G_1) \geq 4m \geq |G_1|$  bereits ein ganz guter Kandidat für den gesuchten Minor  $H$  von  $G$ . Um auch das fehlende  $\frac{1}{6}k$  noch zu bekommen, werden wir den Kontraktionsprozeß ein zweites Mal anwenden (von  $G_1$  ausgehend), und zwar etwas energischer als zuvor: wir kontrahieren schrittweise immer dann, wenn bei der Kontraktion nicht mehr als  $\frac{7}{6}m$  Kanten pro Ecke verloren gehen, gestatten also einen etwas größeren Kantenverlust als es die Bewahrung von  $\varepsilon \geq m$  zu erlauben scheint. (Bei der Gewinnung von  $G_0$  aus  $G$  lag diese Schwelle bei  $\varepsilon(G) = k$ .) Endet dieser Kontraktionsprozeß mit einem nicht leeren Graphen  $H_0$ , so liegt  $\varepsilon(H_0)$  dann jedoch über  $\frac{7}{6}m$ , also höher als bei  $G_1$ ! Das gewonnene  $\frac{1}{6}m$  wird dem Graphen  $H_1$ , den wir aus  $H_0$  gewinnen werden wie oben  $G_1$  aus  $G_0$ , seinen gewünschten hohen Minimalgrad geben.

Wodurch aber ist garantiert, daß auch dieser Kontraktionsprozeß wirklich mit einem nicht leeren Graphen enden wird? Durch die Tatsache, daß die pro Kontraktionsschritt erlaubte Abnahme der Kantenzahl um  $\frac{7}{6}m$  immer noch zu gering ist, um in den höchstens  $|G_1|$  Kontraktionsschritten alle  $m|G_1|$  Kanten von  $G_1$  verschwinden zu lassen! Dies erscheint zunächst paradox, erklärt sich aber ganz einfach: die Graphen gegen Ende des Kontraktionsprozesses wären einfach zu klein, als daß

sie in einem Kontraktionsschritt noch die vollen erlaubten  $\frac{7}{6}m$  Kanten verlieren könnten – und nach (1) machen diese Graphen immerhin etwa ein Viertel des Prozesses aus.

Formal gehen wir wie folgt vor (und so ergibt sich auch der genannte Wert von  $\frac{7}{6}m$ ). Für die Kantenzahlen der Minoren  $H$  des Kontraktionsprozesses schreiben wir eine untere Schranke  $e(|H|)$  vor, die linear zwischen einem Wert  $e(4m) \leq 4m^2$  (für  $H = G_1$  bei Gleichheit in (1) und (2)) und einem Wert  $e(m)$  etwas über  $\|K^m\| = \binom{m}{2}$  interpoliert – und diese Funktion hat halt die Steigung  $\frac{7}{6}m$ . Da aber kein Graph auf nur  $m$  Ecken dieser Schranke genügen (also mehr Kanten als ein  $K^m$  haben) kann, muß dann der Kontraktionsprozeß in der Tat bereits bei einem Minor  $H_0$  mit  $|H_0| > m$  abbrechen.

Zur Durchführung dieses Ansatzes setzen wir

$$f \qquad f(n) := \frac{1}{6}m(n - m - 5)$$

für alle  $n \geq m$ , und

$$\mathcal{H} \qquad \mathcal{H} := \left\{ H \preccurlyeq G_1 : \|H\| \geq m|H| + f(|H|) - \binom{m}{2} \right\}.$$

Wegen (1) ist

$$f(|G_1|) \leq f(4m) = \frac{1}{2}m^2 - \frac{5}{6}m < \binom{m}{2},$$

und mit (2) folgt  $G_1 \in \mathcal{H}$ .

Ist  $H$  ein beliebiger Graph in  $\mathcal{H}$ , so ist auch jeder Graph, der aus  $H$  durch eine der folgenden drei Operationen gewonnen wird, in  $\mathcal{H}$ :

- (i) Streichung einer Kante, falls  $\|H\| \geq m|H| + f(|H|) - \binom{m}{2} + 1$ ;
- (ii) Streichung einer Ecke vom Grad  $\leq \frac{7}{6}m$ ;
- (iii) Kontraktion einer Kante  $xy \in H$ , für die  $x$  und  $y$  höchstens  $\frac{7}{6}m - 1$  gemeinsame Nachbarn in  $H$  haben.

Bei  $G_1$  beginnend, wenden wir nun schrittweise solange jeweils eine dieser Operationen an, bis keine mehr anwendbar ist; den erhaltenen Graphen aus  $\mathcal{H}$  bezeichnen wir mit  $H_0$ .

Wegen

$$\|K^m\| = m|K^m| - m - \binom{m}{2}$$

und

$$f(m) = -\frac{5}{6}m > -m$$

gilt  $K^m \notin \mathcal{H}$ , d.h.  $\mathcal{H}$  enthält keinen Graphen mit  $m$  Ecken. Es folgt  $|H_0| > m$ , und insbesondere  $H_0 \neq \emptyset$ . Es sei  $x_1 \in H_0$  eine Ecke minimalen Grades, und

$$H_1 := H_0 [\{x_1\} \cup N_{H_0}(x_1)].$$

Wir werden zeigen, daß der Minimalgrad von  $H := H_1$  so groß ist wie im Lemma behauptet.

Zunächst gilt

$$\delta(H_1) > \frac{7}{6}m; \quad (3)$$

da nämlich  $H_0$  hinsichtlich (ii) und (iii) minimal ist, gilt  $d(x_1) > \frac{7}{6}m$  in  $H_0$  (und damit in  $H_1$ ), und jede Ecke  $y \neq x_1$  in  $H_1$  hat mehr als  $\frac{7}{6}m - 1$  gemeinsame Nachbarn mit  $x_1$  (und damit mehr als  $\frac{7}{6}m$  Nachbarn in  $H_1$  insgesamt). Um aus (3) wie gewünscht eine Ungleichung der Form

$$2\delta(H_1) \geq |H_1| + \alpha m$$

zu gewinnen, brauchen wir eine Abschätzung von  $|H_1|$  der Form  $|H_1| \leq \beta m$ . Da  $H_0$  in  $\mathcal{H}$  liegt aber hinsichtlich (i) minimal ist, gilt

$$\begin{aligned} \|H_0\| &< m|H_0| + \left(\frac{1}{6}m|H_0| - \frac{1}{6}m^2 - \frac{5}{6}m\right) - \binom{m}{2} + 1 \\ &= \frac{7}{6}m|H_0| - \frac{4}{6}m^2 - \frac{1}{3}m + 1 \\ &\stackrel{(2)}{\leq} \frac{7}{6}m|H_0| - \frac{4}{6}m^2, \end{aligned} \quad (4)$$

und somit nach Wahl von  $x_1$  und Definition von  $H_1$

$$\begin{aligned} |H_1| - 1 &= \delta(H_0) \\ &\leq 2\varepsilon(H_0) \\ &\stackrel{(4)}{<} \frac{7}{3}m - \frac{4}{3}m^2/|H_0| \\ &\stackrel{(1)}{\leq} \frac{7}{3}m - \frac{1}{3}m \\ &= 2m, \end{aligned}$$

also  $|H_1| \leq 2m$ . Damit gilt

$$\begin{aligned} 2\delta(H_1) &\stackrel{(3)}{>} 2m + \frac{1}{3}m \\ &\geq |H_1| + \frac{1}{3}m \\ &\stackrel{(2)}{\geq} |H_1| + \frac{1}{6}k \end{aligned}$$

wie behauptet. □

**Beweis von Satz 6.2.1.** Wir zeigen die Behauptung für  $c := 1116$ . (0.4.2)  
Es sei  $G$  ein Graph mit  $d(G) \geq 1116r^2$ . Nach Satz 0.4.2 hat  $G$  einen Teilgraphen  $G_0$  mit  $G_0$

$$\kappa(G_0) \geq 279r^2 \geq 276r^2 + 3r.$$



$X$  Wir wählen eine Menge  $X := \{x_1, \dots, x_{3r}\}$  von  $3r$  Ecken in  $G_0$  und  
 $G_1$  setzen  $G_1 := G_0 - X$ . Für jedes  $i = 1, \dots, 3r$  wählen wir in  $G_1$  eine  
 $Y_i$  Menge  $Y_i$  von  $5r$  Nachbarn von  $x_i$ ; diese Mengen  $Y_i$  seien disjunkt für  
verschiedene  $i$ . (Wegen  $\delta(G_0) \geq \kappa(G_0) \geq 15r^2 + |X|$  ist dies möglich.)

Für  $G_1$  gilt

$$\delta(G_1) \geq \kappa(G_1) \geq \kappa(G_0) - |X| \geq 276r^2,$$

und somit  $\varepsilon(G_1) \geq 138r^2$ . Nach Lemma 6.2.3 hat  $G_1$  einen Minor  $H$   
mit  $2\delta(H) \geq |H| + 23r^2$  und ist deshalb nach Lemma 6.2.2  $(15r^2, 7r^2)$ -  
 $Z$  verbunden; es sei  $Z \subseteq \bigcup_{i=1}^{3r} Y_i$  eine in  $G_1$  verbundene Eckenmenge der  
Mächtigkeit  $7r^2$ .

$Z_i$  Für alle  $i = 1, \dots, 3r$  sei  $Z_i := Z \cap Y_i$ . Daß  $Z$  verbunden ist,  
impliziert nun folgendes: falls es  $r$  verschiedene Indizes  $i$  gibt mit  $|Z_i| \geq$   
 $r - 1$ , dann bilden die Ecken  $x_i$  mit diesen Indizes die Verzweigungsecken  
eines  $TK^r$  in  $G_0$ . Enthält  $G$  keinen  $TK^r$ , so muß also  $|Z_i| \leq r - 2$  gelten  
für alle bis auf höchstens  $r - 1$  der Indizes  $i$ . Daraus folgt jedoch

$$|Z| = \sum_{i=1}^{3r} |Z_i| \leq (r-1)5r + (2r+1)(r-2) < 7r^2 = |Z|,$$

mit Widerspruch. □

Ohne Beweis erwähnen wir noch ein fast paradox erscheinendes neu-  
eres Resultat von Mader: die Existenz eines  $TK^r$  kann im wesentlichen  
auch durch eine hohe Taillenweite erzwungen werden! Das Analogon  
dieses Satzes für allgemeine Minoren werden wir im nächsten Abschnitt  
beweisen.

**Satz 6.2.4.** (Mader 1998)

*Jeder Graph mit Minimalgrad mindestens  $r - 1$  und hinreichend großer  
Taillenweite enthält  $K^r$  als topologischen Minor.*

Wie zu Beginn dieses Abschnitts bereits erwähnt, erzwingt kein noch  
so hoher Durchschnittsgrad die Existenz eines gegebenen Graphen  $H$  als  
Teilgraphen, solange nur  $H$  einen Kreis enthält: selbst hohe chromatische  
Zahl (und erst recht hoher Durchschnittsgrad) ist mit beliebig hoher  
Taillenweite vereinbar (Satz 9.2.2). Was aber können wir sagen, wenn  
 $H$  keinen Kreis enthält?

Nach Proposition 0.2.2 und Korollar 0.5.4 enthält ein Graph  $G$  jeden  
Baum mit bis zu  $\varepsilon(G) + 2$  Ecken, d.h. hinreichend hoher Durchschnitts-  
grad sichert stets das Auftreten eines gegebenen Baumes  $T$  als Teilgraph.  
Was aber gilt, wenn wir  $T$  als Untergraphen in  $G$  erhalten möchten?

Hierzu ist hoher Durchschnittsgrad offenbar genauso schädlich wie  
nützlich, selbst wenn wir voraussetzen, daß unser Graph  $G$  keinen großen

$K^r$  enthält. (Betrachte etwa vollständig bipartite Graphen.) Umso bemerkenswerter ist es, daß die Voraussetzung hoher chromatischer Zahl anstelle eines hohen Durchschnittsgrades hier einen Unterschied zu machen scheint: nach einer Vermutung von Gyárfás enthält jeder Graph hinreichend großer chromatischer Zahl entweder einen großen vollständigen Graphen oder jeden vorgegebenen Baum  $T$  als Untergraphen. (Formal: zu jedem  $r \in \mathbb{N}$  und jedem Baum  $T$  existiert ein  $k \in \mathbb{N}$  mit der Eigenschaft, daß jeder Graph  $G$  mit  $\chi(G) \geq k$  und  $\omega(G) < r$  diesen Baum  $T$  als Untergraphen enthält.) Begnügen wir uns mit einer Unterteilung von  $T$  in  $G$ , so ist dies in der Tat wahr:

**Satz 6.2.5.** (Scott 1997)

*Zu jedem  $r \in \mathbb{N}$  und jedem Baum  $T$  existiert ein  $k \in \mathbb{N}$  mit der Eigenschaft, daß jeder Graph  $G$  mit  $\chi(G) \geq k$  und  $\omega(G) < r$  eine Unterteilung von  $T$  als Untergraphen enthält.*

## 6.3 Minoren

Nach Satz 6.2.1 reicht ein Durchschnittsgrad von  $cr^2$  zur Erzwingung eines topologischen  $K^r$ -Minors. Ist man nur an irgendeinem  $K^r$ -Minor interessiert (topologisch oder nicht), so reicht ein noch geringerer Durchschnittsgrad: bereits 1968 bewies Mader in einer bahnbrechenden Arbeit, daß jeder Graph mit Durchschnittsgrad von mindestens  $cr \log r$  einen  $K^r$ -Minor enthält. Der folgende Satz löst dieses Problem bis auf den Wert der Konstante  $c$  vollständig:

**Satz 6.3.1.** (Kostochka 1982; Thomason 1984)

*Es existiert ein  $c \in \mathbb{R}$  mit der Eigenschaft, daß jeder Graph  $G$  mit Durchschnittsgrad  $d(G) \geq cr\sqrt{\log r}$  einen  $K^r$  als Minor enthält. Diese Schranke ist größenordnungsmäßig als Funktion von  $r$  bestmöglich.*

Daß ein Durchschnittsgrad von mindestens  $cr\sqrt{\log r}$  zur Erzwingung eines  $K^r$ -Minors notwendig ist, folgt aus der Betrachtung von Zufallsgraphen (Kap 9). Daß ein solcher Durchschnittsgrad auch ausreicht, beweist man mit ähnlichen Methoden wie in Abschnitt 6.2.

Statt Satz 6.3.1 zu beweisen, widmen wir daher diesen Abschnitt einem fast paradox anmutenden weiteren Resultat: solange wir nicht lediglich Kanten unterteilen, können wir die Existenz eines beliebig großen vollständigen Minors auch durch hinreichend hohe Tailenweite erzwingen!

Betrachtet man dieses Ergebnis auf dem Umweg über die Erzwingung eines Minors mit hohem Durchschnittsgrad (der dann seinerseits

einen großen vollständigen Minor enthalten muß), so ist es bei etwas genauem Hinsehen gar nicht mehr so überraschend. Ist die Tailleweite  $g$  eines Graphen groß, so induziert jede Kugel  $\{v \mid d(x, v) < \lfloor g/2 \rfloor\}$  um eine feste Ecke  $x$  einen Baum mit vielen Blättern, deren inzidente Kanten aus  $G$  bis auf eine alle aus dem Baum herausführen. Die Kontraktion hinreichend vieler solcher Bäume könnte also durchaus geeignet sein, einen Minor mit hohem Durchschnittsgrad zu gewinnen.

Das folgende Lemma führt diese Idee durch.

**Lemma 6.3.2.** *Für jedes  $k \in \mathbb{N}$  hat jeder Graph  $G$  mit Minimalgrad  $\delta(G) \geq 3$  und Tailleweite  $g(G) > 8\lceil \log(k/3) \rceil + 2$  einen Minor  $H$  mit  $\delta(H) \geq k$ .*

(0.5.3) *Beweis.* Ist  $k \leq 3$ , so gibt es nichts zu zeigen; wir nehmen daher  $k > 3$  an.  
 $d$  Es sei  $d := \lceil \log(k/3) \rceil \geq 1$ . Es sei  $X \subseteq V(G)$  maximal mit  $d(x, y) > 2d$   
 $X$  für alle  $x, y \in X$ . Für jedes  $x \in X$  sei  $T_x^0 := \{x\}$ . Zu gegebenem  
 $i < 2d$  nehmen wir nun an, daß wir bereits disjunkte Bäume  $T_x^i \subseteq G$   
definiert haben (zu jedem  $x \in X$  einen), deren Ecken zusammen genau  
die Ecken mit Abstand höchstens  $i$  von  $X$  in  $G$  sind. Verbinden wir nun  
jede Ecke des Abstands  $i+1$  von  $X$  mit einem Nachbarn des Abstands  $i$ ,  
so erhalten wir eine Familie erweiterter disjunkter Bäume  $T_x^{i+1}$ . Da jede  
 $T_x$  Ecke von  $G$  den Abstand höchstens  $2d$  von  $X$  hat (wegen der Maximalität  
von  $X$ ), partitionieren die so erhaltenen Bäume  $T_x := T_x^{2d}$  die gesamte  
Eckenmenge von  $G$ .

Nach Konstruktion enthält jedes  $T_x$  alle Ecken  $v$  von  $G$  mit  $d(x, v) \leq d$ : für jedes solche  $v$  und  $x' \neq x$  gilt nämlich  $d(x, v) < d(x', v)$  nach Wahl von  $X$ , und so wurde  $v$  dem Baum  $T_x$  zugeschlagen, nicht  $T_{x'}$ . Wegen  $\delta(G) \geq 3$  gilt somit

$$|T_x| \geq 1 + 3 \sum_{i=1}^d 2^{i-1} = 3 \cdot 2^d - 2 \geq k - 2.$$

Es sei  $H$  der Minor von  $G$ , der durch Kontraktion aller Bäume  $T_x$  entsteht.

Um nun  $\delta(H) \geq k$  zu zeigen, halten wir zunächst fest, daß jedes  $T_x$  wegen  $\text{diam } T_x \leq 4d$  und  $g(G) > 4d + 1$  sogar ein Untergraph von  $G$  ist. Weiter enthält  $G$  zwischen je zwei Bäumen  $T_x$  und  $T_y$  höchstens eine Kante: zwei solche Kanten ergäben zusammen mit den ihre Endecken verbindenden Wegen in  $T_x$  und  $T_y$  einen Kreis der Länge höchstens  $8d + 2 < g(G)$ . Somit bleiben alle Kanten zwischen  $T_x$  und  $G - T_x$  bei der Kontraktion erhalten.

Wieviele solche Kanten gibt es in  $G$ ? Wegen  $\delta(G) \geq 3$  summieren sich die Grade in  $G$  der Ecken aus  $T_x$  auf mindestens  $3|T_x|$ , und nur ein Anteil von  $2|T_x| - 2$  dieser Summe entfällt auf Kanten von  $T_x$  selbst. Die Anzahl der aus  $T_x$  herausführenden Kanten, und damit der Minimalgrad von  $H$ , beträgt also mindestens  $|T_x| + 2 \geq k$ .  $\square$

**Satz 6.3.3.** *Es gibt eine Funktion  $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ , für die jeder Graph mit Minimalgrad mindestens 3 und Taillenweite mindestens  $f(r)$  einen  $K^r$ -Minor enthält (für alle  $r \in \mathbb{N}$ ). Diese Funktion  $f$  ist wählbar als  $f(r) := 8\lceil \log r + \frac{1}{2} \log \log r \rceil + c$  für eine geeignete Konstante  $c \in \mathbb{N}$ .*

*Beweis.* Setze für  $k$  in Lemma 6.3.2 den Minimalgrad  $c'r\sqrt{\log r}$  ein, der nach Satz 6.3.1 zur Erzwingung eines  $K^r$ -Minors ausreicht.  $\square$

## 6.4 Die Hadwiger-Vermutung

Betrachten wir nun die Frage, inwieweit eine hohe chromatische Zahl – wie Durchschnittsgrad ebenfalls eine “globale” Invariante – die Existenz konkreter Unterstrukturen erzwingt. Nach Korollar 4.2.3 hat jeder Graph  $G$  einen Teilgraphen  $H$  vom Minimalgrad mindestens  $\chi(G) - 1$ , und so enthält auch  $G$  all die Teilstrukturen, die  $H$  nach Abschnitt 6.2 und 6.3 enthalten muß.

Die Annahme einer hohen chromatischen Zahl ist also “stärker” als die Annahme hohen Durchschnittsgrades. Da umgekehrt hoher Durchschnittsgrad keine hohe chromatische Zahl erzwingt (betrachte vollständig bipartite Graphen), stellt sich die Frage: *wieviel* stärker ist die Annahme hoher chromatischer Zahl unter dem Gesichtspunkt der Erzwingung gegebener Teilstrukturen?

Wie bereits mehrfach erwähnt, kann auch die Annahme einer hohen chromatischen Zahl keine vorgegebenen Teilgraphen erzwingen (Satz 9.2.2) – mit Ausnahme von Bäumen, deren Enthaltensein jedoch bereits aus der Annahme hohen Durchschnittsgrades folgt (Proposition 0.2.2 und Korollar 0.5.4).

So bleibt die Frage, ob zur Erzwingung vorgegebener Minoren, wie in den Abschnitten 6.2 und 6.3 betrachtet, die Annahme einer hohen chromatischen Zahl echt hilft, oder ob sie nur diejenigen Minoren erzwingt, deren Existenz bereits indirekt aus dem durch die chromatische Zahl erzwungenen Durchschnittsgrad folgt. Wollen wir also etwa einen  $TK^r$  erzwingen, so reicht dazu eine chromatische Zahl  $> cr^2$ : damit hat unser Graph nach Korollar 4.2.3 einen Untergraphen vom Minimalgrad  $\geq cr^2$ , und dieser enthält nach Satz 6.2.1 einen  $TK^r$ . (Hier ist  $c \in \mathbb{N}$  die Konstante aus Satz 6.2.1.) Dieser Umweg über den Durchschnittsgrad läßt auch kein wesentlich besseres Resultat zu: der in Satz 6.2.1 vorausgesetzte Durchschnittsgrad von  $cr^2$  ist (als Funktion von  $r$ ) größenordnungsmäßig kleinstmöglich (siehe Übung), und auch zur direkten Erzwingung irgendeines  $K^r$ -Minors ist immerhin noch ein Durchschnittsgrad von mindestens  $cr\sqrt{\log r}$  nötig (Satz 6.3.1). Die Frage ist aber: reicht vielleicht auch eine geringere chromatische Zahl als  $cr^2$  zur

Erzwingung eines topologischen  $K^r$ -Minors, oder eine geringere chromatische Zahl als  $cr\sqrt{\log r}$  zur Erzwingung irgendeines  $K^r$ -Minors?

Weder das eine noch das andere ist bekannt. Die folgende Vermutung von Hadwiger bejaht die Frage jedoch im Falle gewöhnlicher Minoren; die Vermutung gilt als eines der tiefsten offenen Probleme der Graphentheorie:

**Vermutung.** (Hadwiger 1943)

Für jedes  $r \in \mathbb{N}$  und jeden Graphen  $G$  gilt die Implikation

$$\chi(G) \geq r \Rightarrow G \succcurlyeq K^r.$$

Die Hadwiger-Vermutung ist trivial für  $r \leq 2$ , leicht für  $r = 3$  und  $r = 4$  (Übungen), und äquivalent zum Vierfarbensatz für  $r = 5$  und  $r = 6$ . Für  $r \geq 7$  ist die Vermutung offen. In der Formulierung  $G \succcurlyeq K^{\chi(G)}$  ist die Hadwiger-Vermutung wahr für fast alle Graphen.<sup>3</sup> Allgemein folgt der Fall  $r$  der Vermutung aus dem Fall  $r + 1$  (Übung).

Äquivalent zur Hadwiger-Vermutung für gegebenes  $r \in \mathbb{N}$  ist die Aussage, daß jeder Graph ohne  $K^r$ -Minor  $(r - 1)$ -färbbar ist. Dies wirft die allgemeinere Frage nach der Struktur dieser Graphen auf: aus einem hinreichend detaillierten Struktursatz über alle Graphen ohne  $K^r$ -Minor sollte auch folgen, ob diese Graphen  $(r - 1)$ -färbbar sind oder nicht.

Für  $r = 3$  beispielsweise sind die Graphen ohne  $K^r$ -Minor gerade die Wälder (warum?), und diese sind 2-färbbar. Für  $r = 4$  haben wir den folgenden Struktursatz für die Graphen ohne  $K^4$ -Minor:

**Proposition 6.4.1.** (Wagner 1960)

[10.4.2] *Ein Graph mit mindestens drei Ecken ist genau dann kantenmaximal ohne  $K^4$ -Minor, wenn er rekursiv aus Dreiecken durch Zusammenkleben<sup>4</sup> entlang von  $K^2$ s konstruiert werden kann.*

(0.7.2) *Beweis.* Wir erinnern zunächst an die Tatsache, daß wegen  $\Delta(K^4) = 3$   
(3.4.4) jeder  $MK^4$  einen  $TK^4$  enthält (Proposition 0.7.2); die Graphen ohne  $K^4$ -Minor sind also genau die Graphen ohne topologischen  $K^4$ -Minor.

Den Beweis, daß ein wie angegeben konstruierter Graph  $G$  keinen  $K^4$ -Minor enthält und überdies mit dieser Eigenschaft kantenmaximal ist, lassen wir als Übung; zum Beweis der Hadwiger-Vermutung für  $r = 4$  ist ohnehin nur die andere Richtung nötig. Diese zeigen wir mit Induktion nach  $|G|$ .

Sei also  $G$  gegeben, kantenmaximal ohne  $K^4$ -Minor. Ist  $|G| = 3$ , so ist  $G$  selbst ein Dreieck. Zum Induktionsschritt sei jetzt  $|G| \geq 4$ .

<sup>3</sup> Siehe Kapitel 9 zum Begriff "fast alle".

<sup>4</sup> Dies hatten wir in Kapitel 4.5 formal definiert.

Dann ist  $G$  nicht vollständig; es sei  $S$  eine trennende Eckenmenge kleinster Mächtigkeit, und  $C_1, C_2$  zwei Komponenten von  $G - S$ . Wegen der Minimalität von  $S$  hat jede Ecke aus  $S$  in beiden Komponenten einen Nachbarn. Ist  $|S| \geq 3$ , so enthält  $G$  drei kreuzungsfreie Wege  $P_1, P_2, P_3$  zwischen einer Ecke  $v_1 \in C_1$  und einer Ecke  $v_2 \in C_2$ . Wegen  $\kappa(G) = |S| \geq 3$  ist  $G - \{v_1, v_2\}$  zusammenhängend und enthält somit einen (kürzesten) Weg  $P$  zwischen zwei verschiedenen  $P_i$ . Dann ist jedoch  $P \cup P_1 \cup P_2 \cup P_3$  ein  $TK^4$  in  $G$ , mit Widerspruch.

Es gilt somit  $\kappa(G) \leq 2$ , und die Behauptung folgt mit der Induktionsannahme aus Lemma 3.4.4.<sup>5</sup>  $\square$

**Korollar 6.4.2.** *Jeder kantenmaximale Graph  $G$  ohne  $K^4$ -Minor hat  $2|G| - 3$  Kanten. Insbesondere ist jeder kantenmaximale Graph auch extremal.*

*Beweis.* Induktion nach  $|G|$ .  $\square$

**Korollar 6.4.3.** *Die Hadwiger-Vermutung ist wahr für  $r = 4$ .*

*Beweis.* Entsteht  $G$  aus  $G_1$  und  $G_2$  durch Zusammenkleben entlang eines vollständigen Graphen, so ist  $\chi(G) = \max\{\chi(G_1), \chi(G_2)\}$  (siehe den Beweis von Proposition 4.5.2). Aus Proposition 6.4.1 folgt daher mit Induktion nach  $|G|$ , daß alle kantenmaximalen (und somit alle) Graphen ohne  $K^4$ -Minor 3-färbbar sind.  $\square$

Der Beweis der Hadwiger-Vermutung für  $r = 5$  läßt sich mit Hilfe des Vierfarbensatzes aus einem ähnlichen – wenn auch wesentlich größeren – Struktursatz für die Graphen ohne  $K^5$ -Minor herleiten. Der Beweis dieses Satzes gleicht von der Art her dem von Proposition 6.4.1, ist jedoch etwas komplizierter und wesentlich länger. Wir zitieren den Satz daher ohne Beweis:

**Satz 6.4.4.** (Wagner 1937)

*Jeder mindestens 4-eckige kantenmaximale Graph ohne  $K^5$ -Minor ist rekursiv durch Zusammenkleben entlang von Dreiecken und  $K^2$ s konstruierbar aus ebenen Dreiecksgraphen und Exemplaren des Graphen  $W$  (Abb. 6.4.1).*

Mit Korollar 3.2.10 errechnet man aus Satz 6.4.4 leicht die höchstmögliche Kantenzahl eines Graphen ohne  $K^5$ -Minor: (3.2.10)

**Korollar 6.4.5.** *Ein Graph mit  $n$  Ecken und ohne  $K^5$ -Minor hat höchstens  $3n - 6$  Kanten.*  $\square$

---

<sup>5</sup> Der Beweis des Lemmas ist elementar und unabhängig vom Rest des Kapitels 3 lesbar.

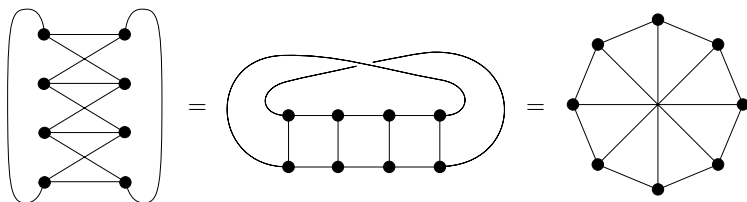


Abb. 6.4.1. Drei Darstellungen des Wagner-Graphen  $W$

Wie man leicht sieht, ist  $\chi(W) = 3$ . Nehmen wir mit dem Vierfarbensatz an, daß alle ebenen Dreiecksgraphen 4-färbbar sind, so erhalten wir analog zu Korollar 6.4.3:

**Korollar 6.4.6.** *Die Hadwiger-Vermutung ist wahr für  $r = 5$ .* □

Der Beweis der Hadwiger-Vermutung für  $r = 6$  ist noch einmal wesentlich schwieriger als der Fall  $r = 5$ . Auch er stützt sich auf den Vierfarbensatz: der Beweis zeigt (ohne den Vierfarbensatz zu benutzen), daß jedes Gegenbeispiel minimaler Ordnung aus einem plättbaren Graphen durch Hinzufügung einer Ecke entsteht und deshalb – nach dem Vierfarbensatz – kein Gegenbeispiel sein kann.

**Satz 6.4.7.** (Robertson, Seymour & Thomas 1993)  
*Die Hadwiger-Vermutung ist wahr für  $r = 6$ .*

Nach Korollar 6.4.5 enthält ein Graph mit  $n$  Ecken und mehr als  $3n - 6$  Kanten einen  $MK^5$ . Ein noch wesentlich tieferer Satz besagt, daß er sogar einen  $TK^5$  enthält:

**Satz 6.4.8.** (Mader 1998)  
*Jeder Graph mit  $n$  Ecken und mehr als  $3n - 6$  Kanten enthält  $K^5$  als topologischen Minor.*

Ein noch offenes Problem ist die Frage nach der Struktur der kantenmaximalen Graphen ohne  $K^5$  als topologischen Minor: ein Struktursatz für diese Graphen analog zu Satz 6.4.4 – aus dem Satz 6.4.8 als Korollar folgen könnte – ist bislang nicht bekannt.

## 6.5 Szemerédi's Regularitätslemma

Bereits vor über 20 Jahren entwickelte Szemerédi im Rahmen einer aufsehenerregenden Arbeit über Ramseyeigenschaften arithmetischer Progressionen ein graphentheoretisches Hilfsmittel, dessen Bedeutung für die extremale Graphentheorie erst in den letzten Jahren mehr und mehr erkannt wird: das sogenannte *Regularitätslemma*. Grob gesprochen besagt dieses Lemma, daß alle Graphen in einem gewissen Sinne durch Zufallsgraphen<sup>6</sup> approximierbar sind: jeder hinreichend große Graph  $G$  gestattet eine Zerlegung seiner Eckenmenge in wenige Teile, so daß seine meisten Kanten zwischen verschiedenen Teilen verlaufen und die Kanten zwischen je zwei Teilen besonders gleichmäßig verteilt sind – etwa so, wie wir es bei einer zufälligen Verteilung der Kanten erwarten würden.

Wollen wir nun beispielsweise zeigen, daß eine gewisse Kantendichte die Existenz eines gewünschten Teilgraphen zur Folge hat, und ist die Anzahl der uns gegebenen Kanten so großzügig bemessen, daß es weniger auf jede einzelne Kante ankommt als auf die Größenordnung ihrer Anzahl, so erlaubt uns das Regularitätslemma, statt mit der unbekanntenen Lokalstruktur von  $G$  mit der viel genauer bestimmbareren *erwarteten* Lokalstruktur zwischen je zwei Partitions Mengen zu arbeiten.

Wir werden das Regularitätslemma in diesem Abschnitt vorstellen, aber nicht beweisen.<sup>7</sup> Stattdessen leiten wir als Beispiel einer typischen Anwendung des Lemmas den Satz 6.1.2 von Erdős und Stone aus ihm her. Eine weitere Anwendung, ebenfalls ein durch das Lemma ganz einfach erscheinender Beweis eines tiefliegenden Satzes, geben wir in Kapitel 7.2.

Zur Formulierung des Regularitätslemmas brauchen wir zwei Begriffe. Ist  $G = (V, E)$  ein Graph, und sind  $X, Y \subseteq V$  zwei disjunkte Eckenmengen in  $G$ , so bezeichnen wir mit  $\|X, Y\|$  die Anzahl der  $X$ - $Y$ -Kanten von  $G$  und nennen

$$d(X, Y) := \frac{\|X, Y\|}{|X| \cdot |Y|} \quad d(X, Y)$$

die *Dichte* des Paares  $(X, Y)$ . (Dies ist also stets eine reelle Zahl zwischen 0 und 1.) Zu gegebenem  $\epsilon > 0$  nennen wir ein Paar  $(A, B)$  disjunkter Eckenmengen  $A, B \subseteq V$   *$\epsilon$ -regulär*, wenn für alle  $X \subseteq A$  und  $Y \subseteq B$  mit

$$|X| > \epsilon |A| \quad \text{und} \quad |Y| > \epsilon |B|$$

gilt:

$$|d(X, Y) - d(A, B)| < \epsilon.$$

<sup>6</sup> siehe Kapitel 9

<sup>7</sup> Die englische Version dieses Buches enthält einen genauen Beweis sowohl des Regularitätslemmas als auch von Lemma 6.5.3.



Die Kanten innerhalb eines  $\epsilon$ -regulären Paares von Eckenmengen sind also recht gleichmäßig verteilt: um so gleichmäßiger, je kleiner  $\epsilon$  ist.

**Lemma 6.5.1.** (Regularitätslemma)

[7.2.2] Zu jedem  $\epsilon > 0$  und  $\ell \in \mathbb{N}$  gibt es natürliche Zahlen  $L$  und  $N$  mit der folgenden Eigenschaft: zu jedem Graphen  $G = (V, E)$  mit  $n \geq N$  Ecken existiert eine Partition  $\{V_0, V_1, \dots, V_k\}$  von  $V$  mit

- (i)  $\ell \leq k \leq L$ ;
- (ii)  $|V_0| < \epsilon n$ ;
- (iii)  $|V_1| = \dots = |V_k|$ ;
- (iv) alle bis auf höchstens  $\epsilon k^2$  der Paare  $(V_i, V_j)$  mit  $1 \leq i < j \leq k$  sind  $\epsilon$ -regulär.

Das Wichtigste an der vom Lemma versprochenen Partition ist neben der gleichmäßigen Verteilung der Kanten gemäß (iv) die Anzahl der Partitionsklassen: diese ist nach oben durch eine im wesentlichen nur von  $\epsilon$  abhängige Konstante  $L$  beschränkt. Dadurch werden mit den partitionierten Graphen  $G$  auch deren Partitionsklassen beliebig groß: die  $\epsilon$ -regulären Paare aus (iv) bilden beliebig große bipartite Graphen mit besonders gleichmäßig verteilten Kanten. Solche Graphen enthalten aber (bei positiver Kantendichte) jeden vorgegebenen bipartiten Graphen als Teilgraphen. Ist nun die Kantendichte von  $G$  insgesamt groß genug, so werden hinreichend viele der  $\epsilon$ -regulären Paare  $(V_i, V_j)$  eine gewisse Mindestdichte  $d$  aufweisen, daß geeignete bipartite Teilgraphen zwischen ihnen zu einer Vielzahl erwünschter Teilstrukturen von  $G$  kombiniert werden können – siehe dazu den Beweis von Lemma 6.5.3.

Neben der oberen Schranke  $L$  enthält das Lemma noch eine untere Schranke  $\ell$  für die Anzahl der Partitions Mengen. Diese stellt lediglich sicher, daß wir genug Partitions Mengen bekommen, daß die Anzahl der Kanten innerhalb dieser Mengen vernachlässigbar wird.

Die Partitions Menge  $V_0$  schließlich spielt nur die Rolle eines Abfallimers: indem wir einige wenige Ecken fortwerfen, erreichen wir, daß die übrigen Partitions Mengen alle genau gleich groß sind.

Das Regularitätslemma ist nützlich vor allem für dichte Graphen: Graphen mit größenordnungsmäßig weniger als  $n^2$  Kanten auf  $n$  Ecken, wie wir sie etwa in den Abschnitten 6.2 und 6.3 betrachtet haben, erfüllen die Aussage des Lemmas für hinreichend große  $n$  mit jeder Partition in  $1/\epsilon$  gleich große Mengen (Übung).

Im Rest dieses Abschnitts schauen wir uns näher an, wie man das Regularitätslemma anwenden kann. Dazu brauchen wir zunächst den Hilfssatz, daß fast jede Ecke in einem  $\epsilon$ -regulären Paar dort etwa den Grad hat, den die Dichte dieses Paares erwarten läßt. Etwas allgemeiner gilt:

**Lemma 6.5.2.** *Es sei  $(A, B)$  ein  $\epsilon$ -reguläres Paar der Dichte  $d$ , und  $Y \subseteq B$  enthalte mindestens  $|Y| \geq \epsilon|B|$  Ecken. Dann haben alle bis auf weniger als  $\epsilon|A|$  der Ecken in  $A$  jeweils mindestens  $(d - \epsilon)|Y|$  Nachbarn in  $Y$ .*

*Beweis.* Es sei  $X \subseteq A$  die Menge der Ecken mit weniger als  $(d - \epsilon)|Y|$  Nachbarn in  $Y$ . Dann gilt  $\|X, Y\| < |X|(d - \epsilon)|Y|$ , und somit

$$d(X, Y) = \frac{\|X, Y\|}{|X||Y|} < d - \epsilon = d(A, B) - \epsilon.$$

Da  $(A, B)$   $\epsilon$ -regulär ist und  $|Y| \geq \epsilon|B|$ , folgt  $|X| < \epsilon|A|$ . □

Eine Eckenpartition von  $G$  wie im Regularitätslemma veranschaulichen wir uns wiederum durch einen Graphen  $R$ . Die Ecken von  $R$  seien die Partitionsmengen  $V_1, \dots, V_k$ , und zu gegebenem  $d \in (0, 1]$  seien zwei dieser Ecken benachbart, wenn sie ein  $\epsilon$ -reguläres Paar der Dichte  $\geq d$  bilden. Ist  $m := |V_1| = \dots = |V_k|$ , so nennen wir  $R$  einen *Regularitätsgraphen* von  $G$  mit Parametern  $\epsilon$ ,  $m$  und  $d$ . Ersetzen wir zu gegebenem  $s \in \mathbb{N}$  jede Ecke  $V_i$  von  $R$  durch eine Menge  $V_i^s$  von  $s$  Ecken, und die Kanten  $V_i V_j$  von  $R$  durch vollständig bipartite Graphen zwischen den entsprechenden Mengen  $V_i^s$  und  $V_j^s$ , so bezeichnen wir den erhaltenen Graphen mit  $R_s$ . (Für  $R = K^r$  ist also  $R_s = K_s^r$ .)

Das folgende Lemma liefert den Schlüssel zu einer ganzen Reihe von Anwendungen des Regularitätslemmas. Es besagt, daß wir Teilgraphen von  $R_s$  auch in  $G$  finden können, sofern  $\epsilon$  hinreichend klein und die  $V_i$  hinreichend groß sind. Die benötigten Werte von  $\epsilon$  und  $m$  hängen sogar nur von  $(d$  und) dem Maximalgraph jener Teilgraphen ab:

**Lemma 6.5.3.** *Zu allen  $d \in (0, 1]$  und  $\Delta \geq 1$  gibt es ein  $\epsilon_0 > 0$  mit der folgenden Eigenschaft. Ist  $G$  irgendein Graph und  $H$  ein Graph mit  $\Delta(H) \leq \Delta$ , und ist  $s \in \mathbb{N}$  und  $R$  ein Regularitätsgraph von  $G$  mit Parametern  $\epsilon \leq \epsilon_0$ ,  $m \geq s/\epsilon_0$  und  $d$ , so gilt*

$$H \subseteq R_s \Rightarrow H \subseteq G.$$

*Beweis.* Zu gegebenem  $d$  und  $\Delta$  wählen wir  $\epsilon_0 < d$  so klein, daß

$$\frac{\Delta + 1}{(d - \epsilon_0)^\Delta} \epsilon_0 \leq 1 \tag{1}$$

gilt; das ist möglich, da  $(\Delta + 1)\epsilon/(d - \epsilon)^\Delta \rightarrow 0$  für  $\epsilon \rightarrow 0$ . Sind nun  $G, H, s$  und  $R$  gegeben, und ist  $\{V_0, V_1, \dots, V_k\}$  die Eckenpartition von  $G$ , aus der  $R$  hervorging, so haben wir damit ein  $\epsilon \leq \epsilon_0$ ,  $V(R) = \{V_1, \dots, V_k\}$ , und  $|V_1| = \dots = |V_k| = m \geq s/\epsilon_0$ . Wir dürfen annehmen, daß  $H$  selbst ein Teilgraph von  $R_s$  ist (nicht nur isomorph dazu), sagen wir mit Ecken

 $R$ 

Regularitätsgraph

 $V_i^s$  $R_s$  $d, \Delta$  $\epsilon_0$  $G, H, R, R_s$  $V_i$  $\epsilon, k, m$

$u_i, h$   
 $\sigma$   
 $v_i$

Die Lage eines jeden  $u_i$  in einer der  $s$ -Mengen  $V_j^s$  von  $R_s$  definiert dann eine Abbildung  $\sigma: i \mapsto j$ . Unser Ziel ist es, jedes  $u_i$  auf eine Ecke  $v_i$  in "seinem"  $V_j$  abzubilden, also mit  $v_i \in V_{\sigma(i)}$ , so daß diese Abbildung eine Einbettung von  $H$  in  $G$  wird: mit  $v_1 \neq \dots \neq v_h$ , und  $v_i v_j \in E(G)$  wann immer  $u_i u_j$  Kante von  $H$  ist.

Wir werden die Ecken  $v_1, \dots, v_h$  der Reihe nach wählen. Zu jedem Zeitpunkt wird es für jedes  $i$  eine "Zielmenge"  $Y_i \subseteq V_{\sigma(i)}$  von Ecken geben, die noch als  $v_i$  in Frage kommen. Zu Beginn ist  $Y_i$  die gesamte Menge  $V_{\sigma(i)}$ . Im Verlauf der Einbettung wird  $Y_i$  dann immer kleiner (bis hin zu  $Y_i = \{v_i\}$ , wenn  $v_i$  schließlich gewählt ist): jedesmal, wenn wir eine Ecke  $v_j$  mit  $j < i$  und  $u_j u_i \in E(H)$  festlegen, löschen wir alle Ecken aus  $Y_i$ , die nicht zu  $v_j$  benachbart sind. Die Menge  $Y_i$  entwickelt sich somit als

$$V_{\sigma(i)} = Y_i^0 \supseteq \dots \supseteq Y_i^i = \{v_i\},$$

wobei  $Y_i^j$  die Version von  $Y_i$  nach der Festlegung von  $v_j$  und der daraus resultierenden Löschung von Ecken aus  $Y_i^{j-1}$  ist.

Damit die Zielmengen  $Y_i$  in diesem Prozeß nicht zu schnell zu klein werden, müssen wir die  $v_j$  mit  $j < i$  geeignet wählen. Bei der Festlegung eines  $v_j$  sind dabei nur die höchstens  $\Delta$  Mengen  $Y_i$  mit  $u_j u_i \in E(H)$  im Auge zu behalten. Für jedes dieser  $i > j$  wollen wir  $v_j$  so wählen, daß

$$Y_i^j := N(v_j) \cap Y_i^{j-1} \quad (2)$$

um höchstens einen konstanten Faktor kleiner ist als  $Y_i^{j-1}$ . Das aber ist möglich nach Lemma 6.5.2 (mit  $A = V_{\sigma(j)}$ ,  $B = V_{\sigma(i)}$  und  $Y = Y_i^{j-1}$ ): ist nicht bereits  $Y_i^{j-1}$  kleiner als  $\epsilon m$  (was wir induktiv ausschließen können), so haben höchstens  $\epsilon m$  Ecken von  $V_{\sigma(j)}$  weniger als  $(d - \epsilon) |Y_i^{j-1}|$  Nachbarn in  $Y_i^{j-1}$  und scheiden deshalb als Wahl von  $v_j$  aus. Für alle anderen Wahlen von  $v_j \in Y_j^{j-1}$ , insgesamt alle bis auf höchstens  $\Delta \epsilon m$  viele, gilt mit (2) dann

$$|Y_i^j| \geq (d - \epsilon) |Y_i^{j-1}| \quad (3)$$

für alle  $i > j$ .

Damit ist nur noch zu zeigen, daß die Mengen  $Y$  aus der obigen Anwendung von Lemma 6.5.2 in der Tat nie kleiner werden als  $\epsilon m$ , und daß wir bei der Festlegung von  $v_j$  stets noch  $s$  geeignete Ecken zur Wahl haben: da vor  $u_j$  höchstens  $s - 1$  andere Ecken  $u$  in  $V_{\sigma(j)}$  eingebettet worden sind, können wir  $v_j$  dann davon verschieden wählen.

All dies folgt aber aus unserer Wahl von  $\epsilon_0$ . Da jedes  $Y_i$  mit  $m$  Ecken beginnt und höchstens  $\Delta$  mal um einen Faktor von  $d - \epsilon$  schrumpft, gilt

$$|Y_i^j| - \Delta \epsilon m \stackrel{(3)}{\geq} (d - \epsilon)^\Delta m - \Delta \epsilon m \geq (d - \epsilon_0)^\Delta m - \Delta \epsilon_0 m \stackrel{(1)}{\geq} \epsilon_0 m \geq s$$

für  $j < i$ , insbesondere also  $|Y_i^{j-1}| \geq \epsilon_0 m \geq \epsilon m$  und  $|Y_j^{j-1}| - \Delta \epsilon m \geq s$ .  $\square$

Wir kommen jetzt zum Beweis des Satzes von Erdős und Stone.

**Beweis von Satz 6.1.2.** Wie im Satz seien  $r \geq 2$  und  $s$  gegeben. Für  $s = 1$  folgt die Behauptung aus dem Satz von Turán; es sei also  $s \geq 2$ . Weiter sei  $\gamma > 0$  gegeben; das  $\gamma$  wird die Rolle des  $\epsilon$  des Satzes spielen. Es sei  $G$  ein Graph,  $|G| =: n$ , und

(6.1.4)  
 $r, s, \gamma$ 

$$\|G\| \geq t_{r-1}(n) + \gamma n^2. \quad \|G\|$$

(Insbesondere gilt  $\gamma < 1$ .) Wir wollen zeigen, daß  $K_s^r \subseteq G$  gilt, sofern  $n$  groß genug ist.

Unser Plan ist wie folgt. Mit dem Regularitätslemma zeigen wir, daß  $G$  aufgrund seiner hohen Kantenzahl einen Regularitätsgraphen  $R$  hat, der nach dem Satz von Turán einen  $K^r$  enthält. Offenbar enthält  $R_s$  dann einen  $K_s^r$ , und mit Lemma 6.5.3 schließen wir hieraus auf  $K_s^r \subseteq G$ .

Mit Lemma 6.5.3 erhalten wir zu  $d := \gamma$  und  $\Delta := \Delta(K_s^r)$  eine Zahl  $\epsilon_0 > 0$ ; da die Aussage des Lemmas über  $\epsilon_0$  schwächer wird, wenn wir dieses kleiner machen, dürfen wir

 $d, \Delta$   
 $\epsilon_0$ 

$$\epsilon_0 < \gamma/2 < 1 \quad (1)$$

annehmen. Für die Anwendung des Regularitätslemmas wählen wir  $\ell > 1/\gamma$  beliebig und  $\epsilon > 0$  klein genug, daß  $\epsilon \leq \epsilon_0$  gilt und

 $\ell, \epsilon$ 

$$\delta := 2\gamma - \epsilon^2 - 4\epsilon - d - \frac{1}{\ell} > 0; \quad \delta$$

wegen  $2\gamma - d - \frac{1}{\ell} > 0$  ist dies möglich. Das Regularitätslemma liefert uns zu diesen  $\epsilon$  und  $\ell$  zwei Größen  $L$  und  $N$ . Wir nehmen

 $L, N$ 

$$n \geq \max \left\{ N, \frac{Ls}{\epsilon_0(1-\epsilon)} \right\} \quad n$$

an. Unser Graph  $G$  hat damit eine Eckenpartition wie im Regularitätslemma beschrieben. Für  $m := |V_1| = \dots = |V_k|$  gilt dann

 $k$   
 $m$ 

$$n \geq km, \quad (2)$$

sowie

$$m = \frac{n - |V_0|}{k} \geq \frac{n - \epsilon n}{L} = n \frac{1 - \epsilon}{L} \geq \frac{s}{\epsilon_0}$$

nach (i)–(ii) des Lemmas und Wahl von  $n$ . Es sei  $R$  der der Partition von  $G$  entsprechende Regularitätsgraph mit Parametern  $\epsilon, m, d$ . Wegen  $\epsilon \leq \epsilon_0$  und  $m \geq s/\epsilon_0$  erfüllt  $R$  die Voraussetzungen von Lemma 6.5.3, und nach Definition von  $\Delta$  gilt  $\Delta(K_s^r) = \Delta$ . Damit wir mit Lemma 6.5.3

wie gewünscht auf  $K_s^r \subseteq G$  schließen können, brauchen wir somit nur noch nachzuweisen, daß  $K^r \subseteq R$  gilt (und damit  $K_s^r \subseteq R_s$ ).

Wir zeigen dies wie geplant mit dem Satz von Turán. Dazu müssen wir sicherstellen, daß  $R$  genug Kanten hat, daß also genügend viele der  $\epsilon$ -regulären Paare  $(V_i, V_j)$  in  $G$  eine Dichte  $\geq d$  haben. Dies sollte daraus folgen, daß einerseits  $G$  nach Annahme viele Kanten hat, und andererseits nur wenige dieser Kanten außerhalb  $\epsilon$ -regulärer Paare liegen.

Wieviele Kanten von  $G$  liegen außerhalb  $\epsilon$ -regulärer Paare? Höchstens  $\binom{|V_0|}{2}$  Kanten liegen innerhalb von  $V_0$ , und nach (ii) des Regularitätslemmas sind dies weniger als  $\frac{1}{2}(\epsilon n)^2$  Kanten. Höchstens  $|V_0|km \leq \epsilon km$  Kanten verbinden  $V_0$  mit anderen Partitions Mengen. In den höchstens  $\epsilon k^2$  nicht  $\epsilon$ -regulären Paaren  $(V_i, V_j)$  liegen jeweils nicht mehr als  $m^2$ , zusammen also höchstens  $\epsilon k^2 m^2$  Kanten. In  $\epsilon$ -regulären Paaren zu geringer Dichte ( $< d$ ) liegen jeweils weniger als  $dm^2$  Kanten, insgesamt also weniger als  $\frac{1}{2}k^2 dm^2$ . Und schließlich liegen höchstens je  $\binom{m}{2}$  Kanten innerhalb einer der Partitions Mengen  $V_1, \dots, V_k$ , zusammen also nicht mehr als  $\frac{1}{2}m^2 k$  Kanten. Alle *anderen* Kanten von  $G$  liegen in  $\epsilon$ -regulären Paaren der Dichte  $\geq d$ , tragen also zu Kanten von  $R$  bei. Da jeder Kante von  $R$  höchstens  $m^2$  Kanten von  $G$  entsprechen, gilt somit insgesamt

$$\|G\| \leq \frac{1}{2}\epsilon^2 n^2 + \epsilon km + \epsilon k^2 m^2 + \frac{1}{2}k^2 dm^2 + \frac{1}{2}km^2 + \|R\| m^2.$$

Für hinreichend große  $n$  folgt

$$\begin{aligned} \|R\| &\geq \frac{1}{2}k^2 \frac{\|G\| - \frac{1}{2}\epsilon^2 n^2 - \epsilon km - \epsilon k^2 m^2 - \frac{1}{2}dk^2 m^2 - \frac{1}{2}km^2}{\frac{1}{2}k^2 m^2} \\ &\geq \frac{1}{2}k^2 \left( \frac{t_{r-1}(n) + \gamma n^2 - \frac{1}{2}\epsilon^2 n^2 - \epsilon km}{n^2/2} - 2\epsilon - d - \frac{1}{k} \right) \\ &\geq \frac{1}{2}k^2 \left( \frac{t_{r-1}(n)}{n^2/2} + 2\gamma - \epsilon^2 - 4\epsilon - d - \frac{1}{\ell} \right) \\ &= \frac{1}{2}k^2 (t_{r-1}(n) \binom{n}{2}^{-1} \left(1 - \frac{1}{n}\right) + \delta) \\ &> \frac{1}{2}k^2 \frac{r-2}{r-1} \\ &\geq t_{r-1}(k). \end{aligned}$$

(Zur vorletzten Ungleichung beachte, daß  $t_{r-1}(n) \binom{n}{2}^{-1}$  nach Lemma 6.1.4 gegen  $\frac{r-2}{r-1}$  konvergiert und  $(1 - \frac{1}{n})$  gegen 1.) Nach Satz 6.1.1 gilt somit  $K^r \subseteq R$ , wie gewünscht.  $\square$

# Übungen

1. - Zeige, daß  $K_{1,3}$  extremal ist ohne  $P^3$ .
2. - Bestimme für jedes  $k > 0$  die extremalen Graphen mit chromatischer Zahl höchstens  $k$ .
3. Gibt es einen Graphen, der kantenmaximal ist ohne  $K^3$ -Minor aber nicht extremal?
4. Finde zu gegebenem Wald  $F$  eine in  $n$  lineare obere Schranke für  $\text{ex}(n, F)$ .
5. + Bestimme für jedes  $k > 0$  die extremalen Graphen ohne  $k$  unabhängige Kanten.
6. Zeige, daß stets

$$t_{r-1}(n) \leq \frac{1}{2}n^2 \frac{r-2}{r-1}$$

gilt, mit Gleichheit wenn  $n$  durch  $r-1$  teilbar ist.

7. Zeige, daß  $t_{r-1}(n)/\binom{n}{2}$  für  $n \rightarrow \infty$  gegen  $(r-2)/(r-1)$  konvergiert.  
(Tip:  $t_{r-1}((r-1)\lfloor \frac{n}{r-1} \rfloor) \leq t_{r-1}(n) \leq t_{r-1}((r-1)\lceil \frac{n}{r-1} \rceil)$ .)
8. + Sind  $u, v$  nicht benachbarte Ecken eines Graphen  $G$ , so bezeichne  $G[u \rightarrow v]$  den aus  $G$  dadurch gewonnenen Graphen, daß wir zunächst alle mit  $u$  inzidenten Kanten löschen und  $u$  dann mit allen Nachbarn von  $v$  verbinden. Zeige, daß  $G[u \rightarrow v]$  keinen  $K^r$  enthält, wenn  $G$  keinen  $K^r$  enthielt. Beweise  $\text{ex}(n, K^r) = t_{r-1}(n)$  durch iterierte Anwendung dieser Operation auf einen gegebenen extremalen Graphen: wähle bei jedem Iterationsschritt  $u$  und  $v$  so, daß die Kantenzahl nicht sinkt und schließlich ein vollständig multipartiter Graph entsteht.
9. Zeige, daß ein  $K_{m,n}$  nach Löschung von höchstens  $(m-s)(n-t)/s$  Kanten stets noch einen  $K_{s,t}$  als Teilgraphen enthält.
10. Zug  $0 < s \leq t \leq n$  bezeichne  $z(n, s, t)$  die größtmögliche Kantenzahl eines bipartiten Graphen, dessen Eckenmengen beide genau  $n$  Ecken enthalten und der keinen  $K_{s,t}$  enthält. Beweise die Ungleichung  $2 \text{ex}(n, K_{s,t}) \leq z(n, s, t) \leq \text{ex}(2n, K_{s,t})$ .
11. Die obere Kantendichte eines unendlichen Graphen  $G$  ist das Infimum aller reellen Zahlen  $\alpha$ , so daß die endlichen Graphen  $H \subseteq G$  mit  $\|H\| \binom{|H|}{2}^{-1} > \alpha$  beschränkte Ordnung haben. Zeige, daß diese Zahl stets einen der abzählbar vielen Werten  $0, 1, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \dots$  annimmt.  
(Tip: Erdős-Stone.)
12. Beweise die folgende Abschwächung der Erdős-Sós-Vermutung (Ende Abschnitt 6.1): für  $k \geq 2$  enthält jeder Graph mit  $n$  Ecken und mindestens  $(k-1)n$  Kanten jeden Baum mit  $k$  Kanten als Teilgraphen.
13. Zeige, daß die von der Erdős-Sós-Vermutung behauptete Schranke für  $\text{ex}(n, T)$  als allgemeine Schranke für beliebige  $n$  für jeden Baum  $T$  bestmöglich ist. Ist sie sogar für jedes  $n$  und jedes  $T$  bestmöglich?

- 14.<sup>-</sup> Beweise die Erdős-Sós-Vermutung für den Fall, daß der betrachtete Baum ein Stern ist.
15. Beweise die Erdős-Sós-Vermutung für den Fall, daß der betrachtete Baum ein Weg ist.  
(Tip: Verwende das Resultat der nächsten Übung.)
16. Zeige, daß jeder zusammenhängende Graph  $G$  einen Weg der Länge  $\min \{ 2\delta(G), |G| - 1 \}$  enthält.
- 17.<sup>+</sup> Zeige, daß jede Funktion  $h$  wie in Satz 2.6.1 für alle geraden  $r$  die Ungleichung  $h(r) > \frac{1}{8}r^2$  erfüllt, und Satz 6.2.1 insofern bis auf die Konstante  $c$  bestmöglich ist.
18. Wofür wird das  $\frac{1}{6}k$  in der Aussage von Lemma 6.2.3 eigentlich im Beweis von Satz 6.2.1 benutzt? Hätte man es durch  $k/1000$  oder gar durch null ersetzen können?
- 19.<sup>+</sup> Für welche Bäume  $T$  gibt es eine gegen unendlich gehende Funktion  $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  mit der Eigenschaft, daß jeder Graph  $G$  mit  $\chi(G) < f(d(G))$  den Baum  $T$  als Untergraphen enthält? (Mit anderen Worten: können wir durch hohen Durchschnittsgrad dann eine hohe chromatische Zahl erzwingen, wenn wir zusätzlich fordern, daß  $T$  nicht als Untergraphen auftritt? Oder analog zur Vermutung von Gyárfás: können wir durch hohen Durchschnittsgrad  $d(G)$  zumindest dann  $T$  als Untergraphen erzwingen, wenn  $G$  eine niedrige chromatische Zahl hat?)
20. Beweise ohne Zuhilfenahme eines anderen Satzes den Satz von Wagner (1964), daß jeder Graph mit chromatischer Zahl mindestens  $2^r$  einen  $K^r$  als Minor enthält.  
(Tip: Induktion nach  $r$ .)
21. Beweise ohne Benutzung von Satz 6.2.1 den Satz von Mader (1967), daß jeder Graph mit Durchschnittsgrad  $\geq 2^{r-2}$  einen  $K^r$  als Minor enthält.  
(Tip: Induktion nach  $r \geq 2$ .)
22. Leite den Satz von Wagner (vorletzte Übung) aus dem Satz von Mader (letzte Übung) her.
- 23.<sup>-</sup> Leite den Vierfarbensatz aus der Hadwiger-Vermutung für  $r = 5$  her.
- 24.<sup>-</sup> Führe die Hadwiger-Vermutung für  $r$  auf die Hadwiger-Vermutung für  $r + 1$  zurück.
- 25.<sup>-</sup> Leite die folgende Abschwächung der Hadwiger-Vermutung aus einem geeigneten Satz dieses Kapitels her: für jedes  $\epsilon > 0$  hat jeder Graph der chromatischen Zahl  $\geq r^{1+\epsilon}$  einen  $K^r$ -Minor, falls nur  $r$  groß genug ist.
- 26.<sup>+</sup> Beweise die Hadwiger-Vermutung für  $r = 4$  direkt, ohne Benutzung von Proposition 6.4.1.
- 27.<sup>+</sup> Beweise die Hadwiger-Vermutung für Kantengraphen.

28. (i)– Erweise die Hadwiger-Vermutung äquivalent dazu, daß  $G \succ K^{\chi(G)}$  für alle Graphen  $G$  gilt.  
 (ii) Zeige, daß ein eckenminimales Gegenbeispiel  $G$  zur Hadwiger-Vermutung in der Fassung von (i) der Aussage  $K^{\chi(G)-1} \not\subseteq G$  genügt und ein zusammenhängendes Komplement hat.
29. Zeige, daß jeder wie in Proposition 6.4.1 konstruierte Graph kantenmaximal ohne  $K^4$ -Minor ist.
30. Beweise die Implikation  $\delta(G) \geq 3 \Rightarrow G \supseteq TK^4$ .  
 (Tip: Proposition 6.4.1.)
31. Ein Multigraph heißt *series-parallel*, wenn er rekursiv aus einem  $K^2$  konstruiert werden kann durch folgende Schritte: (i) Verdoppelung einer Kante; (ii) Unterteilung einer Kante. Zeige, daß ein 2-zusammenhängender Multigraph genau dann *series-parallel* ist, wenn er keinen (topologischen)  $K^4$ -Minor enthält.
32. Beweise Korollar 6.4.5.
33. Charakterisiere die Graphen mit  $n$  Ecken und mehr als  $3n - 6$  Kanten, die keinen  $TK_{3,3}$  enthalten. Bestimme insbesondere  $\text{ex}(n, TK_{3,3})$ .  
 (Tip: Nach einem Satz von Wagner sind alle kantenmaximalen Graphen ohne  $K_{3,3}$ -Minor rekursiv aus maximal plättbaren Graphen und Exemplaren von  $K^5$  konstruierbar, durch Zusammenkleben entlang von  $K^2$ s.)
34. Nach einem Satz von Pelikán enthält jeder Graph mit Minimalgrad  $\geq 4$  eine Unterteilung eines  $K^5$ : eines  $K^5$ , von dem eine Kante gelöscht wurde. Beweise mit Hilfe dieses Satzes die Abschwächung von Satz 6.4.8, daß jeder Graph mit  $n \geq 5$  Ecken und mindestens  $4n - 10$  Kanten einen  $TK^5$  enthält.  
 (Tip: Zeige mit Induktion nach  $|G|$ , daß aus  $\|G\| \geq 4n - 10$  für jede Ecke  $x \in G$  die Existenz eines  $TK^5 \subseteq G$  folgt, in dem  $x$  keine Verzweigungsecke ist.)
- 35.– Wozu dient in der Definition eines  $\epsilon$ -regulären Paares die Bedingung “ $|X| > \epsilon|A|$  und  $|Y| > \epsilon|B|$ ”?
- 36.– Zeige, daß jedes in einem Graphen  $G$   $\epsilon$ -reguläre Paar  $(V_i, V_j)$  auch in  $\overline{G}$   $\epsilon$ -regulär ist.
37. Beweise das Regularitätslemma für magere Graphen, d.h. für jede Folge  $(G_n)_{n \in \mathbb{N}}$  von Graphen der Ordnung  $n$  mit  $\|G_n\|/n^2 \rightarrow 0$  für  $n \rightarrow \infty$ .



## Notizen

Das Standard-Referenzwerk für Resultate und offene Probleme der extremalen Graphentheorie (und weit darüberhinaus) ist B. Bollobás, *Extremal Graph Theory*, Academic Press 1978; hier nicht gegebene Quellenverweise finden sich dort. Neuere Ergänzungen finden sich in dem von Bollobás geschriebenen Kapitel des *Handbook of Combinatorics* (R.L. Graham, M. Grötschel & L. Lovász, Hrsg.), North-Holland 1995. In L.W. Beineke & R.J. Wilson, *Selected Topics in Graph Theory 2*, Academic Press 1983, findet sich ein Übersichtsartikel von Simonovits zur extremalen Graphentheorie im engeren Sinne, der unter anderem die besondere Rolle der Turángraphen anschaulich herausarbeitet; einen neueren Überblick gibt Simonovits in (R.L. Graham & J. Nešetřil, Hrsg.) *The Mathematics of Paul Erdős*, Vol. 2, Springer 1996.

Der Satz von Turán ist das klassische Ursprungsresultat der Extremalen Graphentheorie; unser Beweis ist im wesentlichen der Originalbeweis. Der in den Übungen angedeutete Beweis geht auf Zykov zurück. Unsere Version des Satzes von Erdős & Stone ist eine leichte Vereinfachung des Originalresultates. Ein direkter Beweis des Satzes (ohne Verwendung des Regularitätslemmas) findet sich in L. Lovász, *Combinatorial Problems and Exercises* (2. Auflage), North-Holland 1993. Das Korollar des Satzes, dem dieser immerhin seine in der extremalen Graphentheorie so herausragende Stellung verdankt, wurde erst 20 Jahre später gefunden: von Erdős und Simonovits (1966).

Das in den Abschnitten 6.2 und 6.3 behandelte Problem, den zur Erzwingung eines  $K^T$ -Minors oder topologischen Minors notwendigen Durchschnittsgrad zu bestimmen, hat eine lange Geschichte. Ausgangspunkt war, wie so oft, das Vierfarbenproblem. Um dieses Problem zu "enttopologisieren", stellte Wagner bereits 1937 die Frage nach der Struktur der Graphen ohne  $K^5$ - oder ohne  $K_{3,3}$ -Minor – in der Hoffnung, durch einen entsprechenden Struktursatz vielleicht die Graphen in der einen oder der anderen dieser beiden Klassen (und damit insbesondere die plättbaren Graphen) als vierfärbbar zu erweisen. Wagners Struktursatz für die Graphen ohne  $K^5$ -Minor (Satz 6.4.4) war das Ergebnis seiner Bemühungen, der Ansatz also gescheitert: im Gegensatz zu seinem Struktursatz für die Graphen ohne  $K^4$ -Minor (Satz 6.4.1), der an Genauigkeit keinen Wunsch offenläßt, beschreibt Satz 6.4.4 die Struktur der Graphen ohne  $K^5$ -Minor zwar auch wunderschön – aber eben nur *modulo* der Struktur der in ihm als weiterhin ungeknackte Nuß enthaltenen plättbaren Graphen! Zu Einzelheiten der Wagnerschen Struktursätze für die Graphen ohne  $K^5$ - bzw.  $K_{3,3}$ -Minor, und zu weiteren Sätzen dieses Typs, siehe R. Diestel, *Graph Decompositions*, Oxford 1990.

Trotz seines Scheiterns im Hinblick auf das Vierfarbenproblem hatte Wagners Satz 6.4.4 Folgen wie kaum ein anderer Satz der Graphentheorie: er inspirierte Hadwiger zu seiner Vermutung, und Robertson & Seymour zu ihrer Minorentheorie mittels Baumzerlegungen (Kapitel 10)! Wagner selbst reagierte 1964 auf Hadwigers Vermutung mit dem Beweis, daß immerhin eine Funktion  $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  existiert mit der Eigenschaft, daß jeder Graph mit chromatischer Zahl mindestens  $f(r)$  einen  $K^T$ -Minor hat (siehe Übungen). Dieser Satz und sein Analogon für topologische Minoren wiederum inspirierten die in den Abschnitten 6.2 und 6.3 behandelte Frage nach dem geringsten Durchschnittsgrad, der dies erzwingt.

Die tiefsten Ideen zur Lösung dieses Problempaars stammen ohne Zweifel aus einer Reihe von Arbeiten Ende der sechziger Jahre von Mader. Unser Beweis von Lemma 6.2.3 stellt einige Kerngedanken dieser Arbeiten absichtlich ausführlich dar; Maders eigene Beweise, und erst recht der von Bollobás und Thomason gegebene Beweis des Lemmas, verpacken diese mittlerweile so knapp und elegant, daß die zugrundeliegenden Ideen nur noch zu errahnen sind. Insgesamt folgen wir im Beweis von Satz 6.2.1 B. Bollobás & A.G. Thomason, Proof of a conjecture of Mader, Erdős and Hajnal on topological complete subgraphs (Manuskript 1994), ohne jedoch Wert auf die Größe der Konstante  $c$  zu legen. Diese wurde mit etwa  $1/2$  nahezu bestmöglich bestimmt von J. Komlós & E. Szemerédi, Topological cliques in graphs II, *Combinatorics, Probability and Computing* **5** (1996), 79–90.

Satz 6.2.4 stammt von W. Mader, Topological subgraphs in graphs of large girth, *Combinatorica* **18** (1998), 405–412. Satz 6.2.5 ist von A.D. Scott, Induced trees in graphs of large chromatic number, *J. Graph Theory* **24** (1997), 297–311. Satz 6.3.1 wurde unabhängig 1982 von Kostochka (englische Fassung in A.V. Kostochka, Lower bounds of the Hadwiger number of graphs by their average degree, *Combinatorica* **4** (1984), 307–316) und 1984 von Thomason bewiesen (A.G. Thomason, An extremal function for contractions of graphs, *Math. Proc. Camb. Phil. Soc.* **95** (1984), 261–265). Daß hinreichend hohe Tailenweite beliebig große vollständige Minoren erzwingen kann, wurde 1983 von Thomassen entdeckt, der Lemma 6.3.2 mit  $g(G) \geq 4k - 3$  bewies.

Der in den Übungen angedeutete Beweis der Hadwiger-Vermutung für  $r = 4$  findet sich bereits in Hadwigers Originalarbeit von 1943. Analog zur Hadwiger-Vermutung bestand eine zeitlang die Vermutung von Hajós, daß jeder Graph der chromatischen Zahl  $\geq r$  einen  $K^r$  auch als topologischen Minor enthalten müsse. Diese Vermutung wurde von Catlin 1979 widerlegt; etwas später bewiesen Erdős und Fajtlowicz sogar, daß die Hajós-Vermutung für fast alle Graphen (siehe Kap. 9) falsch ist.

Maders Satz 6.4.8, daß  $3n - 5$  Kanten auf  $n$  Ecken bereits einen  $TK^5$  erzwingen, bestätigte eine Vermutung von Dirac aus dem Jahre 1964, die über Jahrzehnte den verschiedensten Beweisversuchen getrotzt hatte. Maders Beweis ist in zwei Arbeiten erschienen: W. Mader,  $3n - 5$  edges do force a subdivision of  $K_5$ , *Combinatorica* **18** (1998), 569–595; und W. Mader, An extremal problem for subdivisions of  $K_5^-$ , *J. Graph Theory* **30** (1999), 261–276.

Abschnitt 6.5, und insbesondere Lemma 6.5.3, entstammen dem Übersichtsartikel zum Regularitätslemma von J. Komlós & M. Simonovits in *Paul Erdős is 80*, Proc. Colloq. Math. Soc. János Bolyai (1994). Dort findet sich eine Fülle weiterer Details und Anwendungen des Lemmas. Eine—unabhängig auch von Rödl entwickelte—Adaption des Lemmas auf magere Graphen gibt Y. Kohayakawa, Szemerédi's regularity lemma for sparse graphs, in (F. Cucker & M. Shub, eds) *Foundations of Computational Mathematics*, Selected papers of a conference held at IMPA in Rio de Janeiro, January 1997, Springer-Verlag 1997. Das Regularitätslemma selbst stammt aus E. Szemerédi, Regular partitions of graphs, *Colloques Internationaux CNRS 260 – Problèmes Combinatoires et Théorie des Graphes*, Orsay (1976), 399–401.



In diesem Kapitel betrachten wir eine Problemstellung, die der Leitfrage des vorigen Kapitels oberflächlich ähnelt: welche Teilstrukturen finden sich notwendigerweise in einem Graphen, wenn dieser nur groß genug ist?

Das Regularitätslemma aus Kapitel 6.5 bietet eine mögliche Antwort auf diese Frage: jeder hinreichend große Graph  $G$  enthält große Untergraphen, die einem typischen Zufallsgraphen beliebig ähnlich sind. Fragen wir andererseits nach einem konkreten Untergraphen  $H$ , der uns besonders wichtig ist, so ähnelt unser Problem mehr der Hadwiger-Vermutung: natürlich können wir nicht erwarten, daß  $G$  ausgerechnet diesen Graphen  $H$  enthält, doch enthält es ihn nicht, so folgt daraus vielleicht eine interessante Strukturaussage über  $G$ .

Die für dieses Kapitel typische Art einer solchen Strukturaussage ist einfach die Existenz eines anderen konkreten Untergraphen. Enthält etwa zu gegebenem  $r \in \mathbb{N}$  jeder hinreichend große Graph entweder einen  $K^r$  oder einen  $\overline{K}^r$ ? Enthält jeder hinreichend große zusammenhängende Graph entweder einen  $K^r$  oder einen langen Weg oder einen großen Star als Untergraphen?

Trotz der oberflächlichen Ähnlichkeit zu den Fragestellungen aus Kapitel 6 führt die Betrachtung von Fragen wie der obigen zu Mathematik ganz anderer Art: die Beweise der wichtigsten Sätze dieses Kapitels haben mehr gemeinsam mit denen verwandter Sätze etwa in der Algebra als mit anderen Teilen der Graphentheorie. Das genaue Studium dieser Beweistechniken ist denn auch ein eigenständiges – und faszinierendes – Gebiet der Kombinatorik: das Gebiet der *Ramseytheorie*.

## 7.1 Der Satz von Ramsey

Der Satz von Ramsey besagt, in seiner einfachsten Version, daß es in jedem hinreichend großen Graphen  $G$  entweder einen vollständigen oder einen kantenlosen Untergraphen vorgegebener Ordnung  $r$  gibt.

Wie könnte man dies beweisen? Beginnen wir einfach, versuchsweise, die Konstruktion des gesuchten Untergraphen mit einer beliebigen Ecke  $v_1 \in V_1 := V(G)$ . Können wir  $v_1$  als die erste Ecke eines  $K^r$  oder  $\overline{K}^r$  in  $G$  auffassen? Ist  $|G|$  groß, so gibt es jedenfalls eine große Menge  $V_2$  von Ecken, die entweder alle zu  $v_1$  benachbart oder alle nicht zu  $v_1$  benachbart sind. Entsprechend könnte  $v_1$  die erste Ecke eines  $K^r$  bzw.  $\overline{K}^r$  sein, dessen weitere Ecken alle in  $V_2$  liegen. Wählen wir also für unseren  $K^r$  oder  $\overline{K}^r$  eine zweite Ecke  $v_2$  aus dieser Menge  $V_2$ . Da auch  $V_2$  groß ist, gibt es eine immer noch relativ große Teilmenge  $V_3 \subseteq V_2$  von Ecken, die bezüglich  $v_2$  alle "vom gleichen Typ" sind, d.h. zu  $v_2$  entweder alle benachbart oder alle nicht benachbart (und entsprechend bezüglich  $v_1$ , wegen  $V_3 \subseteq V_2$ ); wir setzen nun unsere Suche nach Ecken eines  $K^r$  oder  $\overline{K}^r$  in  $V_3$  fort (Abb. 7.1.1).

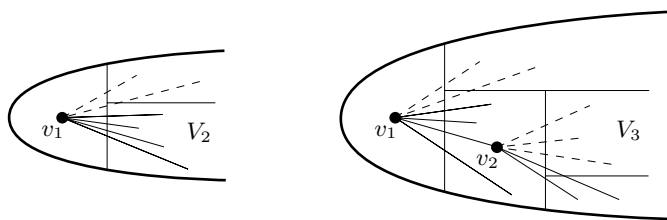


Abb. 7.1.1. Konstruktion der Eckenfolge  $v_1, v_2, \dots$

Wie lange können wir so fortfahren? Dies hängt offenbar davon ab, wie groß unsere erste Eckenmenge  $V_1$  war: jedes  $V_i$  ist mindestens noch etwa halb so groß wie sein Vorgänger  $V_{i-1}$ , d.h. wir werden  $s$  Konstruktionsschritte vollziehen können, wenn  $G$  mindestens etwa  $2^s$  Ecken hatte. Wie der folgende Beweis zeigt, reicht die Konstruktion von  $s = 2r - 3$  Ecken  $v_i$  aus, um unter ihnen in der Tat die Ecken eines  $K^r$  oder  $\overline{K}^r$  in  $G$  zu finden.

**Satz 7.1.1.** (Ramsey 1930)

[7.2.2] *Zu jedem  $r \in \mathbb{N}$  gibt es ein  $n \in \mathbb{N}$  mit der Eigenschaft, daß jeder Graph mit mindestens  $n$  Ecken einen  $K^r$  oder einen  $\overline{K}^r$  als Untergraphen enthält.*

*Beweis.* Die Behauptung ist trivial für  $r = 0, 1$ ; im folgenden sei  $r \geq 2$ . Es sei  $n := 2^{2r-3}$ , und  $G$  ein Graph mit mindestens  $n$  Ecken. Wir definieren rekursiv Eckenmengen  $V_1, \dots, V_{2r-2}$  und Ecken  $v_i \in V_i$  in  $G$  mit den folgenden Eigenschaften:

- (i)  $|V_i| = 2^{2r-2-i}$  ( $i = 1, \dots, 2r-2$ );

- (ii)  $V_i \subseteq V_{i-1} \setminus \{v_{i-1}\}$  ( $i = 2, \dots, 2r-2$ );  
 (iii)  $v_{i-1}$  ist entweder zu jeder oder zu keiner Ecke in  $V_i$  benachbart  
 ( $i = 2, \dots, 2r-2$ ).

Es sei  $V_1 \subseteq V(G)$  irgendeine Menge von  $2^{2r-3}$  Ecken, und  $v_1 \in V_1$  beliebig. Damit ist (i) für  $i = 1$  erfüllt; (ii) und (iii) sind trivialerweise wahr. Zu gegebenem  $i$  mit  $1 < i \leq 2r-2$  seien nun  $V_{i-1}$  und  $v_{i-1} \in V_{i-1}$  bereits so gewählt, daß (i)–(iii) für  $i-1$  gelten. Da

$$|V_{i-1} \setminus \{v_{i-1}\}| = 2^{2r-1-i} - 1$$

ungerade ist, hat  $V_{i-1}$  eine Teilmenge  $V_i$ , die (i)–(iii) erfüllt; wir wählen  $v_i \in V_i$  beliebig.

Unter den  $2r-3$  Ecken  $v_1, \dots, v_{2r-3}$  gibt es  $r-1$  Ecken  $v_{i-1}$ , die in (iii) vom gleichen Typ sind: entweder jeweils zu allen Ecken in  $V_i$  benachbart oder zu keiner. Da  $V_i$  die Ecken  $v_i, \dots, v_{2r-2}$  enthält, induzieren diese  $r-1$  Ecken zusammen mit  $v_{2r-2}$  entsprechend einen  $K^r$  oder einen  $\overline{K^r}$  in  $G$ .  $\square$

Die kleinste zu  $r$  gehörige Zahl  $n$  aus Satz 7.1.1 nennt man die *Ramseyzahl von  $r$* ; nach unserem Beweis des Satzes ist  $n \leq 2^{2r-3}$ . In Kapitel 9 werden wir auch eine untere Schranke für die Ramseyzahl von  $r$  finden (Satz 9.1.3).

*Ramseyzahl von  $r$*

Im Zusammenhang mit dem Satz von Ramsey drückt man der Anschaulichkeit halber Partitionen häufig als Färbungen aus: eine *Färbung* einer Menge  $X$  mit  $c$  Farben, kurz eine  *$c$ -Färbung* (der Elemente) von  $X$ , ist dann nichts weiter als eine Partition von  $X$  in  $c$  Teilmengen – die halt mit den verschiedenen Farben indiziert werden. (Insbesondere muß eine Färbung der Kantenmenge eines Graphen keine Auflagen erfüllen wie in Kapitel 4: benachbarte Kanten dürfen gleich gefärbt sein, d.h. der gleichen Partitionsmenge angehören.) Haben wir die Menge  $[X]^k$  aller  $k$ -elementigen Teilmengen einer Menge  $X$  mit  $c$  Farben gefärbt, so nennen wir eine Menge  $Y \subseteq [X]^k$  *einfarbig*, wenn alle Elemente von  $Y$  die gleiche Farbe haben.<sup>1</sup>

*$c$ -Färbung*

$[X]^k$

*einfarbig*

Satz 7.1.1 sagt in dieser Sprechweise folgendes: zu jedem  $r$  gibt es ein  $n$  mit der Eigenschaft, daß jede  $n$ -elementige Menge  $X$  bei beliebiger 2-Färbung von  $[X]^2$  eine einfarbige Teilmenge  $Y$  mit mindestens  $r$  Elementen hat. Es ist ein interessantes Phänomen, daß der Beweis der entsprechenden Aussage über  $c$ -Färbungen von  $[X]^k$  für beliebig große  $c, k \in \mathbb{N}$  fast identisch ist mit dem oben bewiesenen Fall  $k = c = 2$ . Um diesen Beweis nicht lediglich zu wiederholen, beweisen wir den allgemeinen Satz über einen kleinen Umweg: wir zeigen die Aussage erst

<sup>1</sup> Beachte, daß zwar  $Y$  einfarbig heißt, aber nicht die Elemente von  $Y$  selbst sondern ihre  $k$ -Teilmengen Farben tragen.

für unendliche Mengen  $X$  und  $Y$  (was einfacher ist!) und leiten dann den endlichen Satz daraus mit einem sogenannten *Kompaktheitsschluß* ab. Dies ist eine häufig angewandte Technik, deren Illustration sich hier anbietet.

[10.1.1] **Satz 7.1.2.** *Sind  $k, c \geq 1$  natürliche Zahlen, ist  $X$  eine unendliche Menge, und ist  $[X]^k$  mit  $c$  Farben gefärbt, so hat  $X$  eine unendliche einfarbige Teilmenge.*

*Beweis.* Wir beweisen den Satz für festes  $c$  mit Induktion nach  $k$ . Für  $k = 1$  ist die Aussage trivial; es sei daher  $k > 1$ , und die Aussage sei wahr für kleinere  $k$ .

Es sei  $X$  eine unendliche Menge, und  $[X]^k$  sei mit  $c$  Farben gefärbt. Wir definieren rekursiv eine unendliche Folge  $X_0, X_1, \dots$  unendlicher Teilmengen  $X_i \subseteq X$ , sowie Elemente  $x_i \in X_i$ , mit den folgenden Eigenschaften (für alle  $i$ ):

- (i)  $X_{i+1} \subseteq X_i \setminus \{x_i\}$ ;
- (ii) alle  $k$ -elementigen Mengen  $\{x_i\} \cup Z$  mit  $Z \in [X_{i+1}]^{k-1}$  tragen die gleiche Farbe; diese Farbe sei mit  $x_i$  assoziiert.

assoziiert

Wir beginnen mit  $X_0 := X$  und wählen  $x_0 \in X_0$  beliebig. Nach Annahme ist  $X_0$  unendlich. Sind für ein  $i \in \mathbb{N}$  bereits eine unendliche Menge  $X_i$  und ein  $x_i \in X_i$  gewählt, so betrachten wir die  $c$ -Färbung von  $[X_i \setminus \{x_i\}]^{k-1}$ , in der jede Menge  $Z$  mit der Farbe von  $\{x_i\} \cup Z$  gefärbt ist. Nach Induktionsannahme hat  $X_i \setminus \{x_i\}$  eine unendliche einfarbige Teilmenge bezüglich dieser Färbung, und diese Teilmenge sei unser  $X_{i+1}$ . Offenbar sind die Bedingungen (i) und (ii) damit erfüllt. Schließlich wählen wir  $x_{i+1} \in X_{i+1}$  beliebig.

Da  $c$  endlich ist, gibt es unter unseren  $c$  Farben eine, die mit unendlich vielen  $x_i$  assoziiert ist. Die Menge dieser  $x_i$  ist eine einfarbige unendliche Teilmenge von  $X$ .  $\square$

Um aus Satz 7.1.2 seine endliche Version abzuleiten, verwenden wir ein über die Graphentheorie hinaus bekanntes Hilfsmittel: das *Unendlichkeitslemma* von König (Abb. 7.1.2).

**Lemma 7.1.3.** (Königs Unendlichkeitslemma)

*Es sei  $V_0, V_1, \dots$  eine unendliche Folge disjunkter, nicht leerer, endlicher Mengen, und  $G$  ein Graph auf ihrer Vereinigung. Für jedes  $n \geq 1$  habe jede Ecke  $v \in V_n$  einen Nachbarn  $f(v)$  in  $V_{n-1}$ . Dann enthält  $G$  einen unendlichen Weg  $v_0 v_1 \dots$  mit  $v_n \in V_n$  für alle  $n$ .*

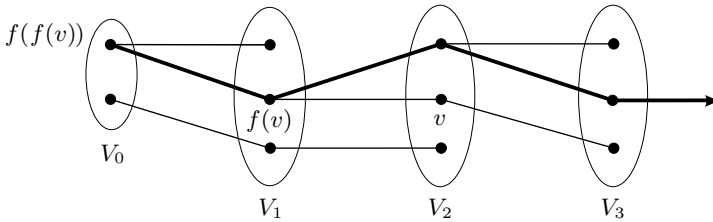


Abb. 7.1.2. Königs Unendlichkeitslemma

*Beweis.* Es sei  $\mathcal{P}$  die Menge aller in  $V_0$  endenden Wege der Form  $v f(v) f(f(v)) \dots$ . Wir definieren unseren unendlichen Weg  $v_0 v_1 \dots$  induktiv. Gleichzeitig mit der Folge  $v_0, v_1, \dots$  seiner Ecken konstruieren wir eine Folge  $\mathcal{P}_0 \supseteq \mathcal{P}_1 \supseteq \dots$  unendlicher Teilmengen von  $\mathcal{P}$ , so daß für alle  $n$  jeder Weg aus  $\mathcal{P}_n$  mit dem Teilweg  $v_n \dots v_0$  endet.

Offenbar ist  $\mathcal{P}$  unendlich. Da  $V_0$  endlich ist und jeder Weg aus  $\mathcal{P}$  in  $V_0$  endet, liegt eine Ecke  $v_0 \in V_0$  auf unendlich vielen nicht trivialen Wegen aus  $\mathcal{P}$ ; es sei  $\mathcal{P}_0$  die Menge dieser in  $v_0$  endenden Wege.

Für  $n \geq 1$  seien nun  $v_0, \dots, v_{n-1}$  und  $\mathcal{P}_{n-1} \subseteq \mathcal{P}$  bereits so gewählt, daß  $v_{n-1} \dots v_0 \subsetneq P$  gilt für alle  $P \in \mathcal{P}_{n-1}$  und  $\mathcal{P}_{n-1}$  unendlich ist. Da jeder Weg aus  $\mathcal{P}_{n-1}$  (genau) eine Ecke aus  $V_n$  enthält, gibt es wie oben eine Ecke  $v_n \in V_n$ , die im Innern unendlich vieler Wege aus  $\mathcal{P}_{n-1}$  liegt; die Menge dieser mit  $v_n \dots v_0$  endenden Wege nennen wir  $\mathcal{P}_n$ .

Da die Mengen  $\mathcal{P}_n$  trotz ihres Abnehmens stets unendlich bleiben, können wir diese Konstruktion für alle  $n \in \mathbb{N}$  durchführen. Da  $v_n$  jeweils zu  $v_{n+1}$  benachbart ist, definiert die Folge  $v_0, v_1, \dots$  in der Tat einen unendlichen Weg in  $G$ .  $\square$

**Satz 7.1.4.** Zu  $k, c, r \geq 1$  existiert stets ein  $n \geq k$  mit der Eigenschaft, daß jede  $n$ -elementige Menge  $X$  bei jeder  $c$ -Färbung von  $[X]^k$  eine einfarbige  $r$ -elementige Teilmenge hat.

[7.3.3]

*Beweis.* Wie in der Mengenlehre üblich, bezeichne  $n \in \mathbb{N}$  (auch) die Menge  $\{0, \dots, n-1\}$ . Angenommen, die Behauptung sei falsch für gewisse  $k, c, r$ . Dann gibt es zu jedem  $n \geq k$  eine  $n$ -elementige Menge, oBdA die Menge  $n$ , und eine  $c$ -Färbung  $[n]^k \rightarrow c$ , so daß  $n$  keine einfarbige  $r$ -elementige Teilmenge hat. Solche Färbungen nennen wir *schlecht*; nach Annahme gibt es also zu jedem  $n \geq k$  eine schlechte Färbung von  $[n]^k$ . Wir werden aus all diesen Färbungen eine schlechte Färbung von  $[\mathbb{N}]^k$  konstruieren, im Widerspruch zu Satz 7.1.2.

 $k, c, r$ schlechte  
Färbung

Für jedes  $n \geq k$  sei  $V_n \neq \emptyset$  die Menge aller schlechten Färbungen von  $[n]^k$ . Jede Färbung  $g \in V_{n+1}$  induziert durch Restriktion auf  $[n]^k$  eine Färbung  $f(g) \in V_n$ . Nach dem Unendlichkeitslemma gibt es eine unendliche Folge  $g_k, g_{k+1}, \dots$  schlechter Färbungen  $g_n \in V_n$  mit  $f(g_{n+1}) = g_n$  für alle  $n \geq k$ . Da für jedes  $m \geq k$  alle Färbungen  $g_n$  mit  $n \geq m$  auf  $[m]^k$  übereinstimmen, ist für jedes  $Y \in [\mathbb{N}]^k$  der Wert  $g_n(Y)$



für alle  $n > \max Y$  gleich. Definieren wir  $g(Y)$  als diesen gemeinsamen Wert  $g_n(Y)$ , so ist  $g$  eine schlechte Färbung von  $[\mathbb{N}]^k$ : jede  $r$ -elementige Teilmenge  $S \subseteq \mathbb{N}$  ist in einem hinreichend großen  $n$  enthalten, und da  $g$  auf  $[n]^k$  mit der schlechten Färbung  $g_n$  übereinstimmt, kann  $S$  nicht einfarbig sein.  $\square$

Ramsey-  
zahl  
 $R(k, c, r)$

Die kleinste zu  $k, c, r$  gehörige Zahl  $n$  aus Satz 7.1.4, die *Ramseyzahl* dieser Parameter, bezeichnen wir mit  $R(k, c, r)$ .

## 7.2 Ramseyzahlen von Graphen

Der Satz von Ramsey läßt sich wie folgt umformulieren: ist  $H = K^r$  gegeben und  $G$  ein Graph mit hinreichend vielen Ecken, so hat entweder  $G$  selbst oder sein Komplement  $\overline{G}$  einen zu  $H$  isomorphen Teilgraphen. Gilt die entsprechende Aussage auch für nicht vollständige Graphen  $H$ ? Selbstverständlich: wegen  $H \subseteq K^{|H|}$  folgt sie sofort aus dem obigen Spezialfall.

Fragen wir jedoch nach dem *kleinstmöglichen*  $n$ , so daß jeder Graph  $G$  mit  $n$  Ecken die genannte Eigenschaft hat – dies ist die *Ramseyzahl*  $R(H)$  von  $H$  – so wird die Frage interessant: je weniger Kanten  $H$  hat, desto eher wird  $H$  in  $G$  oder in  $\overline{G}$  einbettbar sein, und um so geringer sollte  $R(H)$  ausfallen. Zu erwarten ist also, daß für magere Graphen  $H$  die Ramseyzahl von  $H$  weit unter der Ramseyzahl von  $|H|$  liegt.

Ramsey-  
zahl  $R(H)$

$R(H_1, H_2)$

Etwas allgemeiner bezeichne  $R(H_1, H_2)$  die kleinste natürliche Zahl  $n$ , so daß für jeden Graphen  $G$  auf  $n$  Ecken entweder  $H_1 \subseteq G$  oder  $H_2 \subseteq \overline{G}$  gilt. Der genaue Wert von  $R(H_1, H_2)$  ist für die meisten Graphen  $H_1, H_2$  nur in ausgesprochen schlechter Näherung bekannt. Interessant dabei ist, daß die besten bekannten unteren Schranken nicht selten durch Zufallsgraphen erreicht werden (siehe etwa Satz 9.1.3), anstatt durch explizite Konstruktionen großer Graphen  $G$  mit  $H_1 \not\subseteq G$  und  $H_2 \not\subseteq \overline{G}$ .

Die folgende Proposition gehört zu den wenigen Fällen, in denen Ramseyzahlen für eine größere Klasse von Graphen explizit bekannt sind:

**Proposition 7.2.1.** *Es seien  $s, t \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ , und  $T$  ein beliebiger Baum mit  $t$  Ecken. Dann ist  $R(T, K^s) = (t-1)(s-1) + 1$ .*

(4.2.3)  
(0.5.4)

*Beweis.* Die disjunkte Vereinigung von  $s-1$  Graphen  $K^{t-1}$  enthält kein Exemplar von  $T$ , und das Komplement dieses Graphen, der vollständig  $(s-1)$ -partite Graph  $K_{t-1}^{s-1}$ , enthält keinen  $K^s$ -Teilgraphen. Damit ist  $R(T, K^s) \geq (t-1)(s-1) + 1$  gezeigt.

Umgekehrt sei nun  $G$  ein beliebiger Graph mit  $n = (t-1)(s-1) + 1$  Ecken, dessen Komplement keinen  $K^s$  enthält. Dann ist  $s > 1$ , und

bei Eckenfärbungen von  $G$  kann keine Farbklasse mehr als  $s - 1$  Ecken enthalten; wir brauchen daher stets  $\chi(G) \geq \lceil n/(s - 1) \rceil = t$  Farben. Nach Korollar 4.2.3 hat  $G$  einen Teilgraphen  $H$  mit  $\delta(H) \geq t - 1$ , und dieser enthält  $T$  nach Korollar 0.5.4.  $\square$

Als Hauptergebnis dieses Abschnitts bringen wir einen der seltenen allgemeinen Sätze, die eine relativ niedrige obere Schranke für die Ramseyzahlen gewisser Graphen zum Inhalt haben. Der Satz behandelt magere Graphen: er besagt, daß für Graphen  $H$  mit beschränktem Maximalgrad ihre Ramseyzahlen höchstens linear in  $|H|$  wachsen – eine enorme Verbesserung gegenüber unserer exponentiellen Schranke aus dem Beweis von Satz 7.1.1.

**Satz 7.2.2.** (Chvátal, Rödl, Szemerédi & Trotter 1983)

Zu jedem  $\Delta \in \mathbb{N}$  gibt es eine Konstante  $c$ , so daß

$$R(H) \leq c |H|$$

gilt für alle Graphen  $H$  mit  $\Delta(H) \leq \Delta$ .

*Beweis.* Die Grundidee des Beweises ist wie folgt. Ist  $G$  hinreichend groß, so hat  $G$  nach dem Regularitätslemma (6.5.1) einen Regularitätsgraphen  $R$  mit kleinem  $\epsilon$ , großem  $m$  und  $d = 0$ . Letztere Bedingung besagt, daß  $R$  sämtliche Kanten hat, für die das entsprechende Paar von Eckenmengen in  $G$   $\epsilon$ -regulär ist – egal, ob die Dichte dieses Paares groß oder klein ist. Dadurch hat  $R$  viele Kanten, enthält nach dem Satz von Turán also einen  $K^r$  für großes  $r$ . Wir färben die Kanten dieses  $K^r$  mit zwei Farben, je nachdem ob das entsprechende  $\epsilon$ -reguläre Paar in  $G$  eine Dichte größer oder kleiner als  $1/2$  hat. Ist  $r$  groß genug (mindestens die Ramseyzahl von  $\chi(H) \leq \Delta + 1$ ), so enthält  $R_s$  (etwa für  $s \geq |H|$ ; siehe Kapitel 6.5 zur Definition von  $R_s$ ) ein “einfarbiges” Exemplar von  $H$ . Da  $R$  auch ein Regularitätsgraph von  $\overline{G}$  ist, finden wir  $H$  nach Lemma 6.5.3 entsprechend auch in  $G$  oder in  $\overline{G}$ .

Zum Beweis sei nun  $\Delta \in \mathbb{N}$  gegeben. Lemma 6.5.3 liefert uns zu  $d := 1/2$  und  $\Delta$  ein  $\epsilon_0$ . Es sei  $\ell$  die Ramseyzahl von  $\Delta + 1$  (wie nach Satz 7.1.1 definiert). Weiter sei  $\epsilon \leq \epsilon_0$  positiv aber so klein, daß für  $k = \ell$  (und damit für alle  $k \geq \ell$ )

$$2\epsilon < \frac{1}{\ell - 1} - \frac{1}{k} \quad (1)$$

gilt. (Insbesondere ist dann  $\epsilon < 1$ .) Das Regularitätslemma 6.5.1 liefert uns zu diesen  $\epsilon$  und  $\ell$  zwei Größen  $L$  und  $N$ .

Alle bisher definierten Größen hängen lediglich von  $\Delta$  ab. Wir beweisen nun die Aussage des Satzes für

$$c := \max \left\{ N, \frac{L}{\epsilon_0(1 - \epsilon)} \right\}.$$

(6.1.1)

(6.5)

(7.1.1)

 $\Delta, d$  $\epsilon_0$  $\ell, \epsilon$  $L, N$  $c$

$s$  Dazu sei  $H$  mit  $\Delta(H) \leq \Delta$  gegeben; wir setzen  $s := |H|$ . Es sei nun  $G$   
 $G$  ein beliebiger Graph der Ordnung

$$n \geq c|H| \geq N.$$

Wir zeigen, daß  $H \subseteq G$  oder  $H \subseteq \overline{G}$  gilt.

$k, m$  Wegen  $n \geq N$  hat  $G$  nach dem Regularitätslemma eine Eckenpartition wie dort beschrieben. Für  $m := |V_1| = \dots = |V_k|$  gilt dann

$$m = \frac{n - |V_0|}{k} \geq \frac{n - \epsilon n}{L} = n \frac{1 - \epsilon}{L} \geq cs \frac{1 - \epsilon}{L} \geq \frac{s}{\epsilon_0}$$

$R$  nach (i)–(ii) des Lemmas und Definition von  $c$ . Es sei  $R$  der der Partition von  $G$  entsprechende Regularitätsgraph mit Parametern  $\epsilon, m, 0$ .  $R$  hat  $k$  Ecken und, nach (iv) des Regularitätslemmas, mindestens die folgende Anzahl von Kanten:

$$\begin{aligned} \binom{k}{2} - \epsilon k^2 &= \frac{1}{2}k^2 \left(1 - \frac{1}{k} - 2\epsilon\right) \\ &\stackrel{(1)}{>} \frac{1}{2}k^2 \left(1 - \frac{1}{k} - \frac{1}{\ell-1} + \frac{1}{k}\right) \\ &= \frac{1}{2}k^2 \left(\frac{\ell-2}{\ell-1}\right) \\ &\geq t_{\ell-1}(k). \end{aligned}$$

$K$  Nach Satz 6.1.1 hat  $R$  damit einen Teilgraphen  $K = K^\ell$ .

Wir färben nun die Kanten von  $R$  mit zwei Farben: grün, wenn das der Kante entsprechende Paar  $(V_i, V_j)$  in der Zerlegung von  $G$  die Dichte  $\geq 1/2$  hat, und rot sonst. Wir bezeichnen den von den grünen Kanten gebildeten aufspannenden Teilgraphen von  $R$  mit  $R'$ , und den entsprechenden roten Teilgraphen plus die Kanten der Dichte genau  $1/2$  mit  $R''$ . Offenbar ist  $R'$  ein Regularitätsgraph von  $G$  mit Parametern  $\epsilon, m$  und  $1/2$ . Und  $R''$  ist ein Regularitätsgraph von  $\overline{G}$ , mit den gleichen Parametern: wie man sofort nachrechnet, ist jedes in  $G$   $\epsilon$ -reguläre Paar  $(V_i, V_j)$  auch in  $\overline{G}$   $\epsilon$ -regulär.

$r$  Nach Definition von  $\ell$  enthält  $K$  einen grünen oder einen roten  $K^r$ , für  $r := \chi(H) \leq \Delta + 1$ . Entsprechend gilt  $H \subseteq R'_s$  oder  $H \subseteq R''_s$ . Da  $R'$  und  $R''$  wegen  $\epsilon \leq \epsilon_0$  und  $m \geq s/\epsilon_0$  die Voraussetzungen von Lemma 6.5.3 erfüllen, folgt wie gewünscht  $H \subseteq G$  oder  $H \subseteq \overline{G}$ .  $\square$

$\text{einfarbig}$  Wegen seines hübschen Beweises bringen wir noch einen Satz über die Anzahl von Graphen  $G$ , die minimal sind mit der Eigenschaft, daß  $G$  bei jeder 2-Kantenfärbung ein einfarbiges Exemplar eines vorgegebenen Graphen  $H$  enthält – einen zu  $H$  isomorphen Teilgraphen also, dessen Kanten alle die gleiche Farbe tragen. Solche Graphen  $G$  nennen wir *Ramsey-minimal* für  $H$ .

$\text{Ramsey-minimal}$

**Proposition 7.2.3.** *Ist  $T$  ein Baum aber kein Stern, so gibt es unendlich viele für  $T$  Ramsey-minimale Graphen.*

(0.5.4)

*Beweis.* Es sei  $|T| =: r$ . Wir zeigen, daß es zu jedem  $n \in \mathbb{N}$  einen für  $T$  Ramsey-minimalen Graphen mit mindestens  $n$  Ecken gibt.

(4.2.3)

(9.2.2)

Dazu borgen wir zunächst die Aussage von Satz 9.2.2 aus Kapitel 9, nach der es einen Graphen  $G$  mit chromatischer Zahl  $\chi(G) > r^2$  und Taillenweite  $g(G) > n$  gibt. Färben wir die Kanten von  $G$  mit grün und rot, so kann nicht sowohl der grüne als auch der rote Teilgraph eine Eckenfärbung mit höchstens  $r$  Farben haben (im Sinne von Kapitel 4): sonst färbten wir die Ecken von  $G$  mit dem kartesischen Produkt aus diesen Färbungen und hätten einen Widerspruch zu  $\chi(G) > r^2$ . Es sei also  $G' \subseteq G$  einfarbig mit  $\chi(G') > r$ . Nach Korollar 4.2.3 hat  $G'$  einen Teilgraphen vom Minimalgrad  $\geq r$ , und dieser enthält  $T$  nach Korollar 0.5.4.

Wir wählen nun einen für  $T$  Ramsey-minimalen Teilgraphen  $G^*$  von  $G$ . Offenbar ist  $G^*$  kein Wald: jeder Wald hat nämlich eine 2-Kantenfärbung, bezüglich derer er keinen einfarbigen Weg der Länge 3 enthält, und somit erst recht kein einfarbiges  $T$ . Unser Graph  $G^*$  enthält also einen Kreis, und wegen  $G^* \subseteq G$  beträgt dessen Länge mindestens  $g(G) > n$ . Insbesondere ist  $|G^*| > n$ , wie gewünscht.  $\square$

## 7.3 Ramsey induziert

Der Satz von Ramsey läßt sich auch wie folgt umformulieren. Zu jedem Graphen  $H = K^r$  existiert ein Graph  $G = K^n$  mit der folgenden Eigenschaft: wie immer wir die Kantenmenge von  $G$  mit zwei Farben färben, wir werden stets ein einfarbiges Exemplar von  $H$  in  $G$  finden (d.h. einen zu  $H$  isomorphen Teilgraphen, dessen Kanten alle die gleiche Farbe tragen). Wie bereits bemerkt, folgt dies wegen  $H \subseteq K^{|H|}$  auch für nicht notwendig vollständige Graphen  $H$  und  $G$  sofort aus dem Satz von Ramsey selbst.

einfarbiger  
Teilgraph

Verlangen wir jedoch, daß das einfarbige Exemplar von  $H$  in  $G$  induziert sein soll, also ein Untergraph von  $G$ , so wird das Problem plötzlich hochgradig nicht-trivial. Gefordert ist jetzt kein "Aussonderungsbeweis", sondern eine Konstruktion: die Konstruktion eines Graphen  $G$ , der für jede 2-Kantenfärbung ein einfarbiges Exemplar von  $H$  als Untergraphen enthält. Einen solchen Graphen  $G$  nennen wir einen *Ramseygraphen* für  $H$ .

Ramsey-  
graph

Daß solch ein Ramseygraph für jeden Graphen  $H$  existiert, ist eines der Hauptresultate der Ramseytheorie für Graphen; es wurde um 1973 unabhängig von Deuber, von Erdős, Hajnal & Pósa, und von Rödl bewiesen.

**Satz 7.3.1.** *Jeder Graph hat einen Ramseygraphen. Mit anderen Worten, zu jedem Graphen  $H$  gibt es einen Graphen  $G$  mit der Eigenschaft, daß  $G$  zu jeder Kantenpartition  $E(G) = E_1 \cup E_2$  einen zu  $H$  isomorphen Untergraphen enthält, dessen Kanten alle in  $E_1$  oder alle in  $E_2$  liegen.*

Wir geben zwei Beweise. Bei aller Verschiedenheit vermitteln beide eine Ahnung echter Ramseytheorie: Graphen tauchen eigentlich nur als Bausteine auf, aber das Gebäude hat es in sich.

**Erster Beweis.** Bei der Konstruktion des gesuchten Ramseygraphen werden wir iterativ Ecken eines bereits konstruierten Graphen  $G = (V, E)$  durch Kopien eines anderen Graphen  $H$  ersetzen. Für eine Eckenmenge  $U \subseteq V$  bezeichne  $G[U \rightarrow H]$  den Graphen, den wir aus  $G$  erhalten, indem wir die Ecken  $u \in U$  durch disjunkte Kopien  $H(u)$  von  $H$  ersetzen und jedes  $H(u)$  vollständig mit allen  $H(u')$  mit  $uu' \in E$  und allen Ecken  $v \in V \setminus U$  mit  $uv \in E$  verbinden (Abb. 7.3.1). Formal ist  $G[U \rightarrow H]$  der Graph auf der Eckenmenge

$$(U \times V(H)) \cup ((V \setminus U) \times \{\emptyset\}),$$

in dem zwei Ecken  $(v, w)$  und  $(v', w')$  genau dann benachbart sind, wenn entweder  $vv' \in E$  ist oder aber  $v = v' \in U$  und  $ww' \in E(H)$ .<sup>2</sup>

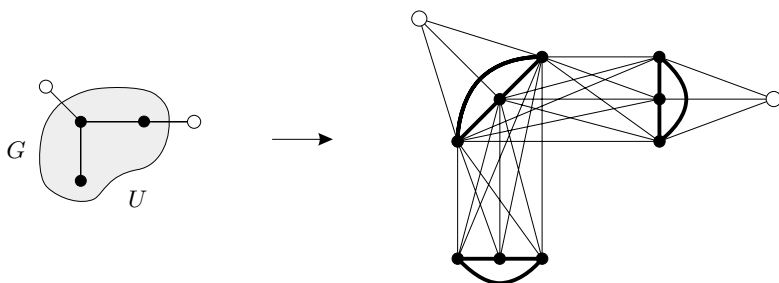


Abb. 7.3.1. Ein Graph  $G[U \rightarrow H]$  mit  $H = K^3$

Wir beweisen die folgende formale Verschärfung von Satz 7.3.1:

Zu je zwei Graphen  $H_1, H_2$  gibt es einen Graphen  $G = G(H_1, H_2)$  mit der Eigenschaft, daß  $G$  zu jeder Färbung seiner Kanten mit den Farben 1 und 2 entweder einen  $H_1$  der Farbe 1 oder einen  $H_2$  der Farbe 2 als Untergraphen enthält. (\*)

<sup>2</sup> Die Ersetzung von  $V \setminus U$  durch  $(V \setminus U) \times \{\emptyset\}$  hat lediglich den Zweck, daß dann alle Ecken von  $G[U \rightarrow H]$  einheitlich die Form  $(v, w)$  haben und  $G[U \rightarrow H]$  formal zu  $G$  disjunkt ist.

Diese formale Verschärfung des Satzes ermöglicht einen Induktionsbeweis über  $|H_1| + |H_2|$ , wie folgt.

Ist  $H_1$  oder  $H_2$  kantenlos, so gilt (\*) mit jedem hinreichend großen kantenlosen  $G$ . Sowohl  $H_1$  also auch  $H_2$  habe daher eine Kante (und insbesondere  $\geq 2$  Ecken), und (\*) gelte für alle Paare  $(H'_1, H'_2)$  mit kleinerer Eckensumme  $|H'_1| + |H'_2|$ .

Für jedes der beiden  $i = 1, 2$  wählen wir beliebig eine nicht isolierte Ecke  $x_i \in H_i$  und setzen  $H'_i := H_i - x_i$ . Weiter sei  $H''_i \subseteq H'_i$  der von den Nachbarn von  $x_i$  in  $H_i$  induzierte Untergraph.

Zum Induktionsschritt werden wir eine Folge  $G^0, \dots, G^n$  disjunkter Graphen konstruieren; der Graph  $G^n$  wird unser gesuchter Ramseygraph  $G(H_1, H_2)$  sein. Zusammen mit den Graphen  $G^i$  werden wir Eckenmengen  $V^i \subseteq V(G^i)$  und eine Abbildung

$$f: V^1 \cup \dots \cup V^n \rightarrow V^0 \cup \dots \cup V^{n-1}$$

definieren, mit

$$f(V^i) = V^{i-1} \tag{1}$$

für alle  $i \geq 1$ . Schreiben wir  $f^i := f \circ \dots \circ f$  für die  $i$ -fache Hintereinanderausführung von  $f$  (wo immer diese definiert ist) und  $f^0$  für die Identitätsabbildung auf  $V^0 = V(G^0)$ , so gilt dann  $f^i(v) \in V^0$  für alle  $v \in V^i$  und alle  $i \geq 0$ . Wir nennen  $f^i(v)$  den *Ursprung* von  $v$ .

Die Untergraphen  $G^i[V^i]$  werden die Struktur von  $G^0$  im folgenden Sinne widerspiegeln:

$$\text{Ecken in } V^i \text{ verschiedenen Ursprungs sind genau dann benachbart, wenn ihre Ursprünge in } G^0 \text{ benachbart sind.} \tag{2}$$

Technisch gesehen werden wir die Aussagen (1) und (2) für unseren Beweis nicht weiter verwenden. Sie sollen jedoch helfen, sich die Graphen  $G^i$  vorzustellen: jedes  $G^i$  (genauer: jedes  $G^i[V^i]$ ; es wird noch einige Ecken  $x \in G^i - V^i$  geben) ist im wesentlichen eine aufgeblähte Kopie von  $G^0$  – in der jede Ecke  $w \in G^0$  ersetzt ist durch die Menge aller Ecken aus  $V^i$  mit Ursprung  $w$  – und die Abbildung  $f$  verbindet zwischen den verschiedenen  $G^i$  die Ecken gleichen Ursprungs.

Nach Induktionsannahme gibt es Ramseygraphen

$$G_1 := G(H_1, H'_2) \quad \text{und} \quad G_2 := G(H'_1, H_2).$$

Als  $G^0$  wählen wir eine Kopie von  $G_1$  und setzen  $V^0 := V(G^0)$ . Es sei  $W'_0, \dots, W'_{n-1}$  eine Aufzählung der Teilmengen von  $V^0$ , die in  $G^0$  einen  $H'_2$  aufspannen. Damit ist  $n$  definiert, als die Anzahl der zu  $H'_2$  isomorphen Untergraphen von  $G^0$ . (Wir werden also noch zu jedem  $W'_{i-1}$  einen Graphen  $G^i$  konstruieren,  $i = 1, \dots, n$ .) Da  $H_1$  eine Kante

$x_i$   
 $H'_i, H''_i$

$f^i$

Ursprung

$G_1, G_2$

$W'_i$   
 $n$

enthält, gilt  $n \geq 1$ : sonst könnte  $G^0$  kein Ramseygraph  $G(H_1, H'_2)$  sein. Für jedes  $i = 0, \dots, n-1$  sei  $W''_i$  das Bild von  $V(H'_2)$  unter irgendeinem Isomorphismus  $H'_2 \rightarrow G^0 [W'_i]$ .

Nehmen wir nun an,  $G^0, \dots, G^{i-1}$  und  $V^0, \dots, V^{i-1}$  seien bereits definiert für ein  $i \geq 1$ , und es sei  $f$  definiert auf  $V^1 \cup \dots \cup V^{i-1}$ . Wir konstruieren  $G^i$  aus  $G^{i-1}$  in zwei Schritten. Für den ersten Schritt betrachten wir die Menge  $U^{i-1}$  aller Ecken  $v \in V^{i-1}$ , deren Ursprung  $f^{i-1}(v)$  in  $W''_{i-1}$  liegt. (Für  $i = 1$  ergibt dies  $U^0 = W''_0$ .) Wir erweitern  $G^{i-1}$  zu einem neuen Graphen  $\tilde{G}^{i-1}$  (disjunkt von  $G^{i-1}$ ), indem wir jede Ecke  $u \in U^{i-1}$  durch eine Kopie  $G_2(u)$  des Graphen  $G_2$  ersetzen:

$$\tilde{G}^{i-1} := G^{i-1} [U^{i-1} \rightarrow G_2]$$

(siehe Abbildungen). Wir setzen  $f(u') := u$  für alle  $u \in U^{i-1}$  und  $u' \in G_2(u)$ , sowie  $f(v') := v$  für alle  $v' = (v, \emptyset)$  mit  $v \in V^{i-1} \setminus U^{i-1}$ . (Zur Erinnerung:  $(v, \emptyset)$  war einfach eine Kopie der Ecke  $v \in G^{i-1}$  in  $\tilde{G}^{i-1}$ .) Als  $V^i$  wählen wir die Menge all der Ecken  $v'$  oder  $u'$  von  $\tilde{G}^{i-1}$ , für die wir  $f$  gerade definiert haben, die also entweder direkt einer Ecke  $v$  aus  $V^{i-1}$  entsprechen oder aber zur Erweiterung  $G_2(u)$  einer solchen Ecke  $u$  gehören. Dieser Graph  $\tilde{G}^{i-1}$  ist bereits der "wesentliche Teil" von  $G^i$ : der Teil, der wie eine aufgeblähte Kopie von  $G^0$  aussieht.

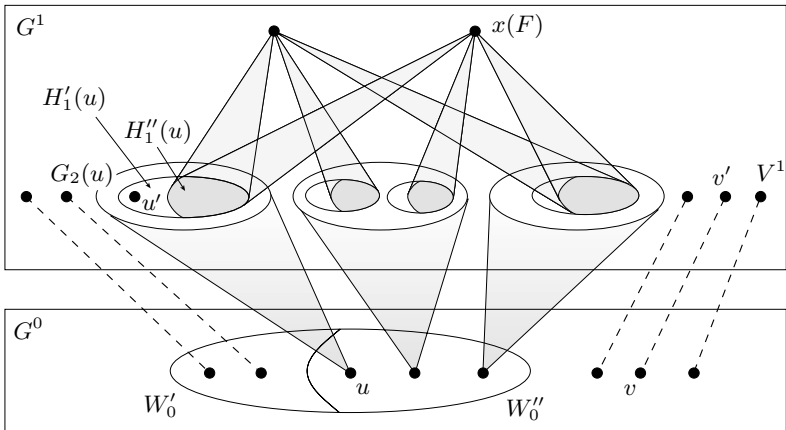


Abb. 7.3.2. Die Konstruktion von  $G^1$

Im zweiten Schritt erweitern wir jetzt  $\tilde{G}^{i-1}$  durch Hinzufügung einiger weiterer Ecken  $x \notin V^i$  zu dem gesuchten Graphen  $G^i$ . Es bezeichne  $\mathcal{F}$  die Menge aller Familien  $F$  der Form

$$F = (H'_1(u) \mid u \in U^{i-1}),$$

wobei  $H'_1(u)$  jeweils ein zu  $H'_1$  isomorpher Untergraph von  $G_2(u)$  sei. (Salopp formuliert:  $\mathcal{F}$  ist die Gesamtheit aller Möglichkeiten, gleichzeitig

aus jedem  $G_2(u)$  genau eine induzierte Kopie von  $H'_1$  auszuwählen.) Für jedes  $F \in \mathcal{F}$  fügen wir zu  $\tilde{G}^{i-1}$  eine neue Ecke  $x(F)$  hinzu und verbinden sie für jedes  $u \in U^{i-1}$  mit allen Ecken von  $H''_1(u)$  (Abb. 7.3.2); dabei bezeichne  $H'_1(u)$  das Bild von  $H''_1$  unter irgend einem Isomorphismus von  $H'_1$  auf das durch  $F$  zu  $u$  gewählte  $H''_1(u) \subseteq G_2(u)$ . Den entstehenden Graphen bezeichnen wir mit  $G^i$ . Damit ist der Induktionsschritt in der Konstruktion der Graphen  $G^0, \dots, G^n$  vollzogen.  $x(F)$   
 $H''_1(u)$   
 $G^i$

Wir zeigen nun, daß  $G := G^n$  die Behauptung aus (\*) erfüllt. Dazu beweisen wir die folgende Aussage (\*\*) über  $G^i$  für  $i = 0, \dots, n$ :

*$G^i$  enthält bei jeder Kantenfärbung mit den Farben 1 und 2 entweder einen Untergraphen  $H_1$  der Farbe 1, oder einen Untergraphen  $H_2$  der Farbe 2, oder einen Untergraphen  $H$  der Farbe 2, so daß  $V(H) \subseteq V^i$  gilt und die Einschränkung von  $f^i$  auf  $V(H)$  ein Isomorphismus ist zwischen  $H$  und  $G^0[W'_k]$  für ein  $k \in \{i, \dots, n-1\}$ .* (\*\*)

Da für  $i = n$  der dritte der genannten Fälle nicht eintreten kann, ist (\*\*) für  $n$  äquivalent zu (\*) mit  $G := G^n$ .

Für  $i = 0$  folgt (\*\*) aus der Wahl von  $G^0$  als einer Kopie von  $G_1 = G(H_1, H'_2)$  und der Definition der Mengen  $W'_k$ . Wir nehmen daher  $1 \leq i \leq n$  an, und setzen (\*\*) für kleinere Werte von  $i$  als gültig voraus.

Sei also eine Kantenfärbung von  $G^i$  gegeben. Für jedes  $u \in U^{i-1}$  enthält  $G^i$  eine Kopie von  $G_2$ :

$$G^i \supseteq G_2(u) \simeq G(H'_1, H_2).$$

Hat  $G_2(u)$  für irgendein  $u \in U^{i-1}$  einen zu  $H_2$  isomorphen Untergraphen der Farbe 2, so sind wir fertig. Wenn nicht, so hat jedes  $G_2(u)$  einen zu  $H'_1$  isomorphen Untergraphen  $H'_1(u)$  der Farbe 1. Es sei  $F$  die Familie dieser Graphen  $H'_1(u)$ , einem für jedes  $u \in U^{i-1}$ , und es sei  $x := x(F)$ . Existiert ein  $u \in U^{i-1}$ , für das alle  $x$ - $H''_1(u)$ -Kanten in  $G^i$  die Farbe 1 tragen, so haben wir einen  $H_1$  der Farbe 1 in  $G^i$  und sind wiederum fertig. Wir nehmen daher an, daß jedes  $H''_1(u)$  eine Ecke  $y_u$  enthält, für die die Kante  $xy_u$  die Farbe 2 trägt. Es sei  $x$   
 $y_u$

$$\hat{U}^{i-1} := \{y_u \mid u \in U^{i-1}\} \subseteq V^i. \quad \hat{U}^{i-1}$$

Unsere Abbildung  $f$  definiert damit einen Isomorphismus von

$$\hat{G}^{i-1} := G^i \left[ \hat{U}^{i-1} \cup \{(v, \emptyset) \mid v \in V(G^{i-1}) \setminus U^{i-1}\} \right] \quad \hat{G}^{i-1}$$

nach  $G^{i-1}$ , der jeweils  $y_u$  auf  $u$  abbildet und  $(v, \emptyset)$  auf  $v$ . Unsere Kantenfärbung von  $G^i$  induziert dadurch eine Kantenfärbung von  $G^{i-1}$ . Enthält  $G^{i-1}$  darin einen zu  $H_1$  isomorphen Untergraphen der Farbe 1



oder einen zu  $H_2$  isomorphen Untergraphen der Farbe 2, so haben wir entsprechende Untergraphen in  $\hat{G}^{i-1} \subseteq G^i$  und sind wieder fertig.

Nach (\*\*) für  $i - 1$  dürfen wir daher annehmen, daß  $G^{i-1}$  einen Untergraphen  $H'$  der Farbe 2 hat, mit  $V(H') \subseteq V^{i-1}$  und so, daß die Einschränkung von  $f^{i-1}$  auf  $V(H')$  ein Isomorphismus von  $H'$  nach  $G^0 [W'_k] \simeq H'_2$  ist für ein  $k \in \{i - 1, \dots, n - 1\}$ . Es sei  $\hat{H}'$  der  $H'$  entsprechende – und daher ebenfalls mit der Farbe 2 gefärbte – Untergraph von  $\hat{G}^{i-1} \subseteq G^i$ . Dann ist  $V(\hat{H}') \subseteq V^i$ , es gilt

$$f^i(V(\hat{H}')) = f^{i-1}(V(H')) = W'_k,$$

und  $f^i: \hat{H}' \rightarrow G^0 [W'_k]$  ist ein Isomorphismus.

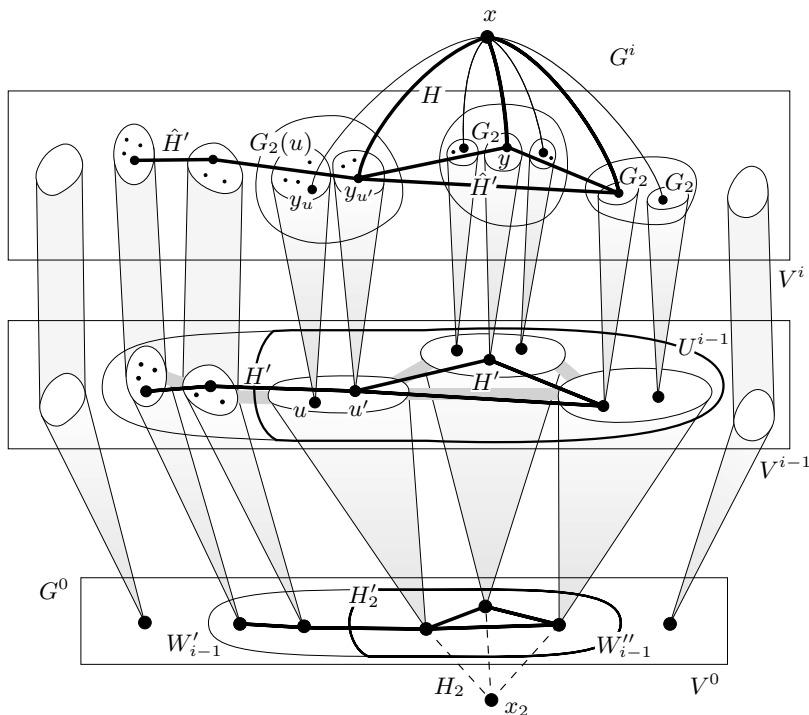


Abb. 7.3.3. Ein einfarbiges  $H_2$  in  $G^i$

Ist  $k \geq i$ , so setzen wir  $H := \hat{H}'$  in (\*\*) und sind fertig. Betrachten wir somit den Fall  $k < i$ , also  $k = i - 1$  (Abb. 7.3.3). Nach Definition von  $U^{i-1}$  und  $\hat{G}^{i-1}$  ist das Urbild von  $W''_{i-1}$  unter dem Isomorphismus  $f^i: \hat{H}' \rightarrow G^0 [W'_{i-1}]$  eine Teilmenge von  $\hat{U}^{i-1}$ . Da  $x$  zu allen Ecken von  $\hat{U}^{i-1}$  durch eine Kante der Farbe 2 verbunden ist, spannen  $\hat{H}'$  und  $x$  in  $G^i$  zusammen eine Kopie von  $H_2$  der Farbe 2 auf, und der Beweis von (\*\*\*) ist vollendet.

Damit ist unser erster Beweis von Satz 7.3.1 vollständig. □

Kehren wir noch einmal zurück zu der am Anfang dieses Abschnitts betrachteten Umformulierung des Satzes von Ramsey: zu jedem Graphen  $H$  gibt es einen Graphen  $G$ , so daß  $G$  bei jeder Kantenfärbung mit zwei Farben eine einfarbiges Exemplar von  $H$  als Teilgraphen enthält. Der Graph  $G$ , für den diese Aussage sofort aus dem Satz von Ramsey folgt, ist ein vollständiger Graph hinreichend großer Ordnung. Verlangen wir jedoch, daß  $G$  keine größeren vollständigen Teilgraphen enthalten soll als  $H$ , so erhalten wir wiederum ein nicht triviales Problem – selbst wenn wir nicht fordern, daß  $H$  in  $G$  induziert sei.

Unser zweiter Beweis von Satz 7.3.1 löst dieses Problem nebenbei mit: der Graph  $G$ , den wir konstruieren, wird die gleiche Cliquenzahl haben wie der vorgegebene Graph  $H$ .

Für diesen Beweis, also den Rest dieses Abschnitts, fassen wir einen bipartiten Graphen  $P$  stets als Tripel  $(V_1, V_2, E)$  auf, wobei  $V_1$  und  $V_2$  seine beiden Eckenmengen sind und  $E \subseteq V_1 \times V_2$  seine Kantenmenge. Der Grund hierfür ist, daß Einbettungen bipartiter Graphen ineinander stets mit ihren Eckenpartitionen verträglich sein sollen. Genauer: ist  $P' = (V'_1, V'_2, E')$  ein weiterer bipartiter Graph, so heißt eine injektive Abbildung  $\varphi: V_1 \cup V_2 \rightarrow V'_1 \cup V'_2$  eine *Einbettung* von  $P$  in  $P'$ , wenn  $\varphi(V_i) \subseteq V'_i$  ist für  $i = 1, 2$  und  $\varphi(v_1)\varphi(v_2)$  genau dann eine Kante von  $P'$  ist, wenn  $v_1v_2$  eine Kante von  $P$  ist. (Einbettungen seien also stets “induziert”.) Statt  $\varphi: V_1 \cup V_2 \rightarrow V'_1 \cup V'_2$  schreiben wir informell dann auch  $\varphi: P \rightarrow P'$ .

bipartit

Einbettung  
 $P \rightarrow P'$ 

Wir brauchen zwei Lemmas.

**Lemma 7.3.2.** *Jeder bipartite Graph ist in einen bipartiten Graphen der Form  $(X, [X]^k, F)$  mit  $F = \{xY \mid x \in Y\}$  einbettbar.*

*Beweis.* Es sei  $P = (\{a_1, \dots, a_n\}, \{b_1, \dots, b_m\}, E)$  ein beliebiger bipartiter Graph. Wir wählen eine Menge  $X$  mit  $2n + m$  Elementen, etwa

$$X = \{x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n, z_1, \dots, z_m\},$$

und definieren eine Einbettung  $\varphi: P \rightarrow (X, [X]^{n+1}, F)$  wie folgt. Zunächst setzen wir  $\varphi(a_i) := x_i$  für alle  $i = 1, \dots, n$ . Als Bild für eine Ecke  $b_i$  eignen sich nun all die Ecken  $Y \in [X]^{n+1}$ , die zu den Bildern genau der Nachbarn von  $b_i$  benachbart sind, die also

$$Y \cap \{x_1, \dots, x_n\} = \varphi(N_P(b_i)) \quad (1)$$

erfüllen. Wegen  $|Y| = n + 1$  gibt es verschiedene solche  $Y$ . Da verschiedene Ecken  $b_i, b_j$  in  $P$  die gleiche Nachbarschaft haben können aber auf verschiedene Ecken  $Y$  abgebildet werden sollen, geben wir dem Bild  $Y$  von  $b_i$  außer den Ecken gemäß (1) noch die Ecke  $z_i$  als Element, sozusagen als Index. Damit gilt dann  $\varphi(b_i) \neq \varphi(b_j)$  für  $i \neq j$ . Als letztes füllen wir jedes  $Y = \varphi(b_i)$  noch mit beliebigen Elementen  $y_j$  auf, bis  $|Y| = n + 1$  gilt.  $\square$

Unser zweites Lemma hat bereits den bipartiten Fall von Satz 7.3.1 zum Inhalt: jeder bipartite Graph hat einen Ramseygraphen.

**Lemma 7.3.3.** *Zu jedem bipartiten Graphen  $P$  existiert ein bipartiter Graph  $P'$  mit der Eigenschaft, daß zu jeder 2-Färbung der Kanten von  $P'$  eine Einbettung  $\varphi: P \rightarrow P'$  existiert, für die alle Kanten von  $\varphi(P)$  gleich gefärbt sind.*

(7.1.4) *Beweis.* Mit Lemma 7.3.2 dürfen wir annehmen, daß  $P$  die Form  $P, X, k, F$   $(X, [X]^k, F)$  hat mit  $F = \{xY \mid x \in Y\}$ . Wir zeigen die Behauptung für den Graphen  $P' := (X', [X']^{k'}, F')$ , wobei  $k' := 2k - 1$  ist,  $X'$  beliebig mit

$$|X'| = R\left(k', 2\binom{k'}{k}, k|X| + k - 1\right),$$

(dies ist die nach Satz 7.1.4 definierte Ramseyzahl) und

$$F' := \{x'Y' \mid x' \in Y'\}.$$

$\alpha, \beta$  Färben wir also die Kanten von  $P'$  beliebig mit zwei Farben  $\alpha$  und  $\beta$ . Von den  $|Y'| = 2k - 1$  mit einer Ecke  $Y' \in [X']^{k'}$  inzidenten Kanten haben stets mindestens  $k$  die gleiche Farbe. Für jedes  $Y'$  können wir daher fest ein  $Z' \subseteq Y'$  mit  $|Z'| = k$  so wählen, daß alle Kanten  $x'Y'$  mit  $x' \in Z'$  gleichfarbig sind; diese Farbe nennen wir mit  $Y'$  *assoziiert*.

$Z'$  Die Mengen  $Z'$  können “auf  $\binom{k'}{k}$  Weisen” in ihren Obermengen  $Y'$  liegen. Um dies zu präzisieren, denken wir uns  $X'$  linear geordnet. Zu jedem  $Y' \in [X']^{k'}$  gibt es dann eine eindeutig bestimmte ordnungserhaltende Bijektion  $\sigma_{Y'}: Y' \rightarrow \{1, \dots, k'\}$ , und unter  $\sigma_{Y'}$  kann  $Z'$  genau  $\binom{k'}{k}$  mögliche Bilder haben.

$\sigma_{Y'}$  Wir färben nun  $[X']^{k'}$  mit den  $2\binom{k'}{k}$  Elementen der Menge

$$\{\{1, \dots, k'\}\}^k \times \{\alpha, \beta\}$$

als Farben, wie folgt: jedes  $Y' \in [X']^{k'}$  erhält als Farbe das Paar  $(\sigma_{Y'}(Z'), \gamma)$ , wobei  $\gamma$  die mit  $Y'$  assoziierte Farbe  $\alpha$  oder  $\beta$  ist. Nach unserer Wahl von  $|X'|$  als die Ramseyzahl mit Parametern  $k', 2\binom{k'}{k}$  und  $k|X| + k - 1$  hat  $X'$  eine einfarbige Teilmenge  $W$  der Mächtigkeit  $k|X| + k - 1$ . Alle  $Z'$  mit  $Y' \subseteq W$  liegen somit “gleich” in ihrem  $Y'$ , d.h. es gibt ein  $S \in \{\{1, \dots, k'\}\}^k$  mit  $\sigma_{Y'}(Z') = S$  für alle  $Y' \in [W]^{k'}$ , und alle  $Y' \in [W]^{k'}$  sind mit der gleichen Farbe assoziiert, sagen wir mit  $\alpha$ .

Wir konstruieren jetzt die gesuchte Einbettung  $\varphi$  von  $P$  in  $P'$ . Zunächst definieren wir  $\varphi$  auf  $X = \{x_1, \dots, x_n\}$ . Wir wählen  $\varphi(x_i) =: w_i \in W$  so, daß für  $i < j$  stets  $w_i < w_j$  gilt, in unserer Ordnung auf  $X'$ . Weiter gebe es in  $W$  jeweils genau  $k - 1$  Elemente  $u$  mit  $u < w_1$ , mit

$$\varphi|_X \\ x_1, \dots, x_n \\ w_1, \dots, w_n$$

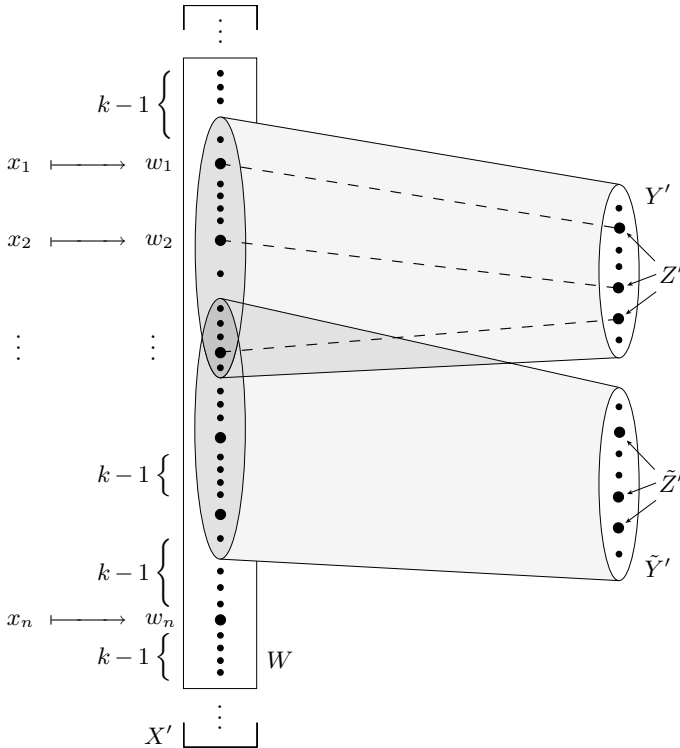


Abb. 7.3.4. Der Graph aus Lemma 7.3.3

$w_i < u < w_{i+1}$  für  $i = 1, \dots, n - 1$ , und mit  $w_n < u$ . Daß wir  $\varphi$  so wählen können, folgt aus  $|W| = kn + k - 1$  (Abb. 7.3.4).

Nun definieren wir  $\varphi$  auf  $[X]^k$ . Ist  $Y \in [X]^k$  gegeben, so möchten wir  $\varphi(Y) =: Y' \in [X']^{k'}$  so wählen, daß  $Y'$  unter den Ecken aus  $\varphi(X)$  genau zu den Bildern der Nachbarn von  $Y$  benachbart ist, also zu den Ecken  $\varphi(x)$  mit  $x \in Y$ , und daß alle diese mit  $Y'$  inzidenten Kanten die Farbe  $\alpha$  tragen. Dies ist jedoch nicht schwer: wir wählen zunächst  $Z'$  als  $\{\varphi(x) \mid x \in Y\}$  (dies sind  $k$  Ecken des Typs  $w_i$ ) und füllen dann  $Z'$  so durch  $k' - k$  Ecken  $u \in W \setminus \varphi(X)$  zu einer Menge  $Y' \in [W]^{k'}$  auf, daß  $Z'$  richtig in  $Y'$  liegt, daß also  $\sigma_{Y'}(Z') = S$  gilt. Dies ist deshalb möglich, weil zwischen je zwei Ecken  $w_i$  genügend viele Ecken  $u$  liegen, nämlich  $k - 1 = k' - k$  viele. Damit ist

$$Y' \cap \varphi(X) = Z' = \{\varphi(x) \mid x \in Y\},$$

d.h.  $Y'$  hat unter den Ecken in  $\varphi(X)$  genau die richtigen Nachbarn, und alle Kanten von  $Y'$  zu diesen Nachbarn sind mit  $\alpha$  gefärbt (da die Nachbarn in  $Z'$  liegen und  $Y'$  mit  $\alpha$  assoziiert ist). Schließlich ist  $\varphi$  injektiv auf  $[X]^k$ : für verschiedene Ecken  $Y$  sind ihre Bilder, die Mengen  $Y'$ ,

$\varphi|_{[X]^k}$

$Z'$

verschieden, da ihre Schnitte mit  $\varphi(X)$  verschieden sind. Die Abbildung  $\varphi$  ist also in der Tat eine Einbettung von  $P$  in  $P'$ .  $\square$

**Zweiter Beweis von Satz 7.3.1.** Es sei  $H$  wie im Satz gegeben und  $n := R(2, 2, r)$  die Ramseyzahl von  $r := |H|$ . Für jede 2-Kantenfärbung eines Graphen  $K = K^n$  finden wir in  $K$  also ein einfarbiges  $H$ , wenn auch nicht notwendig induziert.

Wir beginnen mit der Konstruktion eines Graphen  $G^0$ , die wir zunächst informell beschreiben. Wir denken uns die Ecken von  $K$  senkrecht untereinander gezeichnet und ersetzen jede Ecke durch eine Zeile von  $\binom{n}{r}$  Ecken. Jede Spalte von Ecken assoziieren wir mit einer der  $\binom{n}{r}$  möglichen Eckenmengen eines  $H \subseteq K$ . In dieser Spalte fügen wir statt der ursprünglichen Kanten von  $K$  genau die Kanten dieser Kopie von  $H$  ein. Der entstandene Graph  $G^0$  besteht dann aus  $\binom{n}{r}$  disjunkten Kopien von  $H$  und  $(n-r)\binom{n}{r}$  isolierten Ecken (Abb. 7.3.5).

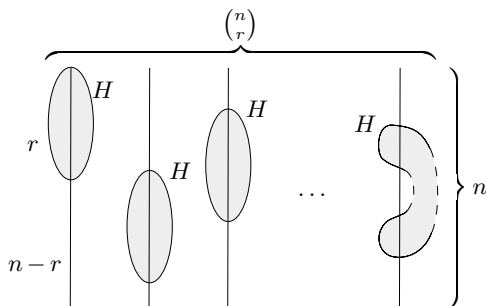


Abb. 7.3.5. Der Graph  $G^0$

Um  $G^0$  formal zu definieren, nehmen wir  $V(K) = \{1, \dots, n\}$  an und wählen in  $K$  Kopien  $H_1, \dots, H_{\binom{n}{r}}$  von  $H$  mit paarweise verschiedenen Eckenmengen. (Auf jeder Menge von  $r$  Ecken aus  $K$  haben wir damit genau ein  $H_j$  fest gewählt.) Wir setzen dann

$$V(G^0) := \{(i, j) \mid i = 1, \dots, n; j = 1, \dots, \binom{n}{r}\}$$

$$E(G^0) := \bigcup_{j=1}^{\binom{n}{r}} \{(i, j)(i', j) \mid ii' \in E(H_j)\}.$$

Die Idee des Beweises ist nun die folgende. Wir betten  $G^0$  auf so viele Weisen induziert in einen großen Graphen  $G$  ein, daß bei jeder 2-Kantenfärbung von  $G$  für mindestens eines dieser  $G^0 \subseteq G$  die Farben seiner Kanten nur davon abhängen, in welchen beiden Zeilen ihre Enden liegen. Die Projektion dieses  $G^0$  auf  $\{1, \dots, n\}$  (durch Kontraktion seiner Zeilen) definiert dann eine 2-Kantenfärbung von  $K$

(ergibt die Kontraktion nicht alle Kanten von  $K$ , so färbe die fehlenden Kanten beliebig), zu der es nach Wahl von  $n = |K|$  einen einfarbigen  $K^r \subseteq K$  gibt. Das in diesem  $K^r$  liegende  $H_j$  liegt dann auch einfarbig in der  $j$ -ten Spalte unseres  $G^0$ , ist also auch Untergraph von  $G$ .

Wie finden wir einen solchen Graphen  $G$ ? Durch iterierte Anwendung von Lemma 7.3.3, einmal für jeden der  $m := \binom{n}{2}$  bipartiten Graphen  $G^0 [V_i^0 \cup V_{i'}^0]$ , wobei

$$V_i^0 := \{ (i, j) \mid j = 1, \dots, \binom{n}{r} \}$$

die  $i$ -te Zeile von  $G^0$  ist ( $i = 1, \dots, n$ ). Formal definieren wir induktiv eine Folge  $G^0, \dots, G^m$  von  $n$ -partiten Graphen  $G^k$  und setzen am Ende  $G := G^m$ .

Dazu sei  $e_1, \dots, e_m$  eine Aufzählung der Kanten von  $K$ . Angenommen,  $G^k$  sei für ein  $k < m$  bereits definiert als ein  $n$ -partiter Graph mit Eckenmengen  $V_1^k, \dots, V_n^k$ . Es sei  $e_{k+1} =: i_1 i_2$ , und  $P$  sei der in  $G^k$  durch die Eckenmengen  $V_{i_1}^k$  und  $V_{i_2}^k$  induzierte bipartite Graph. Nach Lemma 7.3.3 hat  $P$  einen bipartiten Ramseygraphen  $P' = (W_1, W_2, F)$ . Wir möchten  $G^{k+1} \supseteq P'$  so definieren, daß wir jede (einfarbige) Einbettung  $P \rightarrow P'$  zu einer Einbettung  $G^k \rightarrow G^{k+1}$  fortsetzen können, die jeweils die  $i$ -te Partitionsklasse von  $G^k$  in die  $i$ -te Partitionsklasse von  $G^{k+1}$  abbildet ( $i = 1, \dots, n$ ). Dazu sei  $\{\varphi_1, \dots, \varphi_q\}$  die Menge aller Einbettungen von  $P$  in  $P'$ . Wir setzen

$$V(G^{k+1}) := V_1^{k+1} \cup \dots \cup V_n^{k+1},$$

wobei

$$V_i^{k+1} := \begin{cases} W_1 & \text{für } i = i_1; \\ W_2 & \text{für } i = i_2; \\ \bigcup_{p=1}^q (V_i^k \times \{p\}) & \text{für } i \notin \{i_1, i_2\}. \end{cases}$$

(Für  $i \neq i_1, i_2$  besteht  $V_i^{k+1}$  also aus  $q$  disjunkten Kopien von  $V_i^k$ .) Die Kantenmenge von  $G^{k+1}$  definieren wir nun so, daß die natürlichen Fortsetzungen der  $\varphi_p$  auf ganz  $V(G^k)$  zu Einbettungen von  $G^k$  in  $G^{k+1}$  werden: für jedes  $p = 1, \dots, q$  sei  $\psi_p: V(G^k) \rightarrow V(G^{k+1})$  definiert vermöge

$$\psi_p(v) := \begin{cases} \varphi_p(v) & \text{für } v \in P \\ (v, p) & \text{für } v \notin P, \end{cases}$$

und

$$E(G^{k+1}) := \bigcup_{p=1}^q \{ \psi_p(v) \psi_p(v') \mid vv' \in E(G^k) \}.$$

Nach Konstruktion und Lemma 7.3.3 enthält  $G^{k+1}$  damit für jede 2-Kantenfärbung eine induzierte Kopie  $\psi_p(G^k)$  von  $G^k$ , bei der alle Kanten

aus  $P$ , d.h. alle Kanten zwischen der  $i_1$ -ten Zeile  $V_{i_1}^k$  und der  $i_2$ -ten Zeile  $V_{i_2}^k$ , die gleiche Farbe haben: wir brauchen nur  $p$  so zu wählen, daß  $\varphi_p(P)$  gerade die nach dem Lemma existierende einfarbige Kopie von  $P$  in  $P'$  ist.

Wir behaupten, daß  $G := G^m$  dem Satz genügt. Färben wir also die Kanten von  $G^m$  mit zwei Farben. Nach der Konstruktion von  $G^m$  aus  $G^{m-1}$  finden wir in  $G^m$  eine induzierte Kopie von  $G^{m-1}$ , in der für  $e_m = ii'$  alle Kanten zwischen der  $i$ -ten und der  $i'$ -ten Zeile gleichfarbig sind. In diesem  $G^{m-1}$  finden wir analog eine induzierte Kopie von  $G^{m-2}$ , in der auch für  $ii' = e_{m-1}$  alle Kanten zwischen der  $i$ -ten und der  $i'$ -ten Zeile gleichfarbig sind. So fortfahrend gelangen wir schließlich zu einer Kopie von  $G^0$ , in der für jedes Paar  $(i, i')$  alle Kanten zwischen  $V_i^0$  und  $V_{i'}^0$  gleichfarbig sind. Wie eingangs gezeigt, enthält  $G^0$ , und damit auch  $G$ , dann eine einfarbige Kopie  $H_j$  von  $H$ .  $\square$

## 7.4 Ramseysätze und Zusammenhang

Nach dem Satz von Ramsey enthält jeder hinreichend große Graph  $G$  einen ganz dichten oder einen ganz mageren Untergraphen vorgegebener Ordnung, einen  $K^r$  oder einen  $\overline{K}^r$ . Setzen wir  $G$  als zusammenhängend voraus, so können wir etwas mehr sagen:

**Proposition 7.4.1.** *Zu jedem  $r \in \mathbb{N}$  gibt es ein  $n \in \mathbb{N}$  mit der Eigenschaft, daß jeder zusammenhängende Graph  $G$  mit mindestens  $n$  Ecken einen  $K^r$ ,  $K_{1,r}$  oder  $P^r$  als Untergraphen enthält.*

(0.3.3) *Beweis.* Es sei  $d+1$  die Ramseyzahl von  $r$  und  $n := \frac{d}{d-2}(d-1)^r$ . Hat  $G$  eine Ecke  $v$  vom Grad  $\geq d+1$ , so induziert nach Satz 7.1.1 entweder  $N(v)$  einen  $K^r$  oder  $\{v\} \cup N(v)$  einen  $K_{1,r}$ . Ist hingegen  $\Delta(G) \leq d$ , so hat  $G$  nach Proposition 0.3.3 einen Radius  $> r$ , enthält also sicher zwei Ecken vom Abstand  $\geq r$ . Da  $G$  zusammenhängend ist, sind diese Ecken durch einen induzierten Weg der Länge  $\geq r$  verbunden.  $\square$

Proposition 7.4.1 ist im folgenden Sinne bestmöglich. Ist  $\mathcal{G}$  eine beliebige Menge zusammenhängender Graphen mit der Eigenschaft, daß zu jedem  $r \in \mathbb{N}$  jeder hinreichend große zusammenhängende Graph  $G$  einen Untergraphen der Ordnung  $\geq r$  aus  $\mathcal{G}$  enthält, so enthält  $\mathcal{G}$  beliebig große vollständige Graphen, Sterne und Wege. (Dies wird klar, wenn wir  $G$  selbst vollständig oder als Stern oder Weg wählen, da dann auch jeder Untergraph von  $G$  von der entsprechenden Art ist.) Nach Proposition 7.4.1 braucht  $\mathcal{G}$  dann aber keine anderen Graphen mehr zu enthalten, d.h. die Menge aller vollständigen Graphen, Sterne und Wege ist "minimal" als  $\mathcal{G}$  mit der obigen Eigenschaft.

Im Prinzip könnte man nun für jedes  $k \in \mathbb{N}$  nach einer entsprechenden Menge  $\mathcal{G}$  der “typischen”  $k$ -zusammenhängenden Graphen fragen. Bereits für  $k = 2$  wird  $\mathcal{G}$  jedoch so groß, daß die folgende (formal schwächere) Version für topologische Minoren prägnanter ist.

**Proposition 7.4.2.** *Zu jedem  $r \in \mathbb{N}$  gibt es ein  $n \in \mathbb{N}$  mit der Eigenschaft, daß jeder 2-zusammenhängende Graph mit mindestens  $n$  Ecken einen  $C^r$  oder  $K_{2,r}$  als topologischen Minor enthält.*

*Beweis.* Es sei  $d$  das nach Proposition 7.4.1 zu  $r$  existierende  $n$ , und  $G$  ein 2-zusammenhängender Graph mit mindestens  $\frac{d}{d-2}(d-1)^r$  Ecken. Nach Proposition 0.3.3 ist entweder  $\text{diam } G \geq \text{rad } G > r$ , oder  $G$  hat eine Ecke vom Grad  $> d$ .

(0.3.3)  
(2.3.5)

Im ersten Fall seien  $a, b \in G$  zwei Ecken vom Abstand  $> r$ . Nach dem Satz von Menger (2.3.5) enthält  $G$  zwei kreuzungsfreie  $a$ - $b$ -Wege. Diese bilden einen Kreis der Länge  $> r$ .

Im zweiten Fall sei  $v$  eine Ecke vom Grad  $> d$ . Da  $G$  2-zusammenhängend ist, ist  $G - v$  zusammenhängend und enthält somit einen Spannbaum; es sei  $T \subseteq G - v$  ein minimaler Baum, der alle Nachbarn von  $v$  enthält. Jedes Blatt von  $T$  ist dann ein Nachbar von  $v$ . Nach Wahl von  $d$  enthält  $T$  eine Ecke vom Grad  $\geq r$  oder einen Weg der Länge  $\geq r$ , oBdA zwischen zwei Blättern. Ein solcher Weg ergibt zusammen mit  $v$  einen Kreis der Länge  $\geq r$ . Eine Ecke  $u$  vom Grad  $\geq r$  in  $T$  ergibt zusammen mit  $v$  und geeigneten Verbindungswegen aus  $T$  einen  $TK_{2,r}$ .  $\square$

Ohne Beweis zitieren wir noch die entsprechenden Resultate für  $k = 3$  und  $k = 4$ . Um unsere Menge  $\mathcal{G}$  klein zu halten, schwächen wir die der Proposition 7.4.2 zugrundeliegende Relation der topologischen Minoren noch einmal ab, zur gewöhnlichen Minorenrelation:

**Satz 7.4.3.** (Oporowski, Oxley & Thomas 1993)

*Zu jedem  $r \in \mathbb{N}$  gibt es ein  $n \in \mathbb{N}$  mit der Eigenschaft, daß jeder 3-zusammenhängende Graph mit mindestens  $n$  Ecken ein Rad der Ordnung  $r$  oder einen  $K_{3,r}$  als Minor enthält.*

Wir bezeichnen einen Graphen der Form  $C^n * \overline{K^2}$  ( $n \geq 4$ ) als *Doppelrad*, das 1-Skelett einer Triangulierung des Zylinders wie in Abb. 7.4.1 als *Krone*, und das 1-Skelett einer Triangulierung des Möbiusbandes wie in Abb. 7.4.1 als *Möbiuskrone*.

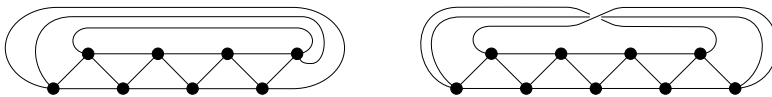


Abb. 7.4.1. Eine Krone und eine Möbiuskrone



**Satz 7.4.4.** (Oporowski, Oxley & Thomas 1993)

Zu jedem  $r \in \mathbb{N}$  gibt es ein  $n \in \mathbb{N}$  mit der Eigenschaft, daß jeder 4-zusammenhängende Graph mit mindestens  $n$  Ecken ein Doppelrad, eine Krone, eine Möbiuskrone, oder einen  $K_{4,s}$  mit jeweils mindestens  $r$  Ecken als Minor enthält.

Beachte, daß die in den Sätzen 7.4.3 und 7.4.4 auftretenden Minoren jeweils selbst 3- bzw. 4-zusammenhängend sind und einander nicht als Minor enthalten. Beide Sätze sind daher im erwähnten Sinne bestmöglich.

## Übungen

- 1.− Bestimme die Ramseyzahl von 3.
- 2.− Beweise den Fall  $k = 2$  (aber  $c$  beliebig) von Satz 7.1.4 durch bloße Anwendung von Satz 7.1.1.
- 3.− Beweise ohne Benutzung von Satz 7.1.2 die folgende unendliche Version des Satzes von Ramsey: jeder Graph auf  $\mathbb{N}$  enthält einen unendlichen vollständigen oder kantenlosen Untergraphen.
4. Kann man die exponentielle obere Schranke für die Ramseyzahl  $R(n)$  für perfekte Graphen deutlich verbessern?
- 5.+ Zeige, daß ein Graph auf  $\mathbb{R}$  weder einen vollständigen noch einen kantenlosen Untergraphen auf  $|\mathbb{R}| = 2^{\aleph_0}$  Ecken zu haben braucht. (Der Satz von Ramsey ist also nicht auf überabzählbare Mengen verallgemeinerbar.)
- 6.+ Zeige mit dem Satz von Ramsey, daß es zu  $k, \ell \in \mathbb{N}$  stets ein  $n \in \mathbb{N}$  gibt, so daß jede Folge von  $n$  verschiedenen ganzen Zahlen eine aufsteigende Teilfolge der Länge  $k + 1$  oder eine absteigende Teilfolge der Länge  $\ell + 1$  enthält. Finde ein Beispiel, das  $n > k\ell$  zeigt. Beweise dann den Satz von Erdős & Szekeres, daß  $n > k\ell$  auch ausreicht.
7. Skizziere einen Beweis des folgenden Satzes von Erdős und Szekeres: zu jedem  $k \in \mathbb{N}$  existiert ein  $n \in \mathbb{N}$ , so daß aus  $n$  Punkten der Ebene, von denen keine drei kollinear sind, stets  $k$  Punkte auswählbar sind, die ein konvexes Polygon aufspannen (d.h. von denen keiner in der konvexen Hülle der übrigen liegt).
8. Beweise den folgenden Satz von Schur: zu jedem  $k \in \mathbb{N}$  existiert ein  $n \in \mathbb{N}$ , so daß für jede Partition von  $\{1, \dots, n\}$  in  $k$  Teilmengen in mindestens einer dieser Teilmengen Zahlen  $x, y, z$  mit  $x + y = z$  existieren.
9. Es sei  $(X, \leq)$  eine vollständig geordnete Menge, und  $G = (V, E)$  der Graph auf  $V := [X]^2$  mit  $E := \{(x, y)(x', y') \mid x < y = x' < y'\}$ .
  - (i) Zeige, daß  $G$  kein Dreieck enthält.
  - (ii) Zeige, daß  $\chi(G)$  beliebig groß wird, wenn nur  $|X|$  groß genug ist.

10. Eine Mengenfamilie heißt ein  $\Delta$ -System, wenn je zwei dieser Mengen den gleichen Durchschnitt haben. Zeige, daß jede unendliche Familie von Mengen gleicher endlicher Kardinalität ein unendliches  $\Delta$ -System enthält.
11. Beweise die folgende Abschwächung des Satzes 6.2.5 von Scott: Zu jedem  $r \in \mathbb{N}$  und jedem Baum  $T$  existiert ein  $k \in \mathbb{N}$  mit der Eigenschaft, daß jeder Graph  $G$  mit  $\chi(G) \geq k$  und  $\omega(G) < r$  eine Unterteilung von  $T$  als Teilgraphen enthält, bei der keine zwei in  $T$  nicht benachbarten Verzweigungsecken in  $G$  benachbart sind.
12. Zeige mit Hilfe des Unendlichkeitslemmas, daß ein abzählbar unendlicher Graph mit  $k \in \mathbb{N}$  Farben eckenfärbbar ist (im Sinne von Kapitel 4), wenn all seine endlichen Teilgraphen es sind.
13. Es seien  $m, n \in \mathbb{N}$ , und  $m - 1$  sei ein Teiler von  $n - 1$ . Zeige, daß für jeden Baum  $T$  mit  $m$  Ecken gilt:  $R(T, K_{1,n}) = m + n - 1$ .
14. Beweise für jedes  $c \in \mathbb{N}$  die Abschätzung  $2^c < R(2, c, 3) \leq 3c!$ .  
(Tip: Induktion nach  $c$ .)
15. Leite die Aussage (\*) aus dem ersten Beweis von Satz 7.3.1 aus der Aussage des Satzes her (d.h. zeige, daß (\*) nur formal stärker ist als der Satz selbst).
16. Zeige, daß der im zweiten Beweis von Satz 7.3.1 konstruierte Ramseygraph  $G$  für  $H$  in der Tat  $\omega(G) = \omega(H)$  erfüllt.
17. Zeige, daß es zu je zwei Graphen  $H_1, H_2$  einen Graphen  $G = G(H_1, H_2)$  gibt mit der Eigenschaft, daß  $G$  zu jeder Eckenfärbung mit den Farben 1 und 2 einen induzierten  $H_1$  der Farbe 1 oder einen induzierten  $H_2$  der Farbe 2 enthält.  
(Tip: Verwende Induktion wie im ersten Beweis von Satz 7.3.1.)
18. Zeige, daß jeder unendliche zusammenhängende Graph einen unendlichen Weg oder einen unendlichen Stern als Teilgraphen enthält.
19. In Proposition 7.4.2 taucht der  $K^T$  aus dem Satz von Ramsey, zuletzt in Proposition 7.4.1 gesichtet, nicht mehr auf – warum nicht?
20. Zeige, daß Satz 7.4.3 in dem nach Proposition 7.4.1 erwähnten Sinne bestmöglich ist.

## Notizen

Die grundlegenden Ramseysätze aus Abschnitt 7.1 finden sich in F.P. Ramsey, On a problem of formal logic, *Proc. London Math. Soc.* **30** (1930), 264–286. Eine Einführung in allgemeine Ramseytheorie (und weitere Literaturhinweise) gibt R.L. Graham, B.L. Rothschild & J.H. Spencer, *Ramsey Theory*, 2. Aufl., Wiley 1990, einen neueren Überblick das Kapitel von J. Nešetřil im *Handbook of Combinatorics* (R.L. Graham, M. Grötschel & L. Lovász, Hrsg.), North-Holland 1995. Die Ramseytheorie unendlicher Mengen ist ein wesentlicher

Teil der sogenannten kombinatorischen Mengenlehre, ausführlich dargestellt in P. Erdős, A. Hajnal, A. Máté & R. Rado, *Combinatorial Set Theory*, North-Holland 1984. Auch das Kapitel über Ramseytheorie in B. Bollobás, *Graph Theory*, Springer-Verlag 1979, ist nicht beschränkt auf Graphen: es enthält überdies eine anregende Auswahl von Sätzen aus der algebraischen, geometrischen und mengentopologischen Ramseytheorie.

Das Unendlichkeitslemma findet sich im Klassiker der Graphentheorie, D. Königs *Theorie der endlichen und unendlichen Graphen*, Akademische Verlagsgesellschaft, Leipzig 1936. Die in Abschnitt 7.1 erwähnte Technik eines sogenannten *Kompaktheitsschlusses* klingt mysteriöser als sie ist. Man versteht darunter im wesentlichen nicht mehr und nicht weniger als eine Anwendung des Unendlichkeitslemmas in der dargestellten Weise: man schließt mit ihm aus einer Eigenschaft aller endlichen Teile einer Struktur auf die gleiche Eigenschaft für die gesamte Struktur. Die Eigenschaften, für die dies klappt, kann man formal beschreiben und dann dem Kompaktheitsschluß das Gewand eines Satzes der Logik geben. Klassisches Beispiel einer solchen Eigenschaft ist die Eckenfärbbarkeit von Graphen mit einer gegebenen endlichen Anzahl von Farben: ist jeder endliche Teilgraph eines Graphen  $k$ -färbbar, so auch der Graph selbst<sup>3</sup> (Übung). Das Unendlichkeitslemma beschreibt die Art dieser Schlüsse zwar besonders anschaulich, jedoch nur in dem Fall, daß die gesamte Struktur, die die betrachtete Eigenschaft haben soll, abzählbar ist. Im überabzählbaren Fall verpackt man den gleichen Schluß etwas anders, etwa mit Hilfe des Satzes von Tychonov aus der allgemeinen Topologie, daß Produkte kompakter Räume kompakt sind (daher die Bezeichnung "Kompaktheitsschluß"). Dies ist explizit dargestellt bei Bollobás (s.o.), Kapitel 6, Satz 10, und bei Graham, Rothschild & Spencer, Kapitel 1, Satz 4.

Die obere Schranke für die Ramseyzahlen von Graphen beschränkter Maximalgrades, Satz 7.2.2, stammt aus V. Chvátal, V. Rödl, E. Szemerédi & W.T. Trotter, The Ramsey number of a graph with bounded maximum degree, *J. Combin. Theory B* **34** (1983), 239–243. Unser Beweis folgt dem Übersichtsartikel von J. Komlós & M. Simonovits, Szemerédi's Regularity Lemma and its applications in graph theory, in (D. Miklos, V.T. Sós und T. Szőnyi, Hrsg.) *Paul Erdős is 80*, Proc. Colloq. Math. Soc. János Bolyai (1994). Die Aussage des Satzes ist eine Abschwächung einer Vermutung von Burr und Erdős (1975), daß sogar die Graphen mit beschränktem *Durchschnittsgrad* in allen Teilgraphen lineare Ramseyzahlen haben: zu jedem  $d \in \mathbb{N}$ , so die Vermutung, gibt es eine Konstante  $c$  so daß  $R(H) \leq c|H|$  für alle Graphen  $H$  mit  $d(H') \leq d$  für alle  $H' \subseteq H$ . Weitere verifizierte Abschwächungen dieser Vermutung sind die entsprechende Aussage für plättbare Graphen (Chen & Schelp 1993) und, allgemeiner, für Graphen ohne topologischen  $K^r$ -Minor für festes  $r$  (Rödl & Thomas 1996). Literaturhinweise finden sich bei Nešetřil (s.o.).

Unser erster Beweis von Satz 7.3.1 basiert auf W. Deuber, A generalization of Ramsey's theorem, in (A. Hajnal et al., Hrsg.): *Infinite and finite sets*, North-Holland 1975. Der gleiche Band erhält auch den Beweis von Erdős, Hajnal und Pósa. Rödl bewies den Satz in seiner Diplomarbeit 1973 an der Prager Karlsuniversität. Unser zweiter Beweis des Satzes, in dem auch die Cliquenzahl des gegebenen Graphen  $H$  bewahrt wird, ist aus J. Nešetřil &

<sup>3</sup> Dies wurde bekannt als *Satz von Erdős und de Bruijn*

V. Rödl, A short proof of the existence of restricted Ramsey graphs by means of a partite construction, *Combinatorica* **1** (1981), 199–202.

Die beiden Sätze aus Abschnitt 7.4 sind aus B. Oporowski, J. Oxley & R. Thomas, Typical subgraphs of 3- and 4-connected graphs, *J. Combin. Theory B* **57** (1993), 239–257.



In Kapitel 0 haben wir kurz das Problem der Existenz eines eulerschen Kantenzugs in einem Graphen  $G$  behandelt; der einfache Satz 0.8.1 löste dieses Problem durchaus befriedigend. Fragen wir nach einem geschlossenen Kantenzug in  $G$ , der nicht unbedingt jede Kante, statt dessen aber jede Ecke von  $G$  genau einmal enthält, so wird das entsprechende Existenzproblem wesentlich schwieriger. Ist  $|G| \geq 3$ , so ist ein solcher Kantenzug offenbar ein Kreis; man nennt ihn einen *Hamiltonkreis* von  $G$ . (Ein Weg in  $G$ , der alle Ecken von  $G$  enthält, ist ein *Hamiltonweg*.) Ein Graph, der einen Hamiltonkreis enthält, heißt *hamiltonsch*.

*Hamilton-*  
*kreis**Hamilton-*  
*weg*

Eine gute Charakterisierung<sup>1</sup> der Graphen, die einen Hamiltonkreis enthalten, ist nicht bekannt. Wir werden in diesem Kapitel zunächst die bekanntesten hinreichenden Kriterien zur Existenz von Hamiltonkreisen zusammenstellen (Abschnitte 8.1 und 8.2) und dann ein schönes tieferliegendes Ergebnis beweisen: den Satz von Fleischner, daß das “Quadrat” eines 2-zusammenhängenden Graphen stets einen Hamiltonkreis enthält (Abschnitt 8.3). Der Beweis dieses Satzes ist etwas länger, aber nicht schwierig.

## 8.1 Einfache hinreichende Bedingungen

Welche Bedingungen an einen Graphen  $G$  könnten die Existenz eines Hamiltonkreises in  $G$  zur Folge haben? Globale Annahmen, etwa eine hohe Kantendichte, werden kaum ausreichen: jede hinreichende Bedingung muß zumindest sicherstellen, daß von jeder einzelnen Ecke von  $G$  zwei Kanten zum Rest von  $G$  führen. Doch auch hoher Minimalgrad,

---

<sup>1</sup> Zum Begriff der *guten Charakterisierung* siehe die Einleitung zu Kapitel 10.5 und die Notizen am Ende von Kapitel 10.

absolut gesehen, reicht nicht aus: wie man sich leicht überlegt, existiert zu jedem  $d \in \mathbb{N}$  ein Graph mit Minimalgrad  $\geq d$  ohne Hamiltonkreis.

Vor diesem Hintergrund gewinnt der folgende Satz, der Klassiker der Theorie der Hamiltonkreise, seine Bedeutung.

**Satz 8.1.1.** (Dirac 1952)

Ist  $G$  ein Graph mit  $n \geq 3$  Ecken und Minimalgrad  $\delta(G) \geq n/2$ , so hat  $G$  einen Hamiltonkreis.

*Beweis.* Wir bemerken zunächst, daß  $G$  zusammenhängend ist: der Grad einer Ecke in der kleinsten Komponente  $C$  von  $G$  wäre sonst kleiner als  $|C| \leq n/2$ .

Es sei nun  $P = x_0 \dots x_k$  ein längster Weg in  $G$ . Wegen der Maximalität von  $P$  liegen alle Nachbarn von  $x_0$  und alle Nachbarn von  $x_k$  auf  $P$ . Mindestens  $n/2$  der weniger als  $n$  Ecken  $x_0, \dots, x_{k-1}$  sind also ein Vorgänger auf  $P$  eines Nachbarn von  $x_0$ , und mindestens  $n/2$  dieser Ecken sind ein Nachbar von  $x_k$ . Nach dem Schubfachprinzip hat eine dieser Ecken beide Eigenschaften: es existiert ein  $i < k$  mit  $x_0 x_{i+1} \in E(G)$  und  $x_i x_k \in E(G)$  (Abb. 8.1.1).

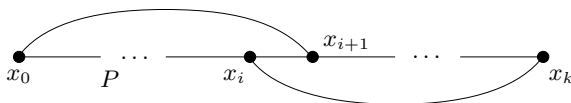


Abb. 8.1.1. Zum Beweis von Satz 8.1.1

Damit ist  $C := x_0 x_{i+1} P x_k x_i P x_0$  ein Kreis auf  $V(P)$ . Wegen der Maximalität von  $|P|$  ist  $C$  sogar ein Hamiltonkreis in  $G$ : da  $G$  zusammenhängend ist, hätte  $C$  sonst einen Nachbarn in  $G - C$ , der zusammen mit einem geeigneten Teilweg von  $C$  einen längeren Weg als  $P$  ergäbe.  $\square$

Die Gradbedingung in Satz 8.1.1 ist insofern bestmöglich, als wir die Schranke von  $n/2$  nicht durch  $\lfloor n/2 \rfloor$  ersetzen können: ist  $n$  ungerade und  $G$  die Vereinigung zweier  $K^{\lfloor n/2 \rfloor}$  mit genau einer gemeinsamen Ecke, so ist  $\delta(G) = \lfloor n/2 \rfloor$  aber  $\kappa(G) = 1$ , d.h.  $G$  kann keinen Hamiltonkreis enthalten. Der hohe Wert von  $\delta$  ist somit allein schon nötig, um 2-Zusammenhang zu sichern – eine Bedingung, die so offensichtlich notwendig für die Existenz eines Hamiltonkreises ist wie ein Minimalgrad von mindestens 2.

Könnte dann vielleicht hinreichend hoher (jedoch von  $n$  unabhängiger) Zusammenhang einen Hamiltonkreis erzwingen? Leider nicht: jeder  $k$ -zusammenhängende Graph enthält zwar Kreise von großer Länge im Vergleich zu  $k$  (Übung 17, Kap. 2), nicht aber gemessen an seiner Ordnung  $n$ . (Beispiel?)

Wie hoher Zusammenhang, so erzwingt auch eine niedrige Unabhängigkeitszahl  $\alpha(G)$  zwar die Existenz relativ langer Kreise (Übung 13, Kap. 4), nicht jedoch die eines Hamiltonkreises. Die beiden Bedingungen ergänzen einander jedoch überraschenderweise zu einem hinreichenden Kriterium:

**Proposition 8.1.2.** *Ein  $k$ -zusammenhängender Graph  $G$ , in dem jede Menge unabhängiger Ecken die Mächtigkeit  $\leq k$  hat, enthält einen Hamiltonkreis.*

*Beweis.* Es sei  $C$  ein längster Kreis in  $G$ . Die Eckenmenge von  $C$  sei zyklisch durchnummeriert, etwa  $V(C) = \{v_i \mid i \in \mathbb{Z}_n\}$  mit  $v_i v_{i+1} \in E(C)$  für alle  $i \in \mathbb{Z}_n$ . Ist  $C$  kein Hamiltonkreis, so wählen wir in  $G$  eine Ecke  $v \in G - C$  und einen  $v$ - $C$ -Fächer  $\mathcal{F}$  maximaler Mächtigkeit. Nach dem Satz von Menger (2.3.3) ist

$$|\mathcal{F}| \geq \min \{k, |C|\}. \quad (1)$$

Es sei  $\{v_i \mid i \in I \subseteq \mathbb{Z}_n\}$  die Menge aller Endecken auf  $C$  von Wegen aus  $\mathcal{F}$ , und zu  $i \in I$  sei  $P_i$  der Weg aus  $\mathcal{F}$  mit Endecke  $v_i$ . Wegen der Maximalität von  $\mathcal{F}$  ist  $v v_j \notin E(G)$  für alle  $j \notin I$ .

Offenbar gilt  $i+1 \notin I$  für jedes  $i \in I$ : anderenfalls wäre der Kreis  $(C \cup P_i v P_{i+1}) - v_i v_{i+1}$  länger als  $C$  (Abb. 8.1.2 links). Damit ist insbesondere  $|\mathcal{F}| < |C|$ , und somit  $|I| = |\mathcal{F}| \geq k$  nach (1). Für  $i, j \in I$  gilt weiter  $v_{i+1} v_{j+1} \notin E(G)$ , da sonst  $(C \cup P_i v P_j) + v_{i+1} v_{j+1} - v_i v_{i+1} - v_j v_{j+1}$  ein längerer Kreis als  $C$  wäre (Abb. 8.1.2 rechts). Damit ist  $\{v_{i+1} \mid i \in I\} \cup \{v\}$  eine Menge von mindestens  $k+1$  unabhängigen Ecken in  $G$ , im Widerspruch zur Annahme.  $\square$

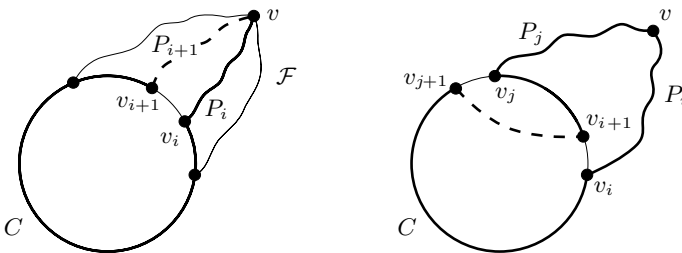


Abb. 8.1.2. Zwei längere Kreise als  $C$

Es mag vielleicht überraschen, daß die Frage nach der Existenz eines Hamiltonkreises etwas mit dem Vierfarbensatz zu tun hat. In Kapitel 5.6 bemerkten wir bereits die Äquivalenz des Vierfarbensatzes zu der Aussage, daß es keinen plättbaren Snark gibt, daß also jeder plättbare kubische brückenlose Graph einen 4-Fluß hat. Wie man leicht zeigt, kann man hier “brückenlos” durch “3-zusammenhängend” ersetzen. Weiter zeigt



man leicht (Übung 12, Kap. 5), daß jeder Graph mit einem Hamiltonkreis einen 4-Fluß hat. Zum Beweis des Vierfarbensatz reichte also ein Beweis, daß jeder plättbare kubische 3-zusammenhängende Graph einen Hamiltonkreis besitzt!

Leider ist dies jedoch nicht richtig; das erste Gegenbeispiel wurde 1946 von Tutte gefunden. Zehn Jahre später bewies Tutte dann den folgenden tiefliegenden Satz, der angesichts seines früheren Beispiels bestmöglich ist:

**Satz 8.1.3.** (Tutte 1956)

*Jeder 4-zusammenhängende plättbare Graph hat einen Hamiltonkreis.*

## 8.2 Hamiltonkreise und Gradsequenz

Der Satz von Dirac bildete historisch den Ausgangspunkt der Entdeckung einer ganzen Reihe von Bedingungen an die Eckengrade eines Graphen, die jeweils die Existenz eines Hamiltonkreises sichern. Wir beweisen jetzt einen Satz, der diese Entwicklung zu einem gewissen Abschluß bringt und insbesondere die angedeuteten früheren Resultate umfaßt.

Ist  $G$  ein Graph mit  $n$  Ecken und Eckengraden  $d_1 \leq \dots \leq d_n$ , so nennt man das Tupel  $(d_1, \dots, d_n)$  die *Gradsequenz* von  $G$ . (Wie man sofort sieht, ist dieses Tupel aufgrund seiner Monotonie eindeutig bestimmt, wenn es auch von verschiedenen Eckenaufzählungen von  $G$  herrühren kann.) Wir nennen ein beliebiges Tupel  $(a_1, \dots, a_n)$  natürlicher Zahlen *hamiltonsch*, wenn jeder Graph mit  $n$  Ecken und punktweise größerer Gradsequenz hamiltonsch ist. (Eine Gradsequenz  $(d_1, \dots, d_n)$  ist *punktweise größer* als  $(a_1, \dots, a_n)$ , wenn  $d_i \geq a_i$  gilt für alle  $i$ .)

Der folgende Satz charakterisiert alle hamiltonschen Tupel:

**Satz 8.2.1.** (Chvátal 1972)

*Ein Tupel  $(a_1, \dots, a_n)$  natürlicher Zahlen mit  $a_1 \leq \dots \leq a_n < n$  und  $n \geq 3$  ist genau dann hamiltonsch, wenn für jedes  $i < n/2$  gilt:*

$$a_i \leq i \Rightarrow a_{n-i} \geq n - i.$$

*( $a_1, \dots, a_n$ ) Beweis.* Es sei  $(a_1, \dots, a_n)$  ein beliebiges Tupel natürlicher Zahlen mit  $a_1 \leq \dots \leq a_n < n$  und  $n \geq 3$ . Wir nehmen zuerst an, daß dieses Tupel die Bedingung des Satzes erfüllt und zeigen, daß es hamiltonsch ist. Angenommen nicht; dann gibt es einen Graphen  $G$  mit Gradsequenz

$(d_1, \dots, d_n)$   $(d_1, \dots, d_n)$ , so daß

$$d_i \geq a_i \tag{1}$$

gilt für alle  $i$ , aber  $G$  keinen Hamiltonkreis enthält. Wir wählen einen solchen Graphen  $G = (V, E)$  mit der größtmöglichen Anzahl von Kanten. Es sei  $(v_1, \dots, v_n)$  eine Eckenaufzählung von  $V$  mit  $d(v_i) = d_i$  für alle  $i$ .

Wegen (1) erfüllt mit  $(a_1, \dots, a_n)$  auch die Gradsequenz  $(d_1, \dots, d_n)$  von  $G$  die Bedingung des Satzes, d.h. es gilt

$$d_i \leq i \Rightarrow d_{n-i} \geq n - i \quad (2)$$

für alle  $i < n/2$ .

Wir wählen nun zwei nicht benachbarte Ecken  $x, y \in G$  so, daß  $d(x) + d(y)$  größtmöglich ist; die Bezeichnungen dieser Ecken als  $x$  und  $y$  seien so gewählt, daß  $d(x) \leq d(y)$  gilt. Wie man beim Umordnen leicht sieht, ist die Gradsequenz des Graphen  $G + xy$  punktweise größer als  $(d_1, \dots, d_n)$ , und damit als  $(a_1, \dots, a_n)$ ; nach Wahl von  $G$  liegt  $xy$  daher auf einem Hamiltonkreis  $H$  in  $G + xy$ . Dann ist  $H - xy$  ein Hamiltonweg  $x_1, \dots, x_n$  in  $G$  mit  $x_1 = x$  und  $x_n = y$ .

Wie im Beweis des Satzes von Dirac betrachten wir die Indexmengen

$$I := \{i \mid xx_{i+1} \in E\} \quad \text{und} \quad J := \{j \mid x_jy \in E\}.$$

Da  $G$  keinen Hamiltonkreis enthält, ist  $I \cap J = \emptyset$ . Nach Definition von  $I$  und  $J$  ist  $I \cup J \subseteq \{1, \dots, n-1\}$ . Damit gilt

$$d(x) + d(y) = |I| + |J| < n, \quad (3)$$

und daher  $h := d(x) < n/2$  nach Wahl von  $x$ .

Jedes Paar  $\{x_i, y\}$  mit  $i \in I$  war wegen  $x_iy \notin E$  ein Kandidat bei der Wahl von  $\{x, y\}$ . Da  $\{x, y\}$  mit maximalem  $d(x) + d(y)$  gewählt wurde, folgt daher  $d(x_i) \leq d(x)$  für alle  $i \in I$ . Somit hat  $G$  mindestens  $|I| = h$  Ecken vom Grad  $\leq h$ , und insbesondere ist  $d_h \leq h$ . Mit (2) folgt  $d_{n-h} \geq n - h$ , d.h. die  $h + 1$  Ecken  $v_{n-h}, \dots, v_n$  haben alle einen Grad  $\geq n - h$ . Wegen  $d(x) = h$  ist eine dieser Ecken, sagen wir  $z$ , nicht zu  $x$  benachbart.

$$d(x) + d(z) \geq h + (n - h) = n$$

ist dies mit (3) ein Widerspruch zur Wahl von  $x$  und  $y$ .

Umgekehrt wollen wir nun zeigen, daß zu jedem Tupel  $(a_1, \dots, a_n)$  des Satzes mit

$$a_h \leq h \quad \text{und} \quad a_{n-h} \leq n - h - 1$$

für ein  $h < n/2$  ein Graph mit punktweise größerer Gradsequenz als  $(a_1, \dots, a_n)$  aber ohne Hamiltonkreis existiert. Offenbar reicht es, dies

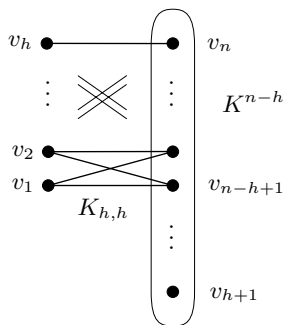


Abb. 8.2.1. Kein  $v_1, \dots, v_h$  enthaltender Kreis enthält auch  $v_{h+1}$

zu gegebenem  $h$  für das größte solche Tupel  $(a_1, \dots, a_n)$  zu zeigen, das Tupel

$$\underbrace{(h, \dots, h)}_{h \text{ mal}}, \underbrace{(n-h-1, \dots, n-h-1)}_{n-2h \text{ mal}}, \underbrace{(n-1, \dots, n-1)}_{h \text{ mal}}. \quad (4)$$

Wie die Abbildung 8.2.1 zeigt, gibt es in der Tat für jedes  $h < n/2$  einen Graphen mit der Gradsequenz (4) aber ohne Hamiltonkreis: er hat die Ecken  $v_1, \dots, v_n$  und die Kantenmenge

$$\{v_i v_j \mid i, j > h\} \cup \{v_i v_j \mid i \leq h; j > n-h\},$$

ist also die Vereinigung eines  $K^{n-h}$  auf den Ecken  $v_{h+1}, \dots, v_n$  und eines  $K_{h,h}$  mit Partitions Mengen  $\{v_1, \dots, v_h\}$  und  $\{v_{n-h+1}, \dots, v_n\}$ .  $\square$

Durch Anwendung von Satz 8.2.1 auf  $G * K^1$  beweist man leicht die folgende Version des Satzes für Hamiltonwege. Ein Tupel natürlicher Zahlen heiße *Weg-hamiltonsch*, wenn jeder Graph mit punktweise größerer Gradsequenz einen Hamiltonweg hat.

**Korollar 8.2.2.** *Ein Tupel  $(a_1, \dots, a_n)$  natürlicher Zahlen mit  $n \geq 3$  und  $a_1 \leq \dots \leq a_n < n$  ist genau dann Weg-hamiltonsch, wenn für jedes  $i \leq n/2$  gilt:*

$$a_i < i \Rightarrow a_{n+1-i} \geq n - i.$$

$\square$

### 8.3 Hamiltonkreise im Quadrat eines Graphen

$G^d$

Für einen Graphen  $G$  und  $d \in \mathbb{N}$  bezeichnet  $G^d$  den Graphen auf  $V(G)$ , bei dem zwei Ecken genau dann benachbart sind, wenn sie in  $G$  einen Abstand  $\leq d$  haben. Offenbar gilt  $G = G^1 \subseteq G^2 \subseteq \dots$ . In diesem Abschnitt wollen wir den folgenden Satz beweisen:

**Satz 8.3.1.** (Fleischer 1974)

Ist  $G$  ein 2-zusammenhängender Graph, so hat  $G^2$  einen Hamiltonkreis.

Zum Beweis des Satzes brauchen wir drei Lemmas. Ist  $v \in G$  eine Ecke und  $e \in G^2$  eine Kante zwischen zwei Nachbarn (in  $G$ ) von  $v$ , so sagen wir, daß  $e$  die Ecke  $v$  überbrückt.

überbrückt

**Lemma 8.3.2.** Es sei  $P = v_0 \dots v_k$  ein Weg ( $k \geq 1$ ). Der Graph  $G$  sei aus  $P$  gewonnen durch die Hinzufügung zweier Ecken  $u, w$ , sowie der Kanten  $uv_1$  und  $wv_k$  (Abb. 8.3.1).

- (i)  $P^2$  enthält einen Weg  $Q$  von  $v_0$  nach  $v_1$  mit  $V(Q) = V(P)$  und  $v_{k-1}v_k \in E(Q)$ , so daß jede der Ecken  $v_1, \dots, v_{k-1}$  durch eine Kante von  $Q$  überbrückt wird.
- (ii)  $G^2$  enthält disjunkte Wege  $Q$  von  $v_0$  nach  $v_k$  und  $Q'$  von  $u$  nach  $w$ , so daß  $V(Q) \cup V(Q') = V(G)$  gilt und jede der Ecken  $v_1, \dots, v_k$  durch eine Kante von  $Q$  oder  $Q'$  überbrückt wird.

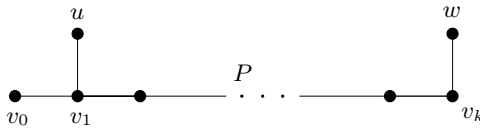


Abb. 8.3.1. Der Graph  $G$  aus Lemma 8.3.2

*Beweis.* (i) Ist  $k$  gerade, so sei  $Q := v_0v_2 \dots v_{k-2}v_kv_{k-1}v_{k-3} \dots v_1$ . Ist  $k$  ungerade, so sei  $Q := v_0v_2 \dots v_{k-1}v_kv_{k-2} \dots v_1$ .

(ii) Ist  $k$  gerade, so sei  $Q := v_0v_2 \dots v_{k-2}v_k$ ; ist  $k$  ungerade, so sei  $Q := v_0v_1v_3 \dots v_{k-2}v_k$ . In beiden Fällen sei  $Q'$  der  $u$ - $w$ -Weg auf den restlichen Ecken von  $G^2$ .  $\square$

**Lemma 8.3.3.** Es sei  $G = (V, E)$  ein kubischer Multigraph mit einem Hamiltonkreis  $C$ . Es seien  $e \in E(C)$  und  $f \in E \setminus E(C)$  zwei Kanten mit einer gemeinsamen Endecke  $v$  (Abb. 8.3.2). Dann existiert ein geschlossener Kantenzug in  $G$ , der  $e$  genau einmal durchläuft, jede andere Kante von  $C$  ein- oder zweimal, und jede Kante aus  $E \setminus E(C)$  genau einmal. Dieser Kantenzug kann so gewählt werden, daß er das Tripel  $(e, v, f)$  enthält, also  $e, v, f$  direkt hintereinander durchläuft.

*Beweis.* Nach Proposition 0.2.1 hat  $C$  gerade Länge. Wir ersetzen jede zweite Kante von  $C$  durch eine Doppelkante, und zwar so, daß  $e$  nicht ersetzt wird. Aus dem entstehenden 4-regulären Multigraphen gewinnen wir einen Multigraphen  $G'$ , indem wir  $v$  durch zwei Ecken  $v', v''$  ersetzen; dabei sei  $v'$  mit  $e$  und  $f$  inzident, und  $v''$  mit den beiden anderen mit  $v$  inzidenten Kanten (Abb. 8.3.2). Nach Satz 0.8.1 hat  $G'$  einen eulerschen Kantenzug; dieser induziert in  $G$  den gewünschten Kantenzug.  $\square$

(0.2.1)  
(0.8.1)

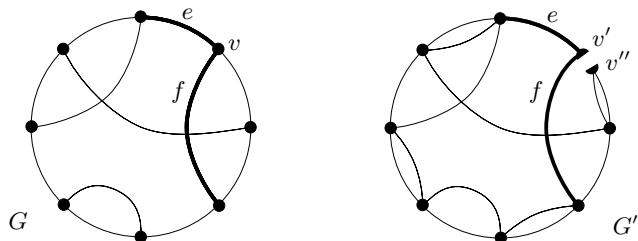


Abb. 8.3.2. Die Multigraphen  $G$  und  $G'$  aus Lemma 8.3.3

**Lemma 8.3.4.** *Ein 2-zusammenhängender Graph  $G$  enthält zu jeder Ecke  $x \in G$  einen Kreis  $C$ , der  $x$  enthält und eine weitere Ecke  $y$ , deren Nachbarn (in  $G$ ) alle auf  $C$  liegen.*

*Beweis.* Hat  $G$  einen Hamiltonkreis, so ist nichts weiter zu zeigen. Ansonsten sei  $C' \subseteq G$  ein Kreis mit  $x \in C'$ ; dieser existiert, da  $G$  2-zusammenhängend ist. Es sei  $D$  eine Komponente von  $G - C'$ ; wir wählen  $C'$  und  $D$  so, daß  $|D|$  minimal ist. Da  $G$  2-zusammenhängend ist, hat  $D$  mindestens zwei Nachbarn auf  $C'$ . Dann enthält  $C'$  einen Weg  $P$  zwischen zwei solchen Nachbarn  $u$  und  $v$ , dessen Inneres  $\hat{P}$  keinen Nachbarn in  $D$  hat und  $x$  nicht enthält (Abb. 8.3.3). Ersetzen wir  $P$  in  $C'$  durch einen  $u$ - $v$ -Weg  $P'$  mit  $\hat{P}' \subseteq D$ , so erhalten wir einen Kreis  $C$ , der  $x$  enthält und eine Ecke  $y \in D$ . Hätte  $y$  einen Nachbarn in  $G - C$ , so läge dieser in einer Komponente  $D' \subsetneq D$  von  $G - C$ , mit Widerspruch zur Wahl von  $C'$  und  $D$ . Also liegen alle Nachbarn von  $y$  auf  $C$ , und  $C$  erfüllt die Behauptung des Lemmas.  $\square$

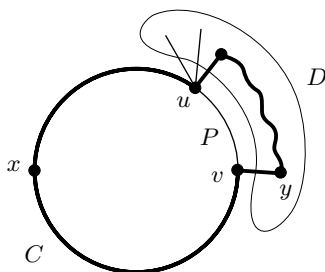


Abb. 8.3.3. Zum Beweis von Lemma 8.3.4

**Beweis von Satz 8.3.1.** Wir beweisen mit Induktion nach  $|G|$  zu jeder Ecke  $x^* \in G$  die Existenz eines Hamiltonkreises  $H$  von  $G^2$  mit der folgenden Eigenschaft:

*Beide mit  $x^*$  inzidenten Kanten von  $H$  liegen in  $G$ .* (\*)

Für  $|G| = 3$  ist  $G = K^3$  und die Behauptung trivial. Es sei also  $|G| \geq 4$ , die Behauptung sei wahr für kleinere  $|G|$ , und es sei  $x^* \in V(G)$  gegeben.

Mit Lemma 8.3.4 wählen wir einen Kreis  $C \subseteq G$ , der  $x^*$  enthält und eine weitere Ecke  $y^*$ , deren Nachbarn in  $G$  alle auf  $C$  liegen.

$C$   
 $y^*$

Ist  $C$  ein Hamiltonkreis von  $G$ , so ist nichts zu zeigen; wir nehmen daher  $G - C \neq \emptyset$  an. Betrachten wir eine Komponente  $D$  von  $G - C$ . Es sei  $\tilde{D}$  der durch Kontraktion von  $G - D$  auf eine Ecke  $\tilde{x}$  entstehende Graph; formal entsteht  $\tilde{D}$  also aus  $D$  durch die Hinzufügung einer neuen Ecke  $\tilde{x}$  und aller Kanten  $\tilde{x}y$  mit  $y \in D$ , für die  $y$  einen Nachbarn in  $G - D$  hat (und damit in  $C$ ). Ist  $|\tilde{D}| = 1$ , so setzen wir  $\mathcal{P}(D) := \{D\}$ . Ist andererseits  $|\tilde{D}| > 1$ , so ist  $\tilde{D}$  wiederum 2-zusammenhängend. Dann enthält  $\tilde{D}^2$  nach Induktionsannahme einen Hamiltonkreis  $\tilde{C}$  mit der Eigenschaft, daß die Kanten zwischen  $\tilde{x}$  und seinen Nachbarn auf  $\tilde{C}$  beide in  $\tilde{D}$  liegen. Der Weg  $\tilde{C} - \tilde{x}$  enthält möglicherweise Kanten, die nicht in  $G^2$  liegen: Kanten zwischen zwei Nachbarn von  $\tilde{x}$ , die in  $G$  keinen gemeinsamen Nachbarn haben (und auch nicht selbst benachbart sind). Bezeichnet  $\tilde{E}$  die Menge dieser Kanten, so sei  $\mathcal{P}(D)$  die Menge der Komponenten von  $(\tilde{C} - \tilde{x}) - \tilde{E}$ ; dies ist eine Menge von Wegen in  $G^2$ , deren Endecken in  $\tilde{D}$  zu  $\tilde{x}$  benachbart sind (Abb. 8.3.4).

$\mathcal{P}(D)$

$\tilde{C}$

$\mathcal{P}(D)$

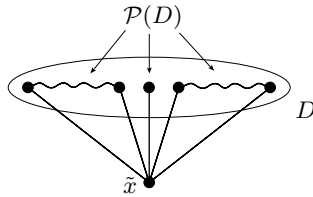


Abb. 8.3.4.  $\mathcal{P}(D)$  enthält drei Wege; einer davon ist trivial

Es sei  $\mathcal{P}$  die Vereinigung der Mengen  $\mathcal{P}(D)$  über alle Komponenten  $D$  von  $G - C$ . Offenbar hat  $\mathcal{P}$  die folgenden Eigenschaften:

$\mathcal{P}$

$$V(G) = V(C) \cup \bigcup_{P \in \mathcal{P}} V(P). \tag{1}$$

Die Elemente von  $\mathcal{P}$  sind paarweise und zu  $C$  disjunkte Wege in  $G^2$ . (2)

Jede Endecke  $y$  eines Weges  $P \in \mathcal{P}$  hat in  $G$  mindestens einen Nachbarn auf  $C$ ; (3)

wir wählen einen solchen Nachbarn aus und nennen ihn den zu  $y$  gehörigen Fuß von  $P$ . Ist  $P \in \mathcal{P}$  trivial, so hat  $P$  genau einen Fuß. Ist  $P$  nicht trivial, so hat  $P$  zu jeder Endecke einen Fuß. Diese beiden Füße brauchen jedoch nicht verschieden zu sein; somit hat  $P$  in diesem Fall entweder einen oder zwei Füße.

Fuß

Wir werden  $\mathcal{P}$  jetzt unter Wahrung von (1)–(3) ein wenig modifizieren; außer (1)–(3) und Folgerungen daraus werden wir später keine

Eigenschaften von  $\mathcal{P}$  verwenden. Ist eine Ecke von  $C$  ein Fuß zwei verschiedener Wege  $P, P' \in \mathcal{P}$ , sagen wir zu  $y \in P$  und zu  $y' \in P'$  gehörig, so ist  $yy'$  eine Kante und  $Pyy'P'$  ein Weg in  $G^2$ ; wir ersetzen  $P$  und  $P'$  in  $\mathcal{P}$  durch diesen Weg. Offenbar erfüllt  $\mathcal{P}$  weiterhin die Aussagen (1)–(3). Wir wiederholen diese Abänderung von  $\mathcal{P}$  so oft, bis folgendes gilt:

*Keine Ecke von  $C$  ist ein Fuß zwei verschiedener Wege in  $\mathcal{P}$ .* (4)

$\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2$   
 $X_1, X_2$

Für  $i = 1, 2$  bezeichne  $\mathcal{P}_i \subseteq \mathcal{P}$  die Menge aller Wege aus  $\mathcal{P}$  mit genau  $i$  Füßen, und  $X_i \subseteq V(C)$  die Menge aller Füße von Wegen aus  $\mathcal{P}_i$ . Nach (4) ist  $X_1 \cap X_2 = \emptyset$ , und es gilt  $y^* \notin X_1 \cup X_2$ .

Auch  $G$  vereinfachen wir jetzt ein wenig; die Änderungen werden weder die Wege aus  $\mathcal{P}$  noch die Gültigkeit von (1)–(4) beeinträchtigen. Zunächst betrachten wir ab jetzt die Wege aus  $\mathcal{P}$  als Wege in  $G$  selbst, nicht bloß in  $G^2$ . Dadurch möglicherweise in  $G^2$  zusätzlich entstehende Kanten werden wir bei der Konstruktion unseres Hamiltonkreises  $H$  nicht verwenden: in diesen werden wir die Wege aus  $\mathcal{P}$  jeweils ganz und unverändert einbauen, d.h. es wird  $P \subseteq H$  gelten für alle  $P \in \mathcal{P}$ . Wenn für den modifizierten Graphen  $G$  dann  $H$  in  $G^2$  liegt und (\*) erfüllt, so gilt dies auch für die ursprüngliche Version von  $G$ . Weiter löschen wir für jedes  $P \in \mathcal{P}$  alle  $P$ - $C$ -Kanten in  $G$  außer den Kanten zwischen den Endecken von  $P$  und den dazugehörigen Füßen auf  $C$ . Schließlich löschen wir in  $G$  alle Sehnen von  $C$ . Es gelte somit ohne Beschränkung der Allgemeinheit:

*Die einzigen Kanten in  $G$  zwischen  $C$  und einem Weg  $P \in \mathcal{P}$  sind die beiden (im Falle  $|P| = 1$  identischen) Kanten zwischen den Endecken von  $P$  und den dazugehörigen Füßen von  $P$ . Die einzigen Kanten in  $G$  mit beiden Endecken auf  $C$  sind die Kanten von  $C$  selbst.* (5)

Unser Ziel ist es, den gesuchten Hamiltonkreis  $H$  von  $G^2$  aus den Wegen in  $\mathcal{P}$  und geeigneten Teilen von  $C^2$  zu konstruieren. Als erste Annäherung finden wir zunächst einen geschlossenen Kantenzug  $W$  in dem Graphen

$$\tilde{G} := G - \bigcup \mathcal{P}_1,$$

der bereits sinngemäß die Bedingung (\*) erfüllt und jeden Weg aus  $\mathcal{P}_2$  genau einmal durchläuft. Später werden wir  $W$  dann so umgestalten, daß  $W$  auch jede Ecke von  $C$  genau einmal durchläuft und überdies die Wege aus  $\mathcal{P}_1$  miteinbezieht. Bis auf weiteres nehmen wir jetzt  $\mathcal{P}_2 \neq \emptyset$  an – auf den Fall  $\mathcal{P}_2 = \emptyset$  kommen wir später zurück.

Wir wählen zunächst eine feste “zyklische Orientierung” von  $C$ , d.h. eine Bijektion  $i \mapsto v_i$  von  $\mathbb{Z}_{|C|}$  nach  $V(C)$  mit  $v_i v_{i+1} \in E(C)$  für alle  $i \in \mathbb{Z}_{|C|}$ . Wir denken uns diese Orientierung als “Rechtsdrehung”: zu

gegebenem  $v_i \in C$  nennen wir  $v_i^+ := v_{i+1}$  den *rechten* Nachbarn von  $v_i$   $v^+$ , rechts  
 und  $v_i^- := v_{i-1}$  seinen *linken* Nachbarn. Entsprechend liegt die Kante  $v^-$ , links  
 $v^-v$  *links* von der Ecke  $v$  und die Kante  $vv^+$  *rechts* von ihr, etc.

Einen Weg  $P = v_i v_{i+1} \dots v_{j-1} v_j$  in  $C$  mit  $V(P) \cap X_2 = \{v_i, v_j\}$  Intervall  
 nennen wir ein *Intervall* mit *linkem Rand*  $v_i$  und *rechtem Rand*  $v_j$ . Wir Rand  
 nehmen dabei  $v_i \neq v_j$  an; unser Kreis  $C$  ist also die Vereinigung von [v, w] etc.  
 $|X_2| = 2|\mathcal{P}_2|$  Intervallen. Wie üblich schreiben wir  $P =: [v_i, v_j]$  und  
 setzen  $(v_i, v_j) := \overset{\circ}{P}$  sowie  $[v_i, v_j] := P\overset{\circ}{v}_j$  und  $(v_i, v_j) := \overset{\circ}{v}_i P$ . Für Inter-  
 valle  $[u, v]$  und  $[v, w]$  mit gemeinsamem Rand  $v$  liegt  $[u, v]$  *links* von  
 $[v, w]$  und  $[v, w]$  *rechts* von  $[u, v]$ . Das eindeutig bestimmte Intervall  
 $[v, w]$  mit  $x^* \in (v, w)$  bezeichnen wir als  $I^*$ , den Weg aus  $\mathcal{P}_2$  mit Fuß  $w$   $I^*, P^*$   
 als  $P^*$ , und den Weg  $I^*wP^*$  als  $Q^*$ .  $Q^*$

Zur Konstruktion von  $W$  fassen wir  $\tilde{G}$  in natürlicher Weise als Mul-  
 tigraphen  $M$  auf  $X_2$  auf: die Kanten von  $M$  seien die Intervalle von  $C$   
 (mit ihren Rändern als inzidenten Ecken) und die Wege aus  $\mathcal{P}_2$  (mit  
 ihren Füßen als inzidenten Ecken). Nach (4) ist  $M$  kubisch, und so  
 können wir Lemma 8.3.3 mit  $e := I^*$  und  $f := P^*$  anwenden. Das  
 Lemma liefert uns einen geschlossenen Kantenzug  $W$  in  $\tilde{G}$ , der  $I^*$  und W  
 jeden Weg aus  $\mathcal{P}_2$  einmal durchläuft und jedes andere Intervall ein- oder  
 zweimal. Weiter enthält  $W$  den Weg  $Q^*$  als Teilweg. Die beiden mit  $x^*$   
 inzidenten Kanten dieses Weges liegen in  $G$ ; in diesem Sinne erfüllt  $W$   
 also bereits die Bedingung (\*).

Wir wollen jetzt  $W$  so umgestalten, daß  $W$  auch jede Ecke von  $C$   
 genau einmal durchläuft. Für die spätere Einbeziehung der Wege aus  
 $\mathcal{P}_1$  treffen wir dabei bereits Vorsorge: wir definieren gleichzeitig eine auf  
 $X_1$  injektive Abbildung  $v \mapsto e(v)$ , die jeder Ecke  $v \in X_1$  eine Kante  $e(v)$   $e(v)$   
 des neuen  $W$  mit der folgenden Eigenschaft zuordnet:

*Die Ecke  $v$  ist entweder durch  $e(v)$  überbrückt oder mit*  
 *$e(v)$  inzident. Im zweiten Fall gilt  $e(v) \in C$  und  $e(v) \neq$  (\*\*)*  
 *$vx^*$ .*

Die Abbildung  $v \mapsto e(v)$  werden wir auf ganz  $V(C) \setminus X_2$  definieren, also  
 auf einer Obermenge von  $X_1$  (vgl. (4)). Zur Injektivität werden wir led-  
 diglich darauf achten müssen, daß wir keine Kante  $vw \in C$  gleichzeitig als  
 $e(v)$  und als  $e(w)$  wählen. Wegen  $|X_1| \geq 2$  im für die Injektivität relevan-  
 ten Fall und  $\mathcal{P}_2 \neq \emptyset$  haben wir nämlich  $|C - y^*| \geq |X_1| + 2|\mathcal{P}_2| \geq 4$ , also  
 $|C| \geq 5$ ; somit kann nach (5) keine Kante von  $G^2$  gleichzeitig zwei ver-  
 schiedene Ecken von  $C$  überbrücken oder eine Ecke von  $C$  überbrücken  
 und selbst auf  $C$  liegen.

Für unsere Korrektur von  $W$  auf den Ecken von  $C$  betrachten wir  
 die Intervalle von  $C$  einzeln. Nach Definition von  $W$  ist jedes Intervall  
 $I$  von einem der folgenden drei Typen:

*Typ 1:*  $W$  durchläuft  $I$  genau einmal;



*Typ 2:*  $W$  durchläuft  $I$  genau zweimal, und zwar hin und zurück direkt hintereinander (formal:  $W$  enthält ein Tripel  $(e, x, e)$  mit  $x \in X_2$  und  $e \in E(I)$ );

*Typ 3:*  $W$  durchläuft  $I$  genau zweimal, aber nicht direkt hintereinander (d.h.  $W$  enthält kein Tripel wie oben).

Nach Wahl von  $W$  ist  $I^*$  vom ersten Typ. Die Ecke  $x$  aus der Definition eines Intervalls vom Typ 2 nennen wir die *Kehrecke* dieses Intervalls. Da  $Q^*$  ein Teilweg von  $W$  ist und  $W$  auch  $P^*$  nur einmal durchläuft, gilt:

*Das Intervall rechts von  $I^*$  ist vom zweiten Typ und hat seine Kehrecke am linken Rand.* (6)

*Kehrecke*

$I = [x_1, x_2]$  Betrachten wir nun ein festes Intervall  $I = [x_1, x_2]$ . Es sei  $y_1$  der Nachbar von  $x_1$  und  $y_2$  der Nachbar von  $x_2$  auf einem Weg aus  $\mathcal{P}_2$ . Das Intervall links von  $I$  bezeichnen wir mit  $I^-$ .

Ist  $I$  vom ersten Typ, so lassen wir  $W$  auf  $I$  unverändert. Ist  $I \neq I^*$ , so wählen wir zu jedem  $v \in \dot{I}$  als  $e(v)$  die Kante links von  $v$ . Wegen (6) ist  $I^- \neq I^*$ , und insbesondere  $x_1 \neq x^*$ . Unsere Wahl der Kanten  $e(v)$  genügt somit der Bedingung (\*\*). Ist  $I = I^*$ , so sei  $e(v)$  für alle  $v \in (x_1, x^*] \cap \dot{I}$  die Kante links von  $v$ , und für alle  $v \in (x^*, x_2)$  die Kante rechts von  $v$ . Auch diese Wahlen von  $e(v)$  vertragen sich mit (\*\*).

Nun sei  $I$  vom zweiten Typ. Wir nehmen zuerst an, daß  $x_2$  die Kehrecke von  $I$  ist. Dann enthält  $W$  (möglicherweise in umgekehrter Reihenfolge) den Kantenzug  $y_1 x_1 I x_2 I x_1 I^-$ . Wir wenden nun Lemma 8.3.2 (i) mit  $P := y_1 x_1 I \hat{x}_2$  an und ersetzen  $y_1 x_1 I x_2 I x_1$  in  $W$  durch den  $y_1 x_1$ -Weg  $Q$  des Lemmas (Abb. 8.3.5). Nach Aussage des Lemmas gilt

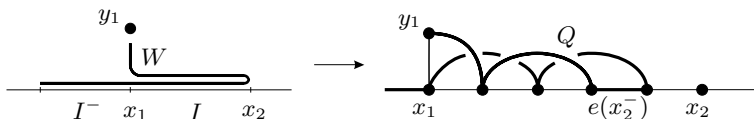


Abb. 8.3.5. Umgestaltung von  $W$  auf einem Intervall zweiten Typs

$V(\hat{Q}) = V(P) \setminus \{y_1, x_1\} = V(\hat{I})$ . Die Ecken  $v \in (x_1, x_2^-)$  werden jeweils durch eine Kante von  $Q$  überbrückt, und wir wählen diese Kante als  $e(v)$ . Als  $e(x_2^-)$  wählen wir die Kante links von  $x_2^-$  (es sei denn,  $x_2^- = x_1$ ); auch diese Kante liegt nach dem Lemma auf  $Q$ . Nach (6) ist sie nicht mit  $x^*$  inzident (da nach Annahme  $x_2$  die Kehrecke von  $I$  ist) und erfüllt somit (\*\*). Den Fall, daß  $x_1$  die Kehrecke von  $I$  ist, behandeln wir ganz analog: mit Lemma 8.3.2 (i) ersetzen wir  $y_2 x_2 I x_1 I x_2$  in  $W$  durch einen  $y_2 x_2$ -Weg  $Q$  mit  $V(\hat{Q}) = V(\hat{I})$ , wählen als  $e(v)$  für  $v \in (x_1^+, x_2)$  eine  $v$  überbrückende Kante von  $Q$ , und wählen als  $e(x_1^+)$  die Kante rechts von  $x_1^+$ .

Schließlich sei  $I$  vom dritten Typ. Da  $W$  die Kante  $y_1x_1$  genau einmal und das Intervall  $I^-$  höchstens zweimal durchläuft, enthält  $W$  die Teilwege  $y_1x_1I$  und  $I^- \cup I$ , und  $I^-$  ist vom ersten Typ. Nach (6) ist jedoch  $I^- \neq I^*$ . Bei der Definition der Kanten  $e(v)$  für  $v \in \dot{I}^-$  trat die rechteste Kante  $x_1^-x_1$  von  $I^-$  somit nicht als Bild auf; wir werden diese Kante jetzt ersetzen können. Da  $W$  das Intervall  $I^+$  höchstens zweimal durchläuft, muß  $W$  anschließend an einen seiner beiden Teilwege  $y_1x_1I$  und  $x_1^-x_1I$  die Kante  $x_2y_2$  enthalten. Die Startecke dieses Weges ( $y_1$  oder  $x_1^-$ ) fassen wir als die Ecke  $u$  in Lemma 8.3.2 (ii) auf, die andere Ecke aus  $\{y_1, x_1^-\}$  als  $v_0$ ; weiter sei  $v_k := x_2$  und  $w := y_2$ . Das Lemma erlaubt uns dann, diese beiden Teilwege von  $W$  zwischen  $\{y_1, x_1^-\}$  und  $\{x_2, y_2\}$  durch disjunkte Wege in  $G^2$  zu ersetzen (Abb. 8.3.6), und weist jeder Ecke  $v \in \dot{I}$  eine sie überbrückende Kante  $e(v)$  auf einem dieser Wege zu.

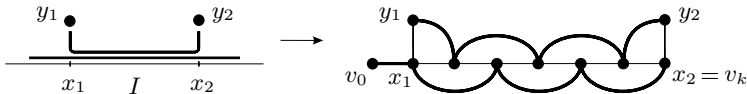


Abb. 8.3.6. Umgestaltung zum Typ 3: der Fall  $u = y_1$  und  $k$  ungerade

Wir wollen nun prüfen, daß  $W$  nach Abschluß all dieser Änderungen jede Ecke von  $\tilde{G}$  genau einmal enthält. Für die Ecken der Wege aus  $\mathcal{P}_2$  ist dies trivial, da  $W$  jeden solchen Weg genau einmal durchläuft. Auch die Ecken im Innern von Intervallen auf  $C$  sind jetzt genau einmal in  $W$  enthalten. Wie aber steht es um die Ecken in  $X_2$ ?

Es sei  $x \in X_2$  gegeben und  $y$  sein Nachbar auf einem Weg aus  $\mathcal{P}_2$ . Das Intervall  $I$  mit  $yxI \subseteq W$  vor den Änderungen an  $W$  bezeichnen wir als  $I_1$ , das andere Intervall mit Rand  $x$  als  $I_2$ . Ist  $I_1$  vom Typ 1, so ist  $I_2$  vom Typ 2 mit Kehrecke  $x$ . Bei der Betrachtung von  $W$  auf  $I_1$  wurde  $x$  somit erhalten, bei der Bereinigung von  $W$  auf  $I_2$  wurde es ausgespart; damit liegt  $x$  jetzt noch genau einmal auf  $W$ . Ist  $I_1$  vom Typ 2, so ist  $x$  nicht seine Kehrecke, und  $I_2$  ist vom Typ 1. Der mit  $yx$  beginnende und dann  $I_1$  hin- und zurücklaufende Teilkantenzug von  $W$  wurde durch einen  $y-x$ -Weg ersetzt. An diesen Weg schließt sich in  $W$  jetzt das unverändert gebliebene Intervall  $I_2$  an, d.h. auch in diesem Fall enthält  $W$  die Ecke  $x$  noch genau einmal. Ist schließlich  $I_1$  vom Typ 3, so war  $x$  in einem der Ersetzungswege  $Q, Q'$  aus Lemma 8.3.2 (ii) enthalten; da diese Wege nach Aussage des Lemmas disjunkt waren, liegt  $x$  wiederum noch genau einmal auf  $W$ .

Damit enthält  $W$  jetzt in der Tat jede Ecke von  $\tilde{G}$  genau einmal, d.h.  $W$  definiert einen Hamiltonkreis  $\tilde{H}$  in  $\tilde{G}^2$ . Da  $W$  unverändert den Weg  $Q^*$  enthält, genügt  $\tilde{H}$  der Bedingung (\*).

Bis jetzt galt unsere Annahme, daß  $\mathcal{P}_2$  nicht leer sei. Im Falle  $\mathcal{P}_2 = \emptyset$  setzen wir  $\tilde{H} := \tilde{G} = C$ ; wiederum gilt (\*) für  $\tilde{H}$ . Um die Einbeziehung der Wege aus  $\mathcal{P}_1$  in unseren Hamiltonkreis einheitlich handhaben zu können, ordnen wir auch für  $\mathcal{P}_2 = \emptyset$  jeder Ecke  $v \in C - y^*$  eine Kante  $e(v)$  von  $\tilde{H}$  zu:

$$e(v) := \begin{cases} vv^+ & \text{falls } v \in [x^*, y^*) \\ vv^- & \text{falls } v \in (y^*, x^*]. \end{cases}$$

Auch diese Abbildung  $v \mapsto e(v)$  ist injektiv, erfüllt (\*\*), und ist auf einer Obermenge von  $X_1$  definiert; wir erinnern daran, daß  $y^*$  nach Definition nicht in  $X_1$  liegen kann.

Zum Schluß bauen wir jetzt  $\tilde{H}$  durch Einbeziehung der Wege aus  $\mathcal{P}_1$  zu unserem gesuchten Hamiltonweg  $H$  von  $G^2$  um. Ist  $\mathcal{P}_1 = \emptyset$ , so gibt es nichts zu tun; es gelte also  $\mathcal{P}_1 \neq \emptyset$ . Es sei  $P \in \mathcal{P}_1$  gegeben, etwa mit Fuß  $v \in X_1$  und Endecken  $y_1, y_2$ . (Im Falle  $|P| = 1$  gilt  $y_1 = y_2$ .) Unser Ziel ist es, die Kante  $e := e(v)$  in  $\tilde{H}$  durch  $P$  ersetzen; dazu müssen wir zeigen, daß die Endecken von  $P$  mit den Endecken von  $e$  geeignet durch Kanten aus  $G^2$  verbunden sind.

Nach (4) und (5) hat  $v$  in  $\tilde{G}$  nur zwei Nachbarn, seine beiden Nachbarn  $x_1, x_2$  auf  $C$ . Ist  $v$  mit  $e$  inzident, also  $e = vx_i$  mit  $i \in \{1, 2\}$ ,

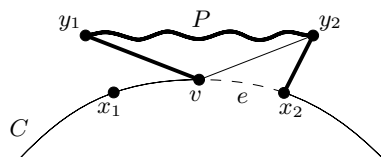


Abb. 8.3.7. Ersetzung der Kante  $e$  in  $\tilde{H}$

so ersetzen wir  $e$  durch den Weg  $vy_1Py_2x_i$  (Abb. 8.3.7). Da  $vy_2$  eine Kante von  $G$  ist, liegt dieser Weg in  $G^2$ . Ist andererseits  $v$  nicht mit  $e$  inzident, so wird  $v$  nach (\*\*) durch  $e$  überbrückt. Dann ist  $e = x_1x_2$ , und wir ersetzen  $e$  durch den Weg  $x_1y_1Py_2x_2 \subseteq G^2$  (Abb. 8.3.8). Da die Funktion  $v \mapsto e(v)$  auf  $X_1$  injektiv ist, sind nach (4) all diese Änderungen von  $\tilde{H}$  (eine für jedes  $P \in \mathcal{P}_1$ ) unabhängig voneinander ausführbar und ergeben schließlich in der Tat ein Hamiltonkreis  $H$  von  $G^2$ .

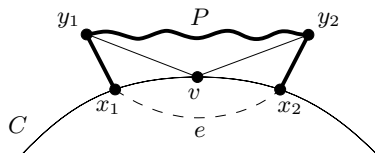


Abb. 8.3.8. Ersetzung der Kante  $e$  in  $\tilde{H}$

Es bleibt zu prüfen, daß mit  $\tilde{H}$  auch  $H$  die Bedingung (\*) erfüllt, daß also beide mit  $x^*$  inzidenten Kanten von  $H$  in  $G$  liegen. Da (\*) für  $\tilde{H}$  gilt, reicht es zu zeigen, daß die mit  $x^*$  inzidenten Kanten von  $\tilde{H}$  jeweils entweder noch in  $H$  liegen oder durch einen Weg ersetzt wurden, dessen mit  $x^*$  inzidente Kante in  $G$  liegt. Es sei also  $e = x^*z \in \tilde{G}$  eine der beiden mit  $x^*$  inzidenten Kanten von  $\tilde{H}$ . Liegt  $e$  nicht in  $H$ , so ist  $e$  bei der Konstruktion von  $H$  aus  $\tilde{H}$  ersetzt worden; es gibt also eine Ecke  $v \in X_1$  mit  $e = e(v)$ .

e, z

Wo liegt diese Ecke  $v$ ? Wir zeigen zunächst, daß  $v$  mit  $e$  inzident sein muß. Anderenfalls gilt  $\mathcal{P}_2 \neq \emptyset$ , und gemäß (\*\*) wird  $v$  durch  $e$  überbrückt. Aus  $\mathcal{P}_2 \neq \emptyset$  folgt wegen  $v \in X_1$  zunächst  $|C - y^*| \geq |X_1| + 2|\mathcal{P}_2| \geq 3$ , also  $|C| \geq 4$ . Daß  $e$  die Ecke  $v$  überbrückt, steht daher wegen (5) im Widerspruch zu  $e \in G$  (was wegen (\*) für  $\tilde{H}$  gilt).

Somit ist  $v$  in der Tat mit  $e$  inzident. Es gilt also  $v \in \{x^*, z\}$  nach Definition von  $e$ , und gleichzeitig  $e \neq vx^*$  nach (\*\*); folglich ist  $v = x^*$ . Die Kante  $e = x^*z \in \tilde{G}$  wurde daher durch einen Weg der Form  $x^*y_1Py_2z$  ersetzt. Da  $x^*y_1$  eine Kante von  $G$  ist, ist somit auch diese Ersetzung für die Gültigkeit von (\*) unschädlich. Insgesamt erfüllt  $H$  daher in der Tat die Bedingung (\*), und unser Beweis ist vollständig.  $\square$

Zum Abschluß dieses Kapitels erwähnen wir noch eine weitreichende Vermutung, die den Satz von Dirac verallgemeinert:

**Vermutung.** (Seymour 1974)

*Ist  $G$  ein Graph mit  $n$  Ecken und Minimalgrad*

$$\delta(G) \geq \frac{k}{k+1}n,$$

*so hat  $G$  einen Hamiltonkreis  $H$  mit  $H^k \subseteq G$ .*

Für  $k = 1$  ist dies gerade der Satz von Dirac. Die Aussage für  $k = 2$  war bereits 1963 von Pósa vermutet worden und wurde 1996 für hinreichend große  $n$  von Komlós, Sárközy & Szemerédi bewiesen.

## Übungen

1. Zeige, daß jeder eindeutig 3-kantenfärbbare kubische Graph einen Hamiltonkreis hat. ('Eindeutig' soll heißen, daß alle 3-Kantenfärbungen die gleiche Kantenpartition induzieren.)
2. Beweise oder widerlege die folgende Verschärfung von Proposition 8.1.2: *jeder  $k$ -zusammenhängende Graph  $G$  mit  $|G| \geq 3$  und  $\chi(G) \geq |G|/k$  hat einen Hamiltonkreis.*

3. Zu einem gegebenen Graphen  $G$  betrachte eine maximale Graphenfolge  $G = G_0, \dots, G_k$  mit  $G_{i+1} = G_i + x_i y_i$  für  $i = 0, \dots, k-1$ , wobei  $x_i, y_i$  jeweils zwei nicht benachbarte Ecken von  $G_i$  mit  $d_{G_i}(x_i) + d_{G_i}(y_i) \geq |G|$  sind. Den letzten Graphen  $G_k$  dieser Folge nennt man den *Hamilton-Abschluß* von  $G$ . Zeige, daß dieser nur von  $G$  abhängt, also unabhängig ist von der Wahl der Folge  $G_0, \dots, G_k$ .
4. Es seien  $x, y$  zwei nicht benachbarte Ecken eines zusammenhängenden Graphen  $G$ , mit  $d(x) + d(y) \geq |G|$ . Zeige, daß  $G$  genau dann einen Hamiltonkreis hat, wenn  $G + xy$  einen hat. Leite hieraus mit Hilfe der vorigen Übung die folgende Verschärfung des Satzes von Dirac her: gilt  $d(x) + d(y) \geq |G|$  für je zwei nicht benachbarte Ecken  $x, y \in G$ , so hat  $G$  einen Hamiltonkreis.
5. Zeige, daß es für jedes gerade  $k > 0$  zu jedem  $n \geq k$  einen  $k$ -regulären Graphen auf  $2n + 1$  Ecken gibt.
- 6.<sup>-</sup> Finde einen hamiltonschen Graphen, dessen Gradsequenz kein hamiltonsches Tupel ist.
- 7.<sup>-</sup> Es sei  $G$  ein Graph auf  $n$  Ecken, der zu jedem  $i < n/2$  weniger als  $i$  Ecken des Grades  $\leq i$  hat. Zeige mit dem Satz von Chvátal, daß  $G$  einen Hamiltonkreis hat. (Insbesondere folgt also der Satz von Dirac aus dem Satz von Chvátal.)
8. Finde einen zusammenhängenden Graphen  $G$ , für den  $G^2$  keinen Hamiltonkreis enthält.
- 9.<sup>+</sup> Zeige mit Induktion nach  $|G|$ , daß die dritte Potenz  $G^3$  eines zusammenhängenden Graphen  $G$  zwischen je zwei Ecken einen Hamiltonweg enthält (und somit insbesondere einen Hamiltonkreis).
10. Zeige, daß das Quadrat eines 2-zusammenhängenden Graphen zwischen je zwei Ecken einen Hamiltonweg enthält.
11. Einen orientierten vollständigen Graphen nennt man ein Turnier. (Warum wohl?) Zeige, daß jedes Turnier einen (gerichteten) Hamiltonweg enthält.
- 12.<sup>+</sup> Zeige, daß jede Kante eines Graphen  $G$  auf einer geraden Anzahl von Hamiltonkreisen liegt, wenn alle Ecken von  $G$  ungeraden Grad haben.  
(Tip: Es sei  $xy \in E(G)$  gegeben. Die Hamiltonkreise durch  $xy$  entsprechen den Hamiltonwegen in  $G - xy$  von  $x$  nach  $y$ . Betrachte die Menge  $\mathcal{H}$  aller in  $x$  beginnenden Hamiltonwege in  $G - xy$  und zeige, daß eine gerade Anzahl davon in  $y$  endet. Definiere dazu einen geeigneten Graphen auf  $\mathcal{H}$ , so daß die gewünschte Aussage aus Proposition 0.2.1 folgt.)

## Notizen

Die Frage nach der Existenz von Hamiltonkreisen in einem Graphen ist, ähnlich wie die Frage nach einem Eulerschen Kantenzug oder nach Färbungen von Landkarten, älter als die Graphentheorie selbst: sie geht zurück auf ein 1857 von W.R. Hamilton erfundenes Spiel, in dem es darum geht, "Hamiltonkreise" im Graphen des Dodekaeders zu finden. Was als mathematische Unterhaltung begann, taucht über hundert Jahre später im Gewand der kombinatorischen Optimierung wieder auf, als *Problem des Handelsreisenden*: in welche Reihenfolge legt ein Vertreter am günstigsten die verschiedenen von ihm zu besuchenden Kunden, wenn ihm zwischen je zwei Kunden die direkte Fahrzeit bekannt ist und er nach Besuch aller Kunden wieder an seinem Ausgangsort sein möchte? Auch wenn der diesem praktischen Problem zugrundeliegende Graph  $K$  vollständig ist und die wesentliche Information nicht in seiner Benachbartheitsrelation selbst sondern in einer auf der Kantenmenge definierten "Bewertungsfunktion" enthalten ist, so ist doch die Verbindung zu Hamiltons Problem deutlich: ist etwa eine beliebige Rundtour gesucht, für die die Fahrzeit zwischen je zwei Ecken lediglich einer oberen Schranke genügen soll, so definieren die entsprechenden Kanten einen aufspannenden Teilgraphen von  $K$ , und wir suchen einen Hamiltonkreis in diesem Teilgraphen. Bis heute ist das algorithmische Problem des Handelsreisenden eine wesentliche Motivation für die Beschäftigung mit Hamiltonkreisen; wir verweisen dazu auf die Literatur der algorithmischen Graphentheorie (siehe die Notizen zu Kapitel 5).

Eine ausführliche Diskussion der durch den Satz von Dirac ausgelösten Entwicklung, hinreichende Existenzkriterien für Hamiltonkreise durch Gradbedingungen zu suchen, gibt R. Halin, *Graphentheorie*, Wissenschaftliche Buchgesellschaft 1980. Dort, wie auch bei B. Bollobás, *Extremal Graph Theory*, Academic Press 1978, finden sich alle relevanten Quellenverweise unserer Abschnitte 8.1 und 8.2.

Der ange deutete "Beweis" des Vierfarbensatzes aufgrund der (falschen) Annahmen, daß jeder 3-zusammenhängende kubische ebene Graph hamiltonsch sei, wird gewöhnlich dem schottischen Mathematiker Tait zugeschrieben. Obwohl Tait sich 1880 wohl in der Tat im Besitz mindestens eines "neuen Beweises"<sup>2</sup> des Vierfarbensatzes glaubte, war er sich spätestens bei einem Vortrag vor der Mathematischen Gesellschaft von Edinburgh im Jahre 1883 bewußt, daß er die obige Aussage über Hamiltonkreise nicht beweisen konnte. Siehe P.G. Tait, Listing's topologie, *Phil. Mag.* **17** (1884), 30–46.

Einen vereinfachten Beweis des Satzes von Tutte, daß jeder 4-zusammenhängende plättbare Graph einen Hamiltonkreis besitzt (Satz 8.1.3), gibt C. Thomassen, A theorem on paths in planar graphs, *J. Graph Theory* **7** (1983), 169–176. Tutes Gegenbeispiel zu Tait's Annahme, daß jeder 3-zusammenhängende kubische plättbare Graph einen Hamiltonkreis enthalte, ist bei Bollobás (s.o.) abgebildet und bei J.A. Bondy & U.S.R. Murty, *Graph Theory with Applications*, Macmillan 1976. Bondy und Murty gehen relativ ausführlich auf dieses Thema ein.

Proposition 8.1.2 stammt von Chvátal & Erdős (1972). Unser Beweis des Satzes 8.3.1 von Fleischner basiert auf S. Ríha, A new proof of the theorem by

<sup>2</sup> nach Kempes falschem Beweis von 1879; siehe die Notizen zu Kapitel 4

Fleischner, *J. Combin. Theory B* **52** (1991), 117–123. Seymours Vermutung ist aus P.D. Seymour, Problem 3 in (T.P. McDonough and V.C. Mavron, Hrsg.): *Combinatorics*, Cambridge University Press 1974. Pósa's Vermutung wurde für große  $n$  bewiesen von J. Komlós, G.N. Sárközy & E. Szemerédi, On the square of a Hamiltonian cycle in dense graphs, *Random Structures and Algorithms* **9** (1996), 193–211.

Bereits mehrfach ist in den vergangenen Kapiteln der folgende Satz von Erdős angeklungen: *es gibt Graphen, die gleichzeitig beliebig große Tailenweite und beliebig hohe chromatische Zahl haben*, d.h. zu jedem  $k \in \mathbb{N}$  existiert ein Graph  $G$  mit  $g(G) > k$  und  $\chi(G) > k$ .

Wie beweist man einen solchen Satz? Der klassische Ansatz wäre, einen entsprechenden Graphen zu konstruieren, vielleicht schrittweise mit Induktion nach  $k$ . Dies ist jedoch alles andere als einfach: gerade der globale Charakter des Satzes, die Forderung, daß der zu konstruierende Graph zwar insgesamt hohe chromatische Zahl haben soll, nicht aber lokal dicht sein darf, steht einer typischen Konstruktion entgegen – einer Konstruktion, die den Zielgraphen aus bereits vorher konstruierten Teilen zusammensetzen sucht.

In einer bahnbrechenden Arbeit des Jahres 1959 wies Erdős einen radikal anderen Weg: er definierte für jedes  $n \in \mathbb{N}$  auf der Menge aller Graphen der Ordnung  $n$  einen Wahrscheinlichkeitsraum und zeigte, daß bei geeigneter Wahl der Wahrscheinlichkeitsmaße die Wahrscheinlichkeit, daß der gesuchte Graph existiert, für hinreichend große  $n$  positiv wird.

Diese von Erdős eingeführte *probabilistische Methode* hat sich seither zu einer der wichtigsten Beweistechniken entfaltet, in der Graphentheorie wie auch in anderen Zweigen der Diskreten Mathematik. Die Theorie der *Zufallsgraphen* hat sich zu einer eigenen Disziplin entwickelt. Dieses Kapitel soll einen ersten Eindruck von diesem Gebiet vermitteln: seine wichtigsten Begriffe und Beweistechniken einführen und ein wenig von der hinter der Technik verborgenen Eleganz der hier anzutreffenden Ideen andeuten.

Der Satz von Erdős (Abschnitt 9.2) hat die Existenz eines Graphen mit gewissen Eigenschaften zum Inhalt: seine Aussage ist ohne Zufallsgraphen formulierbar, doch bilden diese die Grundlage seines Beweises. Ein für die klassische Graphentheorie ebenso interessanter, der Theorie der Zufallsgraphen aber ganz eigener Satztyp ist der einer Aussage für



*fast alle* Graphen; diesen Begriff werden wir in Abschnitt 9.3 kennenlernen. Im letzten Abschnitt stellen wir exemplarisch an einem Satz von Erdős und Rényi eine in der Theorie der Zufallsgraphen häufig verwendete Beweistechnik dar, zuweilen *Methode der zweiten Momente* genannt.

## 9.1 Der Begriff des Zufallsgraphen

Es sei  $V$  eine feste Menge von  $n$  Elementen, sagen wir  $V = \{0, \dots, n-1\}$ . Unser Ziel ist es, die Menge  $\mathcal{G}$  der Graphen auf  $V$  in einen Wahrscheinlichkeitsraum zu verwandeln und dann Fragen der folgenden Art zu untersuchen: mit welcher Wahrscheinlichkeit hat ein Graph  $G \in \mathcal{G}$  diese oder jene Eigenschaft? Wie hoch ist der Erwartungswert einer gegebenen Invariante auf  $\mathcal{G}$ , z.B. die mittlere Tailenweite oder chromatische Zahl der Graphen  $G \in \mathcal{G}$ ?

Intuitiv wollen wir  $G$  folgendermaßen zufällig konstruieren: für alle Eckenpaare  $e \in [V]^2$  entscheiden wir unabhängig voneinander, ob  $e$  eine Kante von  $G$  sein soll oder nicht; die Wahrscheinlichkeit, daß  $e$  eine Kante sei, soll dabei jeweils gleich einem festen Wert  $p$  zwischen 0 und 1 sein. (In diesem Kapitel bezeichnet  $p$  grundsätzlich eine reelle Zahl zwischen 0 und 1, und  $q$  die Zahl  $1-p$ .)<sup>1</sup> Ist  $G_0$  ein konkreter Graph auf  $V$ , sagen wir mit  $m$  Kanten, so hat das Elementarereignis  $\{G_0\}$  dann die Wahrscheinlichkeit  $p^m q^{\binom{n}{2}-m}$ , d.h.  $G$  ist mit der Wahrscheinlichkeit  $p^m q^{\binom{n}{2}-m}$  gerade dieser Graph  $G_0$ . (Die Wahrscheinlichkeit, daß  $G$  *isomorph* ist zu  $G_0$  ist im allgemeinen größer.) Mit den Wahrscheinlichkeiten der Elementarereignisse liegt nun aber bereits das gesamte Wahrscheinlichkeitsmaß des gesuchten Raumes  $\mathcal{G}$  fest; zu zeigen bleibt also nur, daß wir  $\mathcal{G}$  in der Tat mit einem Maß ausstatten können, in dem die einzelnen Kanten wie beschrieben unabhängig voneinander mit der Wahrscheinlichkeit  $p$  auftreten. Ein solches Maß werden wir jetzt konstruieren.<sup>2</sup>

Zu jeder möglichen Kante von  $G$ , also zu jedem  $e \in [V]^2$ , definieren wir dazu zunächst ihren eigenen kleinen Wahrscheinlichkeitsraum  $\Omega_e := \{0_e, 1_e\}$ ; die beiden Elementarereignisse  $\{0_e\}$  und  $\{1_e\}$  dieses Raumes sollen die Wahrscheinlichkeiten  $P_e(1_e) = p$  und  $P_e(0_e) = q$  haben. Unser gesuchter Wahrscheinlichkeitsraum  $\mathcal{G} = \mathcal{G}(n, p)$  sei dann der

<sup>1</sup> Meist wird  $p$  von der Mächtigkeit  $n$  der betrachteten Eckenmenge  $V$  abhängen, d.h. implizit durch  $n$  gegeben sein als Wert  $p = p(n)$  einer Funktion  $n \mapsto p(n)$ . Zu gegebenem  $n$  ist dann aber die Wahrscheinlichkeit, daß  $e$  eine Kante von  $G$  ist, für alle  $e \in [V]^2$  die gleiche.

<sup>2</sup> Wer bereits glaubt, daß solch ein Maß auf  $\mathcal{G}$  existiert, kann den Text bis einschließlich Proposition 9.1.1 überspringen, ohne etwas zu verlieren.

Produkttraum

$$\Omega := \prod_{e \in [V]^2} \Omega_e. \quad \Omega$$

Ein Element von  $\Omega$  ist formal also eine Abbildung  $\omega$ , die jedem  $e \in [V]^2$  entweder  $0_e$  oder  $1_e$  zuordnet, und das Wahrscheinlichkeitsmaß  $P$  auf  $\Omega$  ist das Produktmaß der Maße  $P_e$ . In der Praxis identifizieren wir  $\omega$  natürlich mit dem Graphen  $G$  auf  $V$  mit der Kantenmenge

$$E(G) = \{ e \mid \omega(e) = 1_e \}$$

und nennen  $G$  einen *Zufallsgraphen* auf  $V$  mit der Kantenwahrscheinlichkeit  $p$ . Zufallsgraph

Jede Menge von Graphen auf  $V$  ist damit ein *Ereignis* in  $\mathcal{G}(n, p)$ . Insbesondere ist zu jedem  $e \in [V]^2$  die Menge Ereignis

$$A_e := \{ \omega \mid \omega(e) = 1_e \} \quad A_e$$

aller Graphen  $G$  auf  $V$  mit  $e \in E(G)$  ein Ereignis (das Ereignis, daß  $e$  in  $G$  eine Kante ist), und es gilt in der Tat:

**Proposition 9.1.1.** *Die Ereignisse  $A_e$  sind unabhängig, und ihre Wahrscheinlichkeit ist jeweils  $p$ .*

*Beweis.* Nach Definition von  $A_e$  gilt

$$A_e = \{ 1_e \} \times \prod_{e' \neq e} \Omega_{e'}.$$

Nach Definition von  $P$  als Produktmaß der Maße  $P_e$  gilt damit

$$P(A_e) = p \cdot \prod_{e' \neq e} 1 = p.$$

Ist  $\{ e_1, \dots, e_k \}$  eine beliebige Teilmenge von  $[V]^2$ , so folgt entsprechend

$$\begin{aligned} P(A_{e_1} \cap \dots \cap A_{e_k}) &= P\left(\{ 1_{e_1} \} \times \dots \times \{ 1_{e_k} \} \times \prod_{e \notin \{ e_1, \dots, e_k \}} \Omega_e\right) \\ &= p^k \\ &= P(A_{e_1}) \cdots P(A_{e_k}). \end{aligned}$$

□

Wie bereits bemerkt, ist  $P$  durch den Wert von  $p$  und unsere Annahme der Unabhängigkeit der Ereignisse  $A_e$  eindeutig bestimmt. Bei der Berechnung konkreter Wahrscheinlichkeiten in  $\mathcal{G}(n, p)$  wird es daher im allgemeinen ausreichen, mit dieser Unabhängigkeitsannahme zu argumentieren; unser konkretes Modell  $\Omega$  für  $\mathcal{G}(n, p)$  werden wir nicht weiter benötigen.

Betrachten wir beispielsweise das Ereignis, daß  $G$  einen gegebenen Graphen  $H$  auf  $k$  Ecken aus  $V$  als Teilgraphen enthält; es sei  $\|H\| =: \ell$ . Die Wahrscheinlichkeit dieses Ereignisses  $H \subseteq G$  ist das Produkt der Wahrscheinlichkeiten  $A_e$  über alle Kanten  $e$  von  $H$ , also  $P[H \subseteq G] = p^\ell$ . Im Unterschied hierzu beträgt die Wahrscheinlichkeit, daß  $H$  ein Untergraph von  $G$  ist,  $p^\ell q^{\binom{k}{2} - \ell}$ : die  $\binom{k}{2} - \ell$  in  $H$  fehlenden Kanten müssen ja jetzt auch in  $G$  fehlen, und sie tun dies jeweils unabhängig mit der Wahrscheinlichkeit  $q$ .

Die Wahrscheinlichkeit  $P_H$ , daß  $G$  einen zu  $H$  isomorphen Untergraphen hat, ist im allgemeinen schwieriger zu berechnen: da die möglichen Kopien von  $H$  auf Teilmengen von  $V$  einander überlappen, sind die Ereignisse, daß sie als Untergraphen in  $G$  auftreten, nicht unabhängig. Die Summe (über alle  $U \in [V]^k$ ) der einzelnen Wahrscheinlichkeiten  $P[H \simeq G[U]]$  ist jedoch stets eine obere Schranke für  $P_H$ , da  $P_H$  ja nur das Maß der Vereinigung all dieser Ereignisse ist. Ist beispielsweise  $H = \overline{K}^k$ , so erhalten wir für die Wahrscheinlichkeit, daß  $G$  einen zu  $H$  isomorphen Untergraphen hat, die folgende triviale Abschätzung:

**Lemma 9.1.2.** Für jedes  $k \geq 2$  gilt für die Wahrscheinlichkeit, daß  $G \in \mathcal{G}(n, p)$  eine unabhängige Eckenmenge der Mächtigkeit  $k$  enthält,

$$P[\alpha(G) \geq k] \leq \binom{n}{k} q^{\binom{k}{2}}.$$

*Beweis.* Die Wahrscheinlichkeit, daß eine fest gewählte Eckenmenge  $U \in [V]^k$  in  $G$  unabhängig ist, beträgt  $q^{\binom{k}{2}}$ . Die Behauptung folgt somit aus der Tatsache, daß es nur  $\binom{n}{k}$  solche Mengen  $U$  gibt.  $\square$

Analog zu Lemma 9.1.2 gilt für die Wahrscheinlichkeit, daß  $G \in \mathcal{G}(n, p)$  einen  $K^k$  enthält,

$$P[\omega(G) \geq k] \leq \binom{n}{k} p^{\binom{k}{2}}.$$

Ist nun  $n$  klein genug (bei festem  $k$ ), daß die Wahrscheinlichkeiten  $P[\alpha(G) \geq k]$  und  $P[\omega(G) \geq k]$  beide kleiner als  $\frac{1}{2}$  sind, so ist das Maß dieser beiden Ereignisse zusammen immer noch kleiner als 1. Mit anderen Worten: in  $\mathcal{G}$  gibt es Graphen, die weder einen  $K^k$  noch einen

$k, \ell$

[9.2.1]  
[9.3.4]

$\overline{K^k}$  als Untergraphen enthalten – d.h.  $n$  ist eine untere Schranke für die Ramseyzahl von  $k$ !

Wie der folgende Satz zeigt, ist diese Schranke größenordnungsmäßig gar nicht so schlecht (vgl. Satz 7.1.1):

**Satz 9.1.3.** (Erdős 1947)

Ist  $r \geq 3$  und  $R$  die Ramseyzahl von  $r$ , so gilt

$$R > 2^{r/2}.$$

*Beweis.* Für  $r = 3$  ist trivialerweise  $R \geq 3 > 2^{3/2}$ ; im folgenden sei  $r \geq 4$ . Wir zeigen, daß für jedes  $n \leq 2^{r/2}$  die Wahrscheinlichkeiten  $P[\alpha(G) \geq r]$  und  $P[\omega(G) \geq r]$  für  $G \in \mathcal{G}(n, \frac{1}{2})$  beide kleiner als  $\frac{1}{2}$  sind.

Nach Lemma 9.1.2 und der analogen Aussage für  $\omega(G)$  gilt wegen  $p = q = \frac{1}{2}$  (und  $r! > 2^r$  für  $r \geq 4$ ) für  $n \leq 2^{r/2}$  in der Tat

$$\begin{aligned} P[\alpha(G) \geq r], P[\omega(G) \geq r] &\leq \binom{n}{r} \left(\frac{1}{2}\right)^{\binom{r}{2}} \\ &< (n^r/2^r) 2^{-\frac{1}{2}r(r-1)} \\ &\leq (2^{r^2/2}/2^r) 2^{-\frac{1}{2}r(r-1)} \\ &= 2^{-r/2} \\ &< \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

□

Jede auf Graphen definierte Funktion wie Durchschnittsgrad, Zusammenhang, Tailenweite, Durchmesser, chromatische Zahl usw. wird in natürlicher Weise zu einer nicht negativen *Zufallsgröße* auf  $\mathcal{G}(n, p)$ , *Zufallsgröße* einer Abbildung

$$X: \mathcal{G}(n, p) \rightarrow [0, \infty).$$

Die Berechnung des *Erwartungswertes* oder *Mittelwertes*

*Erwartungswert*

$$E(X) := \sum_{G \in \mathcal{G}(n, p)} P(\{G\}) \cdot X(G) \quad E(X)$$

einer solchen Zufallsgröße  $X$  kann ein einfaches Hilfsmittel sein, die Existenz von Graphen mit einer gewünschten Eigenschaft  $\mathcal{P}$  nachzuweisen, für die  $X$  einen bestimmten Wert unterschreitet. Liegt nämlich der Mittelwert von  $X$  niedrig, so kann  $X(G)$  nur für wenige Graphen  $G \in \mathcal{G}(n, p)$  groß sein (wegen  $X(G) \geq 0$  für alle  $G$ ); ist aber  $X(G)$  klein für viele  $G \in \mathcal{G}(n, p)$ , so können wir hoffen, unter diesen  $G$  auch eines mit der gewünschten Eigenschaft  $\mathcal{P}$  zu finden. Diese einfache aber ganz wesentliche Idee liegt zahlreichen nicht konstruktiven Existenzbeweisen zugrunde; wir werden sie im Beweis des Satzes von Erdős näher kennenlernen.

Formal haben wir das folgende Lemma, dessen Beweis sofort aus der Definition des Erwartungswertes und der Additivität von  $P$  folgt:

**Lemma 9.1.4.** (Markov-Ungleichung)

Es sei  $X \geq 0$  eine Zufallsgröße auf  $\mathcal{G}(n, p)$  und  $a \in \mathbb{R}$ ,  $a > 0$ . Dann gilt

$$P[X \geq a] \leq E(X)/a.$$

*Beweis.*

$$\begin{aligned} E(X) &= \sum_{G \in \mathcal{G}(n, p)} P(\{G\}) \cdot X(G) \\ &\geq \sum_{\substack{G \in \mathcal{G}(n, p) \\ X(G) \geq a}} P(\{G\}) \cdot X(G) \\ &\geq \sum_{\substack{G \in \mathcal{G}(n, p) \\ X(G) \geq a}} P(\{G\}) \cdot a \\ &= P[X \geq a] \cdot a. \end{aligned}$$

□

Da unsere Wahrscheinlichkeitsräume endlich sind, ist die Berechnung des Erwartungswertes von  $X$  häufig nichts anderes als eine elegante Verpackung der auch sonst in der Kombinatorik verbreiteten Technik des doppelten Zählens – wie wir sie etwa in den Beweisen von Korollar 3.2.10 und Satz 4.5.3 kennengelernt haben.

Zur Veranschaulichung dieses Zusammenhangs berechnen wir exemplarisch einmal ausführlich die mittlere Anzahl von Kreisen gegebener Länge  $k \geq 3$  in einem Zufallsgraphen  $G \in \mathcal{G}(n, p)$ . (Wir werden dies auch im Beweis des Satzes von Erdős brauchen.) Es sei also  $X: \mathcal{G}(n, p) \rightarrow \mathbb{N}$  die Zufallsgröße, die jedem Zufallsgraphen  $G$  die Anzahl seiner zu  $C^k$  isomorphen Teilgraphen zuordnet. Zur Abkürzung setzen wir

$$(n)_k := n(n-1)(n-2) \cdots (n-k+1);$$

dies ist die Anzahl der Folgen  $k$  verschiedener Elemente einer gegebenen  $n$ -elementigen Menge.

**Lemma 9.1.5.** Die mittlere Anzahl von Kreisen der Länge  $k$  in  $G \in \mathcal{G}(n, p)$  beträgt

$$E(X) = \frac{(n)_k}{2k} p^k.$$

*Beweis.* Für jeden Kreis  $C = C^k$  mit Ecken aus  $V = \{0, \dots, n-1\}$  (der Eckenmenge der Graphen aus  $\mathcal{G}(n, p)$ ) bezeichne  $X_C: \mathcal{G}(n, p) \rightarrow \{0, 1\}$  die sogenannte *charakteristische Zufallsgröße* von  $C$ :

$$X_C: G \mapsto \begin{cases} 1 & \text{falls } C \subseteq G \text{ ist;} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

charakteristische  
Zufallsgröße

Da die Zufallsgröße  $X_C$  als positiven Wert lediglich 1 annimmt, ist ihr Erwartungswert gleich dem Maß  $P(X_C^{-1}(1))$  der Menge aller Graphen aus  $\mathcal{G}(n, p)$ , die  $C$  enthalten. Dies ist natürlich nichts anderes als die Wahrscheinlichkeit, daß  $C$  ein Kreis in  $G$  ist:

$$E(X_C) = P[C \subseteq G] = p^k. \quad (1)$$

Wieviele solche Kreise  $C = v_0 \dots v_{k-1} v_0$  gibt es? Da es  $(n)_k$  Folgen  $v_0 \dots v_{k-1}$  verschiedener Ecken aus  $V$  gibt und jeder Kreis durch  $2k$  dieser Folgen bezeichnet wird, gibt es  $(n)_k/2k$  solche Kreise.

Unsere Zufallsgröße  $X$  ordnet jedem Graphen  $G$  die Anzahl der Kreise der Länge  $k$  in  $G$  zu. Dies ist offenbar die Summe aller Werte  $X_C(G)$ , wobei  $C$  die  $(n)_k/2k$  Kreise der Länge  $k$  mit Ecken aus  $V$  durchläuft:

$$X = \sum_C X_C.$$

Wegen der Linearität des Erwartungswertes gilt daher mit (1)

$$E(X) = E\left(\sum_C X_C\right) = \sum_C E(X_C) = \frac{(n)_k}{2k} p^k,$$

wie behauptet. □

## 9.2 Die probabilistische Methode

Die sogenannte *probabilistische Methode* in der Diskreten Mathematik besteht ganz allgemein in dem folgenden Ansatz: um die Existenz eines Objekts mit einer gewünschten Eigenschaft nachzuweisen, definiert man auf einer größeren (und jedenfalls nicht leeren) Menge von Objekten einen Wahrscheinlichkeitsraum und zeigt dann, daß ein Element dieses Raumes mit positiver Wahrscheinlichkeit die gewünschte Eigenschaft hat. Die betrachteten Objekte können dabei ganz verschiedenartig sein: Partitionen oder Ordnungen der Eckenmenge eines gegebenen Graphen treten genauso natürlich auf wie Abbildungen, Einbettungen, oder eben auch Graphen selbst. In diesem Abschnitt stellen wir die probabilistische Methode exemplarisch dar an dem Beweis, aus dem sie geboren wurde: dem Beweis des Satzes von Erdős über die Existenz von Graphen mit hoher Taillenweite und chromatischer Zahl.

Der Satz von Erdős besagt, daß es zu jedem  $k \in \mathbb{N}$  einen Graphen  $G$  mit Taillenweite  $g(G) > k$  und chromatischer Zahl  $\chi(G) > k$  gibt. Nennen wir Kreise der Länge  $\leq k$  *kurz* und Mengen von  $|G|/k$  oder mehr

*groß/klein*

Ecken von  $G$  *groß*, so reicht es, einen Graphen  $G$  ohne kurze Kreise und ohne große unabhängige Eckenmengen zu finden: die Farbklassen einer jeden Eckenfärbung von  $G$  sind dann klein, und wir brauchen mehr als  $k$  Farben um ganz  $G$  zu färben.

Wie finden wir einen solchen Graphen? Wählen wir  $p$  klein genug, so werden die Zufallsgraphen aus  $\mathcal{G}(n, p)$  mit hoher Wahrscheinlichkeit keine (kurzen) Kreise haben. Wählen wir  $p$  groß genug, so werden kaum große unabhängige Eckenmengen auftreten. Die Frage lautet also: überlappen sich diese beiden Größenordnungsbereiche von  $p$ , d.h. können wir  $p$  so wählen, daß es (für große  $n$ ) gleichzeitig klein genug für  $P[g \leq k] < \frac{1}{2}$  und groß genug für  $P[\alpha \geq n/k] < \frac{1}{2}$  ist? Wenn ja, so enthält  $\mathcal{G}(n, p)$  mindestens einen Graphen ohne kurze Kreise und ohne große unabhängige Eckenmengen.

Leider ist eine solche Wahl von  $p$  nicht möglich: die beiden Bereiche für  $p$  überlappen einander nicht! Wie wir in Abschnitt 9.4 sehen werden, müssen wir  $p$  unterhalb von  $n^{-1}$  halten, um kurze Kreise zu vermeiden — doch treten für solche  $p$  dann auch bereits überhaupt keine Kreise mehr auf (Übung), d.h. der Graph ist bipartit und enthält somit mindestens  $n/2$  unabhängige Ecken.

Was tun? Die entscheidende Idee ist jetzt die folgende. Wir wählen  $p$  in der Tat etwas größer als  $n^{-1}$ , um einen Faktor  $n^\epsilon$ , aber wir wählen dieses  $\epsilon$  so klein, daß  $G \in \mathcal{G}(n, p)$  mit hoher Wahrscheinlichkeit nur *wenige* kurze Kreise enthält — selbst gemessen an  $n$ . Löschen wir dann aus jedem dieser Kreise eine Ecke, so enthält der entstehende Graph  $H$  keine kurzen Kreise mehr, aber seine Unabhängigkeitszahl  $\alpha(H)$  ist weiterhin nicht größer als die von  $G$ . Da  $H$  nicht viel kleiner ist als  $G$ , hat damit auch  $H$  eine hohe chromatische Zahl, und wir haben den gesuchten Graphen gefunden.

Zeigen wir also zunächst, daß  $G \in \mathcal{G}(n, p)$  mit  $p = n^{\epsilon-1}$  für beliebig kleines  $\epsilon > 0$  “fast sicher” keine großen unabhängigen Eckenmengen enthält. Genauer beweisen wir das folgende etwas stärkere Lemma:

**Lemma 9.2.1.** *Es seien  $k > 0$  und  $p = p(n)$  gegeben. Ist  $p \geq (6k \ln n)n^{-1}$  für alle hinreichend großen  $n$ , so gilt*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P[\alpha \geq \frac{1}{2}n/k] = 0.$$

(9.1.2) *Beweis.* Für alle  $n, r \in \mathbb{N}$  mit  $n \geq r \geq 2$  und  $G \in \mathcal{G}(n, p)$  gilt nach Lemma 9.1.2

$$\begin{aligned} P[\alpha \geq r] &\leq \binom{n}{r} q^{\binom{r}{2}} \\ &\leq n^r q^{\binom{r}{2}} \\ &= \left(nq^{(r-1)/2}\right)^r \end{aligned}$$

$$\leq \left( n e^{-p(r-1)/2} \right)^r,$$

wobei die letzte Ungleichung aus der Tatsache folgt, daß  $1 - p \leq e^{-p}$  ist für alle  $p$ . (Vergleiche die Funktionen  $x \mapsto e^x$  und  $x \mapsto x + 1$  für  $x = -p$ .) Ist nun  $p \geq (6k \ln n)n^{-1}$  und  $r \geq \frac{1}{2}n/k$ , so gilt für den Ausdruck unter dem Exponenten:

$$\begin{aligned} n e^{-p(r-1)/2} &= n e^{-pr/2 + p/2} \\ &\leq n e^{-(3/2) \ln n + p/2} \\ &\leq n n^{-3/2} e^{1/2} \\ &= \sqrt{e}/\sqrt{n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0. \end{aligned}$$

Gilt  $p \geq (6k \ln n)n^{-1}$  für große  $n$ , so folgt mit  $r := \lceil \frac{1}{2}n/k \rceil$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P[\alpha \geq \frac{1}{2}n/k] = \lim_{n \rightarrow \infty} P[\alpha \geq r] = 0,$$

wie behauptet. □

**Satz 9.2.2.** (Erdős 1959)

Zu jedem  $k \in \mathbb{N}$  gibt es einen Graphen  $H$  mit Tailleweite  $g(H) > k$  und chromatischer Zahl  $\chi(H) > k$ . [7.2.3]

*Beweis.* Es sei  $\epsilon$  mit  $0 < \epsilon < 1/k$  fest gewählt, und  $p := n^{\epsilon-1}$ . Wir bezeichnen mit  $X(G)$  die Anzahl der kurzen Kreise in einem Zufallsgraphen  $G \in \mathcal{G}(n, p)$ , also die Anzahl seiner Kreise der Länge  $\leq k$ . (9.1.4)  
(9.1.5)  
 $p, \epsilon, X$

Nach Lemma 9.1.5 gilt

$$E(X) = \sum_{i=3}^k \frac{\binom{n}{i} p^i}{2i} \leq \frac{1}{2} \sum_{i=3}^k n^i p^i \leq \frac{1}{2}(k-2) n^k p^k;$$

beachte, daß  $(np)^i \leq (np)^k$  ist wegen  $np = n^\epsilon \geq 1$ . Mit Lemma 9.1.4 folgt

$$\begin{aligned} P[X \geq n/2] &\leq E(X)/(n/2) \\ &\leq (k-2) n^{k-1} p^k \\ &= (k-2) n^{k-1} n^{(\epsilon-1)k} \\ &= (k-2) n^{k\epsilon-1}. \end{aligned}$$

Da  $k\epsilon - 1 < 0$  ist nach Wahl von  $\epsilon$ , folgt hieraus

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P[X \geq n/2] = 0.$$

Es sei nun  $n$  so groß, daß  $P[X \geq n/2] < \frac{1}{2}$  und  $P[\alpha \geq \frac{1}{2}n/k] < \frac{1}{2}$  gilt; letzteres ist möglich nach Wahl von  $p$  und Lemma 9.2.1. Dann gibt  $n$



es einen Graphen  $G \in \mathcal{G}(n, p)$  mit  $\alpha(G) < \frac{1}{2}n/k$  und mit weniger als  $n/2$  kurzen Kreisen. Aus jedem kurzen Kreis von  $G$  entfernen wir eine Ecke. Der entstehende Graph  $H$  hat noch mindestens  $n/2$  Ecken und enthält keine kurzen Kreise mehr, d.h. es gilt  $g(H) > k$ . Nach Wahl von  $G$  gilt weiter

$$\chi(H) \geq \frac{|H|}{\alpha(H)} \geq \frac{n/2}{\alpha(G)} > k.$$

□

**Korollar 9.2.3.** *Es gibt Graphen mit beliebig hoher Tailenweite und gleichzeitig beliebig hohen Werten der Invarianten  $\kappa$ ,  $\varepsilon$  und  $\delta$ .*

(0.4.2)  
(4.2.3)

*Beweis* mit Korollar 4.2.3 und Satz 0.4.2.

□

### 9.3 Eigenschaften fast aller Graphen

Eine Klasse von Graphen, die mit jedem Graphen  $G$  auch alle zu  $G$  isomorphen Graphen enthält, nennen wir wie üblich eine *Grapheneigenschaft*. Ist  $p = p(n)$  eine fest gewählte Funktion (möglicherweise konstant), so können wir für eine Grapheneigenschaft  $\mathcal{P}$  untersuchen, wie sich die Wahrscheinlichkeit  $P[G \in \mathcal{P}]$  für  $G \in \mathcal{G}(n, p)$  verhält, wenn  $n$  gegen unendlich geht. Strebt diese Wahrscheinlichkeit gegen 1, so sagen wir, daß *fast alle* (oder *fast jedes*)  $G \in \mathcal{G}(n, p)$  die Eigenschaft  $\mathcal{P}$  haben; strebt sie gegen 0, so hat *fast kein*  $G \in \mathcal{G}(n, p)$  die Eigenschaft  $\mathcal{P}$ . (In Lemma 9.2.1 haben wir also bewiesen, daß für gewisse  $p$  fast kein  $G \in \mathcal{G}(n, p)$  mehr als  $\frac{1}{2}n/k$  unabhängige Ecken enthält.)

Als einfaches Beispiel wollen wir jetzt zeigen, daß für konstantes  $p$  jeder fest vorgegebene abstrakte Graph<sup>3</sup>  $H$  Untergraph fast aller Graphen ist:

**Proposition 9.3.1.** *Für konstantes  $p \notin \{0, 1\}$  ist jeder Graph  $H$  ein Untergraph fast aller Graphen  $G \in \mathcal{G}(n, p)$ .*

*Beweis.* Es sei  $H$  gegeben und  $k := |H|$ . Ist  $U \subseteq \{0, \dots, n-1\}$  eine feste Menge von  $k$  Ecken von  $G$ , so ist  $G[U]$  mit einer gewissen Wahrscheinlichkeit  $r > 0$  zu  $H$  isomorph. Diese Wahrscheinlichkeit  $r$  ist abhängig von  $p$ , nicht aber von  $n$  (warum nicht?). In  $G$  gibt es  $\lfloor n/k \rfloor$  disjunkte solche Eckenmengen  $U$ . Die Wahrscheinlichkeit, daß keines der entsprechenden  $G[U]$  zu  $H$  isomorph ist, beträgt  $(1-r)^{\lfloor n/k \rfloor}$ , da diese

<sup>3</sup> "Abstrakt" bedeutet, daß wir nur die Kenntnis des Isomorphietyps von  $H$  voraussetzen, nicht die seiner konkreten Ecken- und Kantenmenge. Das Wort deutet somit an, daß wir mit "Untergraph" hier wieder wie üblich "isomorph zu einem Untergraphen" meinen.

Graphen-  
eigenschaft

fast alle  
fast kein

Ereignisse wegen der Disjunktheit der Kantenmengen  $[U]^2$  unabhängig sind. Insgesamt haben wir also

$$P[H \not\subseteq G \text{ induziert}] \leq (1-r)^{\lfloor n/k \rfloor} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0,$$

woraus die Behauptung folgt.  $\square$

Das folgende Lemma erlaubt es, für eine ganze Reihe natürlicher Eigenschaften ganz einfach zu beweisen, daß fast jeder Graph sie hat. Für  $i, j \in \mathbb{N}$  bezeichne  $\mathcal{P}_{i,j}$  die Eigenschaft, daß der Graph mindestens  $i+j$  Ecken hat und zu disjunkten Eckenmengen  $U, W$  mit  $|U| \leq i$  und  $|W| \leq j$  stets eine Ecke  $v \notin U \cup W$  enthält, die zu allen Ecken aus  $U$  aber zu keiner Ecke aus  $W$  benachbart ist.

 $\mathcal{P}_{i,j}$ 

**Lemma 9.3.2.** *Für konstantes  $p \notin \{0, 1\}$  und  $i, j \in \mathbb{N}$  hat stets fast jeder Graph  $G \in \mathcal{G}(n, p)$  die Eigenschaft  $\mathcal{P}_{i,j}$ .*

*Beweis.* Die Wahrscheinlichkeit, daß für gegebene  $U, W$  eine feste Ecke  $v \in G - (U \cup W)$  zu allen Ecken aus  $U$  aber zu keiner Ecke aus  $W$  benachbart ist, beträgt

$$p^{|U|} q^{|W|} \geq p^i q^j.$$

Die Wahrscheinlichkeit, daß für diese  $U, W$  keine geeignete Ecke  $v$  existiert, beträgt also (für  $n \geq i+j$ )

$$(1 - p^{|U|} q^{|W|})^{n-|U|-|W|} \leq (1 - p^i q^j)^{n-i-j},$$

da die entsprechenden Ereignisse für verschiedene  $v$  unabhängig sind. Nun gibt es nicht mehr als  $n^{i+j}$  Paare solcher Mengen  $U$  und  $W$  in  $V(G)$ . (Kodiere Mengen  $U$  mit weniger als  $i$  Elementen einfach durch nicht-injektive Abbildungen  $\{0, \dots, i-1\} \rightarrow \{0, \dots, n-1\}$ , etc.) Die Wahrscheinlichkeit, daß sich darunter ein Paar ohne geeignetes  $v$  befindet, beträgt höchstens

$$n^{i+j} (1 - p^i q^j)^{n-i-j},$$

und dieser Wert geht wegen  $1 - p^i q^j < 1$  für  $n \rightarrow \infty$  gegen null.  $\square$

**Korollar 9.3.3.** *Für konstantes  $p \notin \{0, 1\}$  und  $k \in \mathbb{N}$  ist fast jeder Graph in  $\mathcal{G}(n, p)$   $k$ -zusammenhängend.*

*Beweis.* Nach Lemma 9.3.2 reicht es zu zeigen, daß jeder Graph mit  $\mathcal{P}_{2,k-1}$  notwendig  $k$ -zusammenhängend ist. Dies ist aber klar: ist  $W$  eine Menge von weniger als  $k$  Ecken, so haben nach Definition von  $\mathcal{P}_{2,k-1}$  je zwei weitere Ecken  $x, y$  einen gemeinsamen Nachbarn  $v \notin W$ ; insbesondere kann  $W$  die Ecken  $x, y$  nicht trennen.  $\square$

Im Beweis von Korollar 9.3.3 haben wir wesentlich mehr gezeigt, als verlangt war: statt zu je zwei Ecken  $x, y \notin W$  die Existenz irgendeines  $W$  vermeidenden Weges  $x \dots y$  nachzuweisen, haben wir gezeigt, daß  $x$  und  $y$  einen gemeinsamen Nachbarn außerhalb von  $W$  haben; die zum Zusammenhang notwendigen verbindenden Wege hatten also alle die Länge 2. Daß nach diesem Kunstgriff die zu beweisende Behauptung leicht aus Lemma 9.3.2 folgte, ist kein Zufall sondern entspricht einem allgemeineren Prinzip: ist eine Grapheneigenschaft so formulierbar, daß sich die darin auftretenden Quantoren nur auf Ecken des Graphen beziehen, nicht auf Mengen oder Folgen von Ecken,<sup>4</sup> so ist die Eigenschaft oder ihr Komplement stets die direkte Konsequenz einer Eigenschaft  $\mathcal{P}_{i,j}$  und gilt daher für fast alle oder fast keinen Graphen  $G \in \mathcal{G}(n, p)$ . (Siehe die Übungen für weitere Beispiele.)

Als letztes Beispiel einer Eigenschaft fast aller Graphen für festes  $p$  zeigen wir noch, daß fast jeder Graph eine erstaunlich hohe chromatische Zahl hat – relativ nahe am theoretischen Maximum, seiner Eckenzahl:

**Proposition 9.3.4.** *Für konstantes  $p \notin \{0, 1\}$  und jedes  $\epsilon > 0$  hat fast jeder Graph  $G \in \mathcal{G}(n, p)$  eine chromatische Zahl*

$$\chi(G) > \frac{\log(1/q)}{2 + \epsilon} \cdot \frac{n}{\log n}.$$

(9.1.2) *Beweis.* Nach Lemma 9.1.2 gilt für feste  $n \geq k \geq 2$ :

$$\begin{aligned} P[\alpha \geq k] &\leq \binom{n}{k} q^{\binom{k}{2}} \\ &\leq n^k q^{\binom{k}{2}} \\ &= q^{k \frac{\log n}{\log q} + \frac{1}{2} k(k-1)} \\ &= q^{\frac{k}{2} \left( -\frac{2 \log n}{\log(1/q)} + k - 1 \right)}. \end{aligned}$$

Für

$$k := (2 + \epsilon) \frac{\log n}{\log(1/q)}$$

geht der Exponent dieses Ausdrucks mit  $n$  gegen unendlich, der Ausdruck selbst also gegen null. Die Farbklassen fast aller  $G \in \mathcal{G}(n, p)$  enthalten somit bei jeder Färbung alle weniger als  $k$  Ecken, d.h. es sind mehr als

$$\frac{n}{k} = \frac{\log(1/q)}{2 + \epsilon} \cdot \frac{n}{\log n}$$

Farben zur Färbung von  $G$  nötig. □

---

<sup>4</sup> Für Logiker: ist die Eigenschaft gegeben durch einen Satz erster Ordnung in der formalen Sprache der Graphentheorie

Nach einem bemerkenswerten Satz von Bollobás ist Proposition 9.3.4 scharf im folgenden Sinne: ersetzen wir  $\epsilon$  durch  $-\epsilon$ , so verwandelt sich die angegebene untere Schranke für die chromatische Zahl von  $G$  in eine obere Schranke!

Bei allen Ergebnissen dieses Abschnitts fällt auf, daß der Wert von  $p$  gar keine Rolle spielte: hat fast jeder Graph in  $\mathcal{G}(n, \frac{1}{2})$  eine der betrachteten Eigenschaften, so gilt dies auch für fast jeden Graphen in  $\mathcal{G}(n, 1/1000)$ . Bei der Untersuchung einer Grapheneigenschaft sind jedoch oft besonders die Graphen interessant, die die Eigenschaft nur “gerade” oder “gerade nicht” haben: in den Grenzbereichen treten andere Eigenschaften, zu denen die betrachtete Eigenschaft in Beziehung gesetzt werden soll, am ehesten auf (siehe den Beweis des Satzes von Erdős). Für viele Eigenschaften – und so erklärt sich das obige Phänomen – liegt die kritische Größenordnung von  $p$  für ihr Auftreten jedoch weit unterhalb einer jeden konstanten Funktion  $p = p(n)$ .

Läßt man andererseits  $p$  mit  $n$  variieren, so erschließt sich ein faszinierendes Bild. Während für Kantenwahrscheinlichkeiten  $p = p(n)$  wesentlich unterhalb von  $n^{-2}$  fast jeder Graph nur isolierte Ecken hat, nimmt die Struktur jeweils fast aller Graphen  $G \in \mathcal{G}(n, p)$  mit größerem  $p$  immer weiter zu: etwa ab  $p = \sqrt{n}n^{-2}$  hat fast jeder Graph die ersten Komponenten mit mehr als zwei Ecken, diese wachsen zu Bäumen, und ab  $p = n^{-1}$  tauchen die ersten Kreise auf. Die Kreise haben schon bald zahlreiche kreuzende Sehnen, d.h. die Graphen sind fast sicher nicht mehr plättbar. Gleichzeitig wächst eine ihrer Komponenten stärker an als alle anderen, bis sie diese etwa bei  $p = (\log n)n^{-1}$  verschlingt und die Graphen zusammenhängend werden. Kaum später, bei  $p = (1 + \epsilon)(\log n)n^{-1}$ , haben dann fast alle Graphen bereits einen Hamiltonkreis!

Diese *Entwicklung* der Zufallsgraphen vollzieht sich in Schüben: die genannten Wahrscheinlichkeiten sind Schwellenwerte, unterhalb derer fast kein Graph und oberhalb derer fast jeder Graph die betreffende Eigenschaft hat (z.B. einen Kreis enthält). Genauer nennen wir eine reelle Funktion  $t = t(n)$  mit  $t(n) \neq 0$  für alle  $n$  eine *Schwellenfunktion* für eine Grapheneigenschaft  $\mathcal{P}$ , wenn für jedes  $p = p(n)$  und  $G \in \mathcal{G}(n, p)$  gilt:

Schwellen-  
funktion

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P[G \in \mathcal{P}] = \begin{cases} 0 & \text{falls } p/t \rightarrow 0 \text{ für } n \rightarrow \infty \\ 1 & \text{falls } p/t \rightarrow \infty \text{ für } n \rightarrow \infty. \end{cases}$$

Gibt es zu  $\mathcal{P}$  eine Schwellenfunktion  $t$ , so ist natürlich auch jedes positive Vielfache  $ct$  von  $t$  eine Schwellenfunktion für  $\mathcal{P}$ ; Schwellenfunktionen sind also stets nur bis auf einen konstanten Faktor eindeutig bestimmt.

Welche Grapheneigenschaften besitzen eine Schwellenfunktion? Natürliche Kandidaten für Eigenschaften mit Schwellenfunktion sind sogenannte *monotone* Eigenschaften: solche, die unter der Hinzufügung von Kanten abgeschlossen sind, die also mit jedem Graphen auch all seine

Obergraphen auf der gleichen Eckenmenge enthalten. (Typische monotone Eigenschaften sind die Graphenklassen der Form  $\{G \mid G \supseteq H\}$  zu gegebenem  $H$ ; aber auch Zusammenhang etwa ist eine monotone Eigenschaft.) Und in der Tat haben Bollobás & Thomason (1987) bewiesen, daß – bis auf triviale Ausnahmen – alle monotonen Eigenschaften eine Schwellenfunktion haben! Im nächsten Abschnitt werden wir eine grundlegende Methode kennenlernen, wie man Schwellenfunktionen berechnen kann.

## 9.4 Schwellenfunktionen und zweite Momente

Betrachten wir einmal eine Grapheneigenschaft der Form

$$\mathcal{P} = \{G \mid X(G) \geq 1\},$$

wobei  $X \geq 0$  eine Zufallsgröße auf  $\mathcal{G}(n, p)$  ist. Viele Eigenschaften lassen sich auf natürliche Weise so formulieren:<sup>5</sup> daß  $G$  zusammenhängend ist, ist beispielsweise äquivalent zu  $X(G) \geq 1$  wenn  $X$  die Anzahl der Spannbäume in  $G$  bezeichnet.

Wie könnte man beweisen, daß  $\mathcal{P}$  eine Schwellenfunktion  $t$  besitzt? Jeder solche Beweis hat zwei Teile: daß für kleines  $p$  (verglichen mit  $t$ ) fast kein  $G \in \mathcal{G}(n, p)$  die Eigenschaft  $\mathcal{P}$  hat, und daß für großes  $p$  fast jedes  $G$  die Eigenschaft  $\mathcal{P}$  hat. Da  $X \geq 0$  ist, so können wir uns beim ersten Teil des Beweises auf die Markov-Ungleichung stützen und statt der Wahrscheinlichkeit  $P[X \geq 1]$  den Erwartungswert  $E(X)$  nach oben abschätzen: ist  $E(X)$  deutlich kleiner als 1, so kann  $X(G)$  nur für wenige  $G \in \mathcal{G}(n, p)$  mindestens 1 sein, im Falle von  $E(X) \rightarrow 0$  für  $(n \rightarrow \infty)$  für fast keins. Wie der Beweis von Lemma 9.1.5 exemplarisch zeigt, ist die Berechnung eines Erwartungswertes zudem meist einfacher als die Berechnung einer Wahrscheinlichkeit: ohne uns um Dinge wie die Unabhängigkeit oder Unvereinbarkeit von Ereignissen zu scheren, können wir die Erwartungswerte einzelner Zufallsgrößen – z.B. charakteristischer Zufallsgrößen – einfach addieren, um den Erwartungswert ihrer Summe zu berechnen.

Beim zweiten Teil des Beweises liegen die Dinge anders. Um zu zeigen, daß  $P[X \geq 1]$  groß ist, reicht es nicht, einfach  $E(X)$  nach unten abzuschätzen:  $E(X)$  kann auch dann groß werden, wenn  $X$  auf einem Teil von  $\mathcal{G}(n, p)$ , sagen wir der Hälfte, sehr groß ist und sonst null.<sup>6</sup> Um

<sup>5</sup> ... und alle auf unnatürliche Weise – wie?

<sup>6</sup> Für  $p$  zwischen  $n^{-1}$  und  $(\log n)n^{-1}$  beispielsweise hat fast jedes  $G \in \mathcal{G}(n, p)$  eine isolierte Ecke (und insbesondere keinen Spannbaum), aber die mittlere Anzahl von Spannbäumen in  $G$  geht für wachsendes  $n$  gegen unendlich! Siehe Übungen.

$P[X \geq 1] \rightarrow 1$  zu beweisen, müssen wir daher zeigen, daß dies nicht der Fall ist, daß also  $X$  nicht zu oft zu stark von seinem Mittelwert abweicht.

Genau hierzu dient das folgende elementare Hilfsmittel aus der Wahrscheinlichkeitstheorie. Wie üblich schreiben wir

$$\mu := E(X) \quad \mu$$

und definieren  $\sigma \geq 0$  durch

$$\sigma^2 := E((X - \mu)^2); \quad \sigma^2$$

die Größe  $\sigma^2$ , die *Varianz*<sup>7</sup> von  $X$ , ist also die mittlere quadratische Abweichung der Zufallsgröße  $X$  von ihrem Mittelwert. Wegen der Linearität des Erwartungswertes ist

$$\sigma^2 = E(X^2 - 2\mu X + \mu^2) = E(X^2) - \mu^2.$$

Beachte, daß  $\mu$  und  $\sigma$  sich jeweils auf eine Zufallsvariable eines konkreten Wahrscheinlichkeitsraums beziehen; in unserem Fall sind dies die Räume  $\mathcal{G}(n, p)$ , d.h.  $\mu$  und  $\sigma$  hängen von  $n$  ab.

Das folgende Lemma besagt nun, daß  $X$  jeweils nur für wenige  $G$  stark von seinem Mittelwert abweichen kann:

**Lemma 9.4.1.** (Tschebyschev-Ungleichung)

Für jedes reelle  $\lambda > 0$  gilt

$$P[|X - \mu| \geq \lambda] \leq \sigma^2/\lambda^2.$$

*Beweis.* Nach Lemma 9.1.4 und Definition von  $\sigma^2$  gilt (9.1.4)

$$P[|X - \mu| \geq \lambda] = P[(X - \mu)^2 \geq \lambda^2] \leq \sigma^2/\lambda^2. \quad \square$$

Bei einem Beweis, daß  $X(G) \geq 1$  gilt für fast alle  $G \in \mathcal{G}(n, p)$ , hilft die Tschebyschev-Ungleichung nun wie folgt:

**Lemma 9.4.2.** Gilt  $\mu > 0$  für alle hinreichend großen  $n$ , und  $\sigma^2/\mu^2 \rightarrow 0$  für  $n \rightarrow \infty$ , so gilt  $X(G) > 0$  für fast alle  $G \in \mathcal{G}(n, p)$ .

*Beweis.* Für Graphen  $G$  mit  $X(G) = 0$  ist  $|X(G) - \mu| = \mu$ . Mit  $\lambda := \mu$  folgt daher aus Lemma 9.4.1

$$P[X = 0] \leq P[|X - \mu| \geq \mu] \leq \sigma^2/\mu^2 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Wegen  $X \geq 0$  bedeutet dies, daß  $X(G) > 0$  gilt für fast alle  $G \in \mathcal{G}(n, p)$ . □

<sup>7</sup> auch: *zentrales Moment zweiter Ordnung*, oder kurz *zweites Moment*

Als Hauptergebnis dieses Abschnitts beweisen wir jetzt einen Satz, aus dem wir Schwellenfunktionen für eine Reihe natürlicher Grapheneigenschaften werden ablesen können. Zu einem gegebenen Graphen  $H$  bezeichnen wir mit  $\mathcal{P}_H$  die Grapheneigenschaft, einen zu  $H$  isomorphen Teilgraphen zu enthalten. Wir nennen  $H$  *ausgewogen*, wenn  $\varepsilon(H') \leq \varepsilon(H)$  gilt für alle Teilgraphen  $H'$  von  $H$ .

**Satz 9.4.3.** (Erdős & Rényi 1960)

Ist  $H$  ein ausgewogener Graph mit  $k$  Ecken und  $\ell \geq 1$  Kanten, so ist  $t(n) := n^{-k/\ell}$  eine Schwellenfunktion für  $\mathcal{P}_H$ .

*Beweis.* Wir bezeichnen mit  $X(G)$  die Anzahl der zu  $H$  isomorphen Teilgraphen von  $G \in \mathcal{G}(n, p)$ . Zu gegebenem  $n \in \mathbb{N}$  sei  $\mathcal{H}$  die Menge aller zu  $H$  isomorphen Graphen auf Teilmengen von  $\{0, \dots, n-1\}$ , der Eckenmenge der Graphen aus  $\mathcal{G}(n, p)$ :

$$\mathcal{H} := \{H' \mid H' \simeq H, V(H') \subseteq \{0, \dots, n-1\}\}.$$

Für  $H' \in \mathcal{H}$  und  $G \in \mathcal{G}(n, p)$  bedeute der Ausdruck " $H' \subseteq G$ " im folgenden, daß  $H'$  selbst – nicht nur eine isomorphe Kopie von  $H'$  – Teilgraph von  $G$  ist.

Die Anzahl der zu  $H$  isomorphen Graphen auf einer festen Menge von  $k$  Ecken bezeichnen wir mit  $h$ ; wie man leicht zeigt (Übung), gilt  $h \leq k!$ . Da es  $\binom{n}{k}$  mögliche Eckenmengen für die Graphen aus  $\mathcal{H}$  gibt, gilt somit

$$|\mathcal{H}| = \binom{n}{k} h \leq \binom{n}{k} k! \leq n^k. \quad (1)$$

Zu gegebenem  $p = p(n)$  sei  $\gamma := p/t$ ; damit ist

$$p = \gamma n^{-k/\ell}. \quad (2)$$

Wir haben zu zeigen, daß fast kein  $G \in \mathcal{G}(n, p)$  in  $\mathcal{P}_H$  liegt falls  $\gamma \rightarrow 0$  für  $n \rightarrow \infty$ , und daß fast alle  $G \in \mathcal{G}(n, p)$  in  $\mathcal{P}_H$  liegen falls  $\gamma \rightarrow \infty$  für  $n \rightarrow \infty$ .

Zum ersten Teil des Beweises schätzen wir  $E(X)$ , die mittlere Anzahl der zu  $H$  isomorphen Teilgraphen von  $G$ , nach oben ab. Zunächst erhalten wir wie im Beweis von Lemma 9.1.5 durch doppeltes Zählen

$$E(X) = \sum_{H' \in \mathcal{H}} P[H' \subseteq G]. \quad (3)$$

Wegen  $\|H\| = \ell$  gilt für jedes feste  $H' \in \mathcal{H}$

$$P[H' \subseteq G] = p^\ell. \quad (4)$$

Zusammen erhalten wir

$$E(X) \underset{(3,4)}{=} |\mathcal{H}| p^\ell \underset{(1,2)}{\leq} n^k (\gamma n^{-k/\ell})^\ell = \gamma^\ell. \quad (5)$$

Mit  $\gamma$  geht also auch  $E(X)$  für wachsendes  $n$  gegen null. Somit gilt im Falle  $\gamma \rightarrow 0$  nach der Markov-Ungleichung (Lemma 9.1.4)

$$P[G \in \mathcal{P}_H] = P[X \geq 1] \leq E(X) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0,$$

d.h. fast kein  $G \in \mathcal{G}(n, p)$  liegt in  $\mathcal{P}_H$ .

Dem zweiten Teil des Beweises schicken wir eine kurze Rechnung vorweg: für  $n \geq k$  gilt

$$\begin{aligned} \binom{n}{k} n^{-k} &= \frac{1}{k!} \left( \frac{n}{n} \cdots \frac{n-k+1}{n} \right) \\ &\geq \frac{1}{k!} \left( \frac{n-k+1}{n} \right)^k \\ &\geq \frac{1}{k!} \left( 1 - \frac{k-1}{k} \right)^k, \end{aligned} \quad (6)$$

d.h.  $n^k$  übertrifft  $\binom{n}{k}$  um nicht mehr als einen von  $n$  unabhängigen Faktor.

Unser Ziel ist es, Lemma 9.4.2 anzuwenden und dazu  $\sigma^2/\mu^2 = (E(X^2) - \mu^2)/\mu^2$  abzuschätzen. Zunächst gilt, ganz analog zu (3),

$$E(X^2) = \sum_{(H', H'') \in \mathcal{H}^2} P[H' \cup H'' \subseteq G]. \quad (7)$$

Berechnen wir also diese Wahrscheinlichkeiten  $P[H' \cup H'' \subseteq G]$ . Für beliebige  $H', H'' \in \mathcal{H}$  gilt

$$P[H' \cup H'' \subseteq G] = p^{2\ell - \|H' \cap H''\|}.$$

Da  $H$  nach Annahme ausgewogen ist, gilt  $\varepsilon(H' \cap H'') \leq \varepsilon(H) = \ell/k$ . Für  $|H' \cap H''| =: i$  folgt  $\|H' \cap H''\| \leq i\ell/k$ , und somit wegen  $p \leq 1$

$$P[H' \cup H'' \subseteq G] \leq p^{2\ell - i\ell/k}. \quad (8)$$

Die einzelnen Summanden aus (7) haben wir damit abgeschätzt – was aber folgt daraus für die Summe insgesamt? Da in (8) die Größe  $i = |H' \cap H''|$  eingegangen ist, zerlegen wir die Menge  $\mathcal{H}^2$ , über die sich die Summe aus (7) erstreckt, in die Teilmengen

$$\mathcal{H}_i^2 := \{ (H', H'') \in \mathcal{H}^2 : |H' \cap H''| = i \}, \quad i = 0, \dots, k, \quad \mathcal{H}_i^2$$



und berechnen für jedes  $\mathcal{H}_i^2$  die entsprechende Summe

$$A_i := \sum_i P[H' \cup H'' \subseteq G]$$

einzel. (Hier, wie unten, steht  $\sum_i$  also für Summen über alle Paare  $(H', H'') \in \mathcal{H}_i^2$ .)

Für  $i = 0$  sind  $H'$  und  $H''$  disjunkt, die Ereignisse  $H' \subseteq G$  und  $H'' \subseteq G$  unabhängig. Es gilt somit

$$\begin{aligned} A_0 &= \sum_0 P[H' \cup H'' \subseteq G] \\ &= \sum_0 P[H' \subseteq G] \cdot P[H'' \subseteq G] \\ &\leq \sum_{(H', H'') \in \mathcal{H}^2} P[H' \subseteq G] \cdot P[H'' \subseteq G] \\ &= \left( \sum_{H' \in \mathcal{H}} P[H' \subseteq G] \right) \cdot \left( \sum_{H'' \in \mathcal{H}} P[H'' \subseteq G] \right) \\ &\stackrel{(3)}{=} \mu^2. \end{aligned} \tag{9}$$

Wir wollen nun  $A_i$  für  $i \geq 1$  abschätzen. Schreiben wir zur Abkürzung  $\sum'$  statt  $\sum_{H' \in \mathcal{H}}$  und  $\sum''$  statt  $\sum_{H'' \in \mathcal{H}}$ , so ist  $\sum_i$  nichts anderes als die geschachtelte Summe  $\sum' \sum''_{|H' \cap H''| = i}$ . Zu gegebenem  $H'$  (für das erste Summenzeichen  $\sum'$ ) erstreckt sich das zweite Summenzeichen dabei über

$$\binom{k}{i} \binom{n-k}{k-i} h$$

Summanden: die Anzahl der Graphen  $H'' \in \mathcal{H}$  mit  $|H'' \cap H'| = i$ . Damit gilt für alle  $i \geq 1$  und geeignete von  $n$  unabhängige Konstanten  $c_1$  und  $c_2$ :

$$\begin{aligned} A_i &= \sum_i P[H' \cup H'' \subseteq G] \\ &\stackrel{(8)}{\leq} \sum' \binom{k}{i} \binom{n-k}{k-i} h p^{2\ell} p^{-i\ell/k} \\ &\stackrel{(2)}{=} |\mathcal{H}| \binom{k}{i} \binom{n-k}{k-i} h p^{2\ell} (\gamma n^{-k/\ell})^{-i\ell/k} \\ &\leq |\mathcal{H}| p^\ell c_1 n^{k-i} h p^\ell \gamma^{-i\ell/k} n^i \\ &\stackrel{(5)}{=} \mu c_1 n^k h p^\ell \gamma^{-i\ell/k} \\ &\stackrel{(6)}{\leq} \mu c_2 \binom{n}{k} h p^\ell \gamma^{-i\ell/k} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \mu^2 c_2 \gamma^{-i\ell/k} \\ &\stackrel{(1,5)}{\leq} \mu^2 c_2 \gamma^{-\ell/k}, \end{aligned}$$

falls  $\gamma \geq 1$ . Mit  $c_3 := kc_2$  ergibt dies nach Definition der  $A_i$

$$E(X^2)/\mu^2 \stackrel{(7)}{=} \left( A_0/\mu^2 + \sum_{i=1}^k A_i/\mu^2 \right) \stackrel{(9)}{\leq} 1 + c_3 \gamma^{-\ell/k}$$

und somit

$$\frac{\sigma^2}{\mu^2} = \frac{E(X^2) - \mu^2}{\mu^2} \leq c_3 \gamma^{-\ell/k}.$$

Für  $\gamma \rightarrow \infty$  geht dieser Ausdruck gegen null. Mit Lemma 9.4.2 folgt  $X(G) > 0$  für fast alle  $G \in \mathcal{G}(n, p)$ , d.h. fast alle  $G \in \mathcal{G}(n, p)$  enthalten einen zu  $H$  isomorphen Teilgraphen und liegen damit in  $\mathcal{P}_H$ .  $\square$

Aus Satz 9.4.3 können wir Schwellenfunktionen für eine Reihe natürlicher Grapheneigenschaften direkt ablesen.

**Korollar 9.4.4.** *Ist  $k \geq 3$  und  $\mathcal{P}$  die Eigenschaft, einen Kreis der Länge  $k$  als Teilgraph zu enthalten, so ist  $t(n) = n^{-1}$  eine Schwellenfunktion für  $\mathcal{P}$ .*  $\square$

Interessant an Korollar 9.4.4 ist, daß die Schwellenfunktion nicht von der Länge des Kreises abhängt: in der Entwicklung der Zufallsgraphen treten Kreise aller Längen zum gleichen Zeitpunkt auf!

Ein ähnliches Phänomen haben wir für Bäume. Hier hängt die Schwellenfunktion zwar von der Größe des betrachteten Baumes ab, nicht aber von seiner Gestalt:

**Korollar 9.4.5.** *Ist  $T$  ein Baum der Ordnung  $k \geq 2$  und  $\mathcal{P}$  die Eigenschaft, einen zu  $T$  isomorphen Teilgraphen zu enthalten, so ist  $t(n) = n^{-k/(k-1)}$  eine Schwellenfunktion für  $\mathcal{P}$ .*  $\square$

Schließlich betrachten wir noch das Auftreten vollständiger Teilgraphen gegebener Ordnung.

**Korollar 9.4.6.** *Ist  $k \geq 2$  und  $\mathcal{P}$  die Eigenschaft, einen  $K^k$  als Teilgraph zu enthalten, so ist  $t(n) = n^{-2/(k-1)}$  eine Schwellenfunktion für  $\mathcal{P}$ .*

*Beweis.* Wegen  $\varepsilon(K^i) = \frac{1}{2}(i-1) < \frac{1}{2}(k-1) = \varepsilon(K^k)$  für  $i < k$  ist  $K^k$  ausgewogen. Für  $\ell := \|K^k\| = \frac{1}{2}k(k-1)$  gilt  $n^{-k/\ell} = n^{-2/(k-1)}$ .  $\square$

## Übungen

1. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß ein Zufallsgraph aus  $\mathcal{G}(n, p)$  genau  $m$  Kanten hat, für gegebenes  $m$  zwischen 0 und  $\binom{n}{2}$ ?
2. Wie groß ist die mittlere Kantenzahl der Graphen  $G \in \mathcal{G}(n, p)$ ?
3. Wie groß ist für  $r \in \mathbb{N}$  die mittlere Anzahl von  $K^r$ -Untergraphen in  $G \in \mathcal{G}(n, p)$ ?
4. Für welche Graphen  $H$  existiert eine Konstante  $c = c(H)$  mit der Eigenschaft, daß jeder Graph  $G$  mit Durchschnittsgrad  $d(G) \geq c$  ein Exemplar von  $H$  als Teilgraphen enthält?
5. Daß “fast alle” Elemente eines Maßraumes, und insbesondere eines Wahrscheinlichkeitsraumes, eine bestimmte Eigenschaft haben, ist üblicherweise eine Sprechweise dafür, daß die Menge der Elemente ohne diese Eigenschaft das Maß null hat. Warum definiert man nicht auf der Menge aller endlichen Graphen (etwa mit Ecken aus  $\mathbb{N}$ ) ein geeignetes Wahrscheinlichkeitsmaß, so daß der in Abschnitt 9.3 definierte Begriff von “fast alle” mit dieser Sprechweise zusammenfällt?
6. Es seien  $\mathcal{P}_1$  und  $\mathcal{P}_2$  zwei Grapheneigenschaften, so daß fast alle Graphen in  $\mathcal{G}(n, p)$  die Eigenschaft  $\mathcal{P}_1$  haben und fast alle Graphen in  $\mathcal{G}(n, p)$  die Eigenschaft  $\mathcal{P}_2$  haben. Zeige, daß fast alle Graphen in  $\mathcal{G}(n, p)$  die Eigenschaft  $\mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2$  haben.
7. Zeige, daß für festes  $p \notin \{0, 1\}$  fast jeder Graph in  $\mathcal{G}(n, p)$  den Durchmesser 2 hat.
8. Zeige, daß für festes  $p \notin \{0, 1\}$  fast kein Graph in  $\mathcal{G}(n, p)$  einen trennenden vollständigen Untergraphen hat.
9. Leite Proposition 9.3.1 aus Lemma 9.3.2 her.
10. <sup>+</sup> (i) Zeige, daß für jedes  $p \notin \{0, 1\}$  ein abzählbar unendlicher Graph  $G \in \mathcal{G}(\mathbb{N}_0, p)$  mit Wahrscheinlichkeit 1 für alle  $i, j \in \mathbb{N}$  die Eigenschaft  $\mathcal{P}_{i,j}$  hat.  
 (ii) Zeige, daß je zwei Graphen, die beide für alle  $i, j \in \mathbb{N}$  die Eigenschaft  $\mathcal{P}_{i,j}$  haben, isomorph sind.  
 (Bis auf Isomorphie gibt es also nur einen abzählbar unendlichen Zufallsgraphen.)
11. Es seien  $\epsilon > 0$  und  $p = p(n) > 0$  beliebig, und  $r = r(n, p) \geq (1 + \epsilon)(2 \ln n)/p$  ganzzahlig. Zeige, daß in  $\mathcal{G}(n, p)$  fast kein Graph  $r$ -abhängige Ecken enthält.
12. Zeige, daß es zu jedem Graphen  $H$  eine Funktion  $p = p(n)$  mit  $\lim_{n \rightarrow \infty} p(n) = 0$  gibt, für die fast jeder Graph  $G \in \mathcal{G}(n, p)$  ein Exemplar von  $H$  als Untergraphen enthält.

- 13.<sup>+</sup> (i) Zeige, daß für jedes  $p$  der Form  $p = (1 - \epsilon)(\ln n)n^{-1}$  mit  $\epsilon > 0$  fast jeder Graph  $G \in \mathcal{G}(n, p)$  eine isolierte Ecke hat.  
 (ii) Finde eine Wahrscheinlichkeit  $p$ , für die fast jedes  $G \in \mathcal{G}(n, p)$  unzusammenhängend ist aber die mittlere Anzahl von Spannbäumen für  $n \rightarrow \infty$  gegen unendlich geht.  
 (Tip für (ii): Es gibt einen Satz von Cayley, nach dem  $K^n$  genau  $n^{n-2}$  verschiedene Spannbäume hat.)
- 14.<sup>+</sup> Zu gegebenem  $r \in \mathbb{N}$  finde ein  $c > 0$ , so daß für  $p = cn^{-1}$  fast jedes  $G \in \mathcal{G}(n, p)$  einen  $K^r$  als Minor enthält. Können wir  $c$  unabhängig von  $r$  wählen?
15. Finde eine nicht monotone Grapheneigenschaft, die eine Schwellenfunktion besitzt, und eine monotone Eigenschaft, die keine Schwellenfunktion besitzt.
16. Es sei  $H$  ein Graph auf  $k$  Ecken, und  $h$  bezeichne die Anzahl der zu  $H$  isomorphen Graphen auf einer festen Menge von  $k$  Elementen. Zeige, daß stets  $h \leq k!$  gilt. Für welche Graphen  $H$  gilt hier Gleichheit?
- 17.<sup>-</sup> Bestimme zu jedem  $k \geq 1$  die Schwellenfunktion für  $\{G \mid \Delta(G) \geq k\}$ .
18. Hat die Eigenschaft, einen  $d$ -dimensionalen Würfel zu enthalten ( $d \in \mathbb{N}$  fest), eine Schwellenfunktion? Wenn ja, welche; wenn nein, warum nicht?
19. Zeige, daß  $t(n) = n^{-1}$  auch eine Schwellenfunktion ist für die Eigenschaft, irgendeinen Kreis zu enthalten.
20. Hat die Eigenschaft, irgendeinen Baum der Ordnung  $k$  zu enthalten (für festes  $k \geq 2$ ) eine Schwellenfunktion? Wenn ja, welche?
- 21.<sup>+</sup> Es sei  $H$  ein Graph und  $\mathcal{P}$  die Eigenschaft, ein Exemplar von  $H$  als Untergraphen zu enthalten. Ist  $H$  vollständig, so hat  $\mathcal{P}$  nach Korollar 9.4.6 eine Schwellenfunktion. Zeige, daß  $\mathcal{P}$  für nicht vollständiges  $H$  keine Schwellenfunktion hat.

## Notizen

Das Standardwerk über Zufallsgraphen ist B. Bollobás, *Random Graphs*, Academic Press 1985; dort finden sich auch alle hier nicht gegebenen Quellenverweise. E.M. Palmer, *Graphical Evolution*, Wiley 1985, ist vom Stoff her Teilen aus *Random Graphs* ähnlich, aber elementarer geschrieben. B. Bollobás, *Graph Theory*, Springer-Verlag 1979, gibt eine kompaktere Einführung, die jedoch auch inhaltlich über die unsere hinausgeht. Eine einführende Übersicht zur Theorie der Zufallsgraphen gibt M. Karoński im *Handbook of Combinatorics* (R.L. Graham, M. Grötschel & L. Lovász, Hrg.), North-Holland 1995. Eine weitergreifende Schilderung der probabilistischen Methode anhand ausgewählter Probleme aus der diskreten Mathematik geben N. Alon & J.H. Spencer, *The Probabilistic Method*, Wiley 1992. Der besondere Reiz dieses Buches liegt in seinen vielfältigen Beispielen dafür, wie mit einem probabilistischen Ansatz Aussagen bewiesen werden können, deren Formulierung

keinerlei Bezug zu Wahrscheinlichkeit vermuten läßt. Ein weiteres solches Beispiel ist Alons Beweis von Satz 4.4.1; siehe die Quellenangabe in Kapitel 4.

Die probabilistische Methode hatte ihre ersten Anfänge bereits in den 40er Jahren; eines ihrer frühesten Ergebnisse war Erdős's untere Schranke für Ramseyzahlen (Satz 9.1.3).

Unser Lemma über die Eigenschaften  $\mathcal{P}_{i,j}$  ist der genannten Einführung von Bollobás entnommen. Eine gut lesbare Darstellung des angedeuteten allgemeinen Resultats, daß für festes  $p$  jeder Satz erster Ordnung über Graphen entweder für fast alle oder für fast kein  $G \in \mathcal{G}(n, p)$  wahr ist, gibt P. Winkler, Random structures and zero-one laws, in (N.W. Sauer et al., Hrsg.): *Finite and Infinite Combinatorics in Sets and Logic* (NATO ASI Series C 411), Kluwer 1993.

Die wegweisende Arbeit zur Entwicklung von Zufallsgraphen ist P. Erdős & A. Rényi, On the evolution of random graphs, *Publ. Math. Inst. Hungar. Acad. Sci.* **5** (1960), 17–61. Dort ist auch unser Satz 9.4.3 bewiesen. Dieser wurde 1981 von Bollobás auf nicht ausgewogene Teilgraphen  $H$  verallgemeinert. Eine ganz einfache Anpassung des ursprünglichen Beweises von Erdős und Rényi an den allgemeinen Fall fanden 1986 Ruciński & Vince; ihr Beweis ist dargestellt Karońskis *Handbook*-Kapitel, sowie in dem anregend geschriebenen historischen Überblick zur Entwicklung von Zufallsgraphen von M. Karoński & A. Ruciński, The origins of the theory of random graphs, in: (R.L. Graham & J. Nešetřil, Hrsg.) *The Mathematics of Paul Erdős*, Vol. 1, Springer 1996.

Unserer Betrachtung von Schwellenphänomenen haben wir als auslösenden Parameter das Wachstum der Funktion  $p = p(n)$  zugrundegelegt. Eine etwas genauere Erfassung dieser Phänomene ermöglicht die Betrachtung sogenannter *Graphenprozesse*: beginnend mit einem  $\overline{K}^n$  wählt man schrittweise jeweils zufällig eine Kante hinzu, bis der Graph alle  $\binom{n}{2}$  Kanten hat. Jeder Graphenprozeß ist also eine Markovkette, bei der man den wahrscheinlichen Zeitpunkt des Auftretens eines gegebenen Phänomens studieren kann. Einen Überblick hierzu gibt T. Łuczak, The phase transition in a random graph, in (D. Miklos, V.T. Sós und T. Szónyi, Hrsg.) *Paul Erdős is 80*, Proc. Colloq. Math. Soc. János Bolyai (1994).

Daß im wesentlichen alle monotonen Grapheneigenschaften eine Schwellenfunktion haben, ist ein Resultat aus B. Bollobás & A.G. Thomason, Threshold functions, *Combinatorica* **7** (1987), 35–38.

Ziel dieses letzten Kapitels ist die Hinführung auf einen einzigen Satz – einen Satz, der selbst die tiefsten anderen Ergebnisse der Graphentheorie wie ein Riese überragt: *in jeder unendlichen Menge von Graphen gibt es zwei, von denen einer ein Minor des anderen ist.* Dieser äußerlich so unscheinbare *Minorensatz* hat ganz fundamentale Auswirkungen innerhalb wie außerhalb der Graphentheorie; sein Originalbeweis von Neil Robertson und Paul Seymour umfaßt mehr als 500 Seiten.

Nun müssen wir bescheiden sein: vom Beweis des Minorensatzes wird dieses Kapitel nur eine Ahnung vermitteln können. Wie nicht selten bei wirklich fundamentalen Sätzen haben jedoch auch hier nicht nur das Ergebnis selbst, sondern ebenso die zu seinem Beweis entwickelten Methoden die Landschaft der Graphentheorie verändert. Dies gilt besonders für die Technik der *Baumzerlegungen* von Graphen, in die die Abschnitte 10.3 und 10.4 einführen. Zuvor behandeln wir den für den Minorensatz zentralen Begriff der *Wohlquasiordnung* und beweisen den Minorensatz für Bäume. Im letzten Abschnitt geben wir einen Überblick über den Beweis des allgemeinen Minorensatzes und einige seiner Konsequenzen.

## 10.1 Wohlquasiordnung

Wohlquasi-  
ordnung

Eine reflexive und transitive Relation nennt man eine *Quasiordnung*. Eine Quasiordnung  $\leq$  auf einer Menge  $X$  ist eine *Wohlquasiordnung* (und die Elemente von  $X$  sind durch  $\leq$  *wohlquasi geordnet*), wenn für jede unendliche Folge  $x_0, x_1, \dots$  in  $X$  Indizes  $i < j$  existieren mit  $x_i \leq x_j$ .

gutes Paar  
gute Folge

Ein solches Paar  $(x_i, x_j)$  nennt man ein *gutes Paar*, und eine unendliche Folge, die ein gutes Paar enthält, ist eine *gute Folge*. (Die Quasiordnung  $\leq$  auf  $X$  ist also genau dann eine Wohlquasiordnung, wenn jede unendliche Folge in  $X$  bezüglich  $\leq$  gut ist.) Eine unendliche Folge, die nicht gut ist, heißt *schlecht*.

schlechte  
Folge

**Proposition 10.1.1.** *Eine Quasiordnung  $\leq$  auf einer Menge  $X$  ist genau dann eine Wohlquasiordnung, wenn es in  $X$  bezüglich  $\leq$  weder eine unendliche Antikette noch eine unendliche absteigende Folge  $x_0 > x_1 > \dots$  gibt.*

(7.1.2)

*Beweis.* Die Vorwärtsrichtung ist trivial, da jede absteigende Folge und jede Folge paarweise unvergleichbarer Elemente schlecht ist. Zur Rückrichtung sei  $x_0, x_1, \dots$  eine beliebige unendliche Folge in  $X$ . Es sei  $K$  der vollständige Graph auf  $\mathbb{N} = \{0, 1, \dots\}$ . Wir färben die Kanten  $ij$  ( $i < j$ ) von  $K$  mit drei Farben: grün wenn  $x_i \leq x_j$  gilt, rot wenn  $x_i > x_j$  gilt, und gelb wenn  $x_i$  und  $x_j$  unvergleichbar sind. Nach dem Satz von Ramsey (7.1.2) enthält  $K$  einen unendlichen Untergraphen, dessen Kanten alle die gleiche Farbe tragen. Gibt es in  $X$  weder eine unendliche Antikette noch eine unendliche absteigende Folge, so kann diese Farbe weder gelb noch rot sein. Die Farbe ist also grün, und somit enthält  $x_0, x_1, \dots$  eine unendliche Teilfolge, in der jedes Paar gut ist. Insbesondere ist die Folge  $x_0, x_1, \dots$  selbst gut.  $\square$

Beim Beweis der Rückrichtung von Proposition 10.1.1 haben wir mehr bewiesen als nötig: es hätte gereicht, ein einziges gutes Paar in  $x_0, x_1, \dots$  zu finden, und wir haben eine unendliche aufsteigende Teilfolge gefunden. Entsprechend haben wir das folgende Korollar:

**Korollar 10.1.2.** *Ist  $X$  wohlquasi geordnet, so enthält jede unendliche Folge in  $X$  eine unendliche aufsteigende Teilfolge.*  $\square$

Das folgende Lemma und die Idee seines Beweises sind grundlegend in der Theorie der Wohlquasiordnungen. Es sei  $X$  eine Menge und  $\leq$  eine Quasiordnung auf  $X$ . Für endliche Teilmengen  $A, B \subseteq X$  setzen wir  $A \leq B$ , wenn es eine injektive Abbildung  $f: A \rightarrow B$  gibt mit  $a \leq f(a)$  für alle  $a \in A$ . Offenbar bezeichnet  $\leq$  damit eine Quasiordnung auch auf der Menge  $[X]^{<\omega}$  aller endlichen Teilmengen von  $X$ .

$[X]^{<\omega}$

[10.2.1]

**Lemma 10.1.3.** *Mit  $X$  ist auch  $[X]^{<\omega}$  durch  $\leq$  wohlquasi geordnet.*

*Beweis.* Angenommen,  $\leq$  sei eine Wohlquasiordnung auf  $X$  aber nicht auf  $[X]^{<\omega}$ . Wir konstruieren zunächst eine spezielle schlechte Folge  $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$  in  $[X]^{<\omega}$ . Dazu nehmen wir induktiv an, daß für ein  $n \in \mathbb{N}$  bereits zu jedem  $i < n$  ein  $A_i$  definiert sei, und daß eine schlechte Folge in  $[X]^{<\omega}$  existiert, die das Tupel  $(A_0, \dots, A_{n-1})$  zum Anfangsstück hat. (Da nach Annahme irgendeine schlechte Folge in  $[X]^{<\omega}$  existiert und das leere Tupel triviales Anfangsstück dieser Folge ist, ist dies für  $n = 0$  sicher wahr.) Wir wählen  $A_n \in [X]^{<\omega}$  von minimaler Mächtigkeit mit der Eigenschaft, daß auch mit  $A_0, \dots, A_n$  eine schlechte Folge in  $[X]^{<\omega}$  beginnt.

Offenbar ist  $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$  in der Tat eine schlechte Folge in  $[X]^{<\omega}$ , und insbesondere ist  $A_n \neq \emptyset$  für alle  $n$ . Für jedes  $n$  wählen wir ein  $a_n \in A_n$  und setzen  $B_n := A_n \setminus \{a_n\}$ .

Nach Korollar 10.1.2 enthält die Folge  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine unendliche aufsteigende Teilfolge  $(a_{n_i})_{i \in \mathbb{N}}$ . Nach der Minimalwahl von  $A_{n_0}$  ist die Folge

$$A_0, \dots, A_{n_0-1}, B_{n_0}, B_{n_1}, B_{n_2}, \dots$$

gut. Für jedes gute Paar der Form  $(A_i, B_j)$  in dieser Folge ist aber  $(A_i, A_j)$  ein gutes Paar von  $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , mit Widerspruch. Ist andererseits  $(B_i, B_j)$  ein gutes Paar, so ist  $a_i \leq a_j$  (wegen  $i < j$ ), d.h. wiederum ist auch  $(A_i, A_j)$  gut (mit Widerspruch): wir brauchen nur zusätzlich  $a_i$  auf  $a_j$  abzubilden.  $\square$

## 10.2 Bäume: der Satz von Kruskal

Der Hauptsatz dieses Kapitels besagt, daß die endlichen Graphen durch die Minorenrelation  $\preceq$  wohlquasi geordnet sind, daß es also zu jeder unendlichen Folge  $G_0, G_1, \dots$  endlicher Graphen zwei Indizes  $i < j$  gibt mit  $G_i \preceq G_j$ . Da jede (echt) absteigende Minorenfolge endlicher Graphen endlich ist, ist dies nach Proposition 10.1.1 äquivalent zu der Aussage, daß es unter unendlich vielen endlichen Graphen stets zwei gibt, von denen einer ein Minor des anderen ist.

In diesem Abschnitt beweisen wir dies zunächst für Bäume, sogar in der stärkeren Fassung für topologische Minoren:

**Satz 10.2.1.** (Kruskal 1960)

*Die endlichen Bäume sind durch die topologische Minorenrelation wohlquasi geordnet.*

Um im Beweis von Satz 10.2.1 die besondere Struktur der Bäume besser ausnutzen zu können, werden wir dabei eine speziell auf Bäume zugeschnittene Verschärfung der topologischen Minorenrelation zugrundelegen. Diese führen wir jetzt ein.



Sind  $T$  und  $T'$  zwei Bäume mit Wurzeln  $r$  und  $r'$ , so schreiben wir  $T \leq T'$ , wenn es einen Isomorphismus  $\varphi$  von einer Unterteilung von  $T$  auf einen Teilbaum  $T''$  von  $T'$  gibt, der die mit  $T$  und  $r$  assoziierte Baumordnung auf  $V(T)$  erhält. (Für  $x < y$  in  $T$  gilt also stets  $\varphi(x) < \varphi(y)$  in  $T'$ ; siehe Abbildung 10.2.1.) Man überlegt sich leicht, daß dies eine Quasiordnung auf der Klasse aller Wurzelbäume ist.

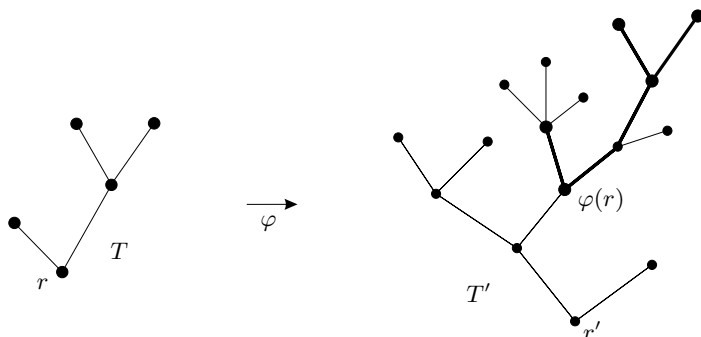


Abb. 10.2.1. Eine Einbettung von  $T$  in  $T'$ , die  $T \leq T'$  zeigt

(10.1.3) **Beweis von Satz 10.2.1.** Da aus  $T \leq T'$  folgt, daß  $T$  ein topologischer Minor von  $T'$  ist, reicht es zu zeigen, daß die Wurzelbäume durch  $\leq$  wohlquasi geordnet sind: jede unendliche Folge von Bäumen enthält dann bei beliebiger Wahl von Wurzeln ein gutes Paar bezüglich  $\leq$ , und der erste Baum dieses Paares ist ein topologischer Minor des zweiten.

Wir gehen ganz ähnlich vor wie im Beweis von Lemma 10.1.3. Wir nehmen an, die Wurzelbäume seien nicht wohlquasi geordnet, und konstruieren zunächst induktiv eine "minimale" schlechte Folge von Wurzelbäumen. Zu gegebenem  $n \in \mathbb{N}$  nehmen wir dazu an, wir hätten bereits Wurzelbäume  $T_0, \dots, T_{n-1}$  so gewählt, daß es eine schlechte Folge von Wurzelbäumen gibt, die mit  $T_0, \dots, T_{n-1}$  beginnt. Wir wählen dann als  $T_n$  einen Wurzelbaum kleinster Eckenzahl, so daß auch mit  $T_0, \dots, T_n$  eine schlechte Folge von Wurzelbäumen beginnt. Die Wurzeln der Bäume  $T_n$  bezeichnen wir im folgenden mit  $r_n$ .

Die oben konstruierte Folge  $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$  ist offenbar schlecht. Für jedes  $n$  sei  $A_n$  die Menge der Komponenten von  $T_n - r_n$ ; dies ist eine Menge von Bäumen, und wir wählen die Nachbarn von  $r_n$  als deren Wurzeln. Die Baumordnung dieser Wurzelbäume stimmt dann jeweils mit der von  $T_n$  induzierten Ordnung überein. Wir zeigen jetzt, daß die Menge  $A := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$  all dieser Wurzelbäume wohlquasi geordnet ist.

Es sei  $(T^k)_{k \in \mathbb{N}}$  eine beliebige Folge von Wurzelbäumen aus  $A$ . Zu jedem  $k \in \mathbb{N}$  wählen wir ein  $n = n(k)$  mit  $T^k \in A_n$ . Betrachten wir nun ein  $k$  mit kleinstem  $n(k)$ , so ist die Folge

$$T_0, \dots, T_{n(k)-1}, T^k, T^{k+1}, \dots$$

gut: wäre sie schlecht, so widerspräche dies wegen  $T^k \subsetneq T_{n(k)}$  der Minimalwahl von  $T_{n(k)}$ . Es sei  $(T, T')$  ein gutes Paar dieser Folge. Da die Folge  $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$  schlecht ist, kann  $T$  nicht unter den ersten  $n(k)$  Gliedern  $T_0, \dots, T_{n(k)-1}$  unserer Folge sein:  $T'$  wäre dann ein  $T^i$  mit  $i \geq k$ , also

$$T \leq T' = T^i \leq T_{n(i)};$$

da  $n(k) \leq n(i)$  gilt nach Wahl von  $k$ , wäre damit  $(T, T_{n(i)})$  ein gutes Paar in der schlechten Folge  $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ . Somit ist  $(T, T')$  auch ein gutes Paar der Folge  $(T^k)_{k \in \mathbb{N}}$ , und  $A$  ist als wohlquasi geordnet erwiesen.

Mit  $A$  ist nach Lemma 10.1.3 auch die Menge  $\mathcal{A} := \{A_n \mid n \in \mathbb{N}\}$  wohlquasi geordnet; beachte, daß isomorphe Elemente von  $A_n$  nicht identifiziert werden. Insbesondere ist die Folge  $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$  gut; es sei  $(A_i, A_j)$  ein gutes Paar. Nach Definition der Ordnung  $\leq$  auf  $\mathcal{A}$  gibt es eine injektive Abbildung  $f: A_i \rightarrow A_j$  mit  $T \leq f(T)$  für alle  $T \in A_i$ . Die Vereinigung der entsprechenden Einbettungen  $T \rightarrow f(T)$  setzen wir jetzt zu einer Abbildung  $\varphi$  von  $V(T_i)$  nach  $V(T_j)$  fort, indem wir  $\varphi(r_i) := r_j$  setzen. Diese Abbildung  $\varphi$  erhält die Baumordnung von  $T_i$ , und sie definiert eine Einbettung von  $T_i$  in  $T_j$ , in der die Kanten  $r_i r$  in  $T_i$  auf die Wege  $r_j T_j \varphi(r)$  abgebildet werden. Somit ist  $(T_i, T_j)$  ein gutes Paar in unserer schlechten Folge  $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$  von Wurzelbäumen, ein Widerspruch.  $\square$

 $\mathcal{A}$  $i, j$ 

## 10.3 Baumzerlegungen

Wie könnte man versuchen, Eigenschaften von Bäumen auf allgemeinere Graphen zu übertragen – auf Graphen, die zwar selbst keine Bäume sind, diesen aber ähnlich sehen? Was “ähnlich” bedeuten soll oder kann, wird dabei von den zu verallgemeinernden Eigenschaften abhängen. Eine Art von Baumähnlichkeit, die neben anderen Eigenschaften von Bäumen auch ihre Wohlquasi geordnetheit auf allgemeinere Graphen zu übertragen gestattet, werden wir jetzt kennenlernen.

Es sei  $G$  ein Graph,  $T$  ein Baum, und  $\mathcal{V} = (V_t)_{t \in T}$  eine Familie von Eckenmengen  $V_t \subseteq V(G)$ , indiziert durch die Ecken  $t$  von  $T$ . Wir nennen das Paar  $(T, \mathcal{V})$  eine *Baumzerlegung* von  $G$ , wenn die folgenden drei Bedingungen erfüllt sind:

*Baumzerlegung*

(T1)  $V(G) = \bigcup_{t \in T} V_t$ ;

(T2) zu jeder Kante  $e$  von  $G$  gibt es ein  $t \in T$ , so daß  $V_t$  beide Enden von  $e$  enthält;

(T3) für  $t_1, t_2, t_3 \in T$  mit  $t_2 \in t_1 T t_3$  gilt stets  $V_{t_1} \cap V_{t_3} \subseteq V_{t_2}$ .

Die Bedingungen (T1) und (T2) zusammen besagen also, daß  $G$  die Vereinigung der Untergraphen  $G[V_t]$  mit  $t \in T$  ist; diese Untergraphen

Teile

und auch die Mengen  $V_t$  selbst nennen wir die *Teile* von  $(T, \mathcal{V})$ , und  $(T, \mathcal{V})$  ist eine Baumzerlegung *in* diese Teile. Die Bedingungen (T2) und (T3) zusammen stellen sicher, daß die Gestalt von  $G$  grob der von  $T$  entspricht (Abb. 10.3.1).

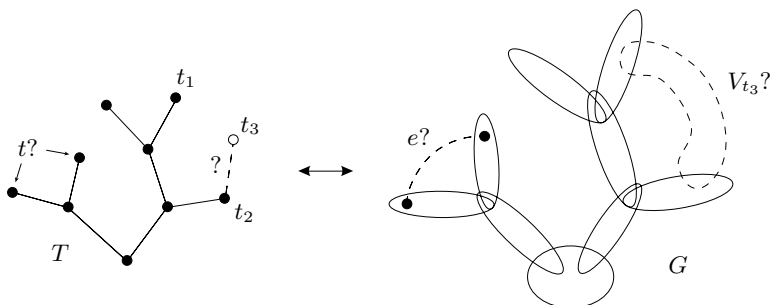


Abb. 10.3.1. Verbotene Kanten und Teile gemäß (T2) und (T3)

Bevor wir näher auf die Rolle der Baumzerlegungen im Beweis des Minorensatzes eingehen, wollen wir uns zunächst den Begriff selbst ein wenig näher anschauen. Im folgenden sei  $(T, \mathcal{V})$  eine fest gewählte Baumzerlegung von  $G$ , mit  $\mathcal{V} = (V_t)_{t \in T}$  wie bisher.

Die vielleicht wichtigste Eigenschaft von Baumzerlegungen ist, daß die so zerlegten Graphen die Trennungseigenschaften der Bäume erben, entlang derer sie zerlegt sind. Während man in der Literatur gelegentlich durchaus alternative Axiomensysteme für Baumzerlegungen antrifft (siehe etwa Übung 11), implizieren alle das folgende Trennungslemma in dieser oder ähnlicher Form:

[10.4.4] **Lemma 10.3.1.** *Es seien  $t_1 t_2$  eine Kante von  $T$  und  $T_1, T_2$  die Komponenten von  $T - t_1 t_2$ , mit  $t_1 \in T_1$  und  $t_2 \in T_2$ . Dann trennt  $V_{t_1} \cap V_{t_2}$  die Eckenmengen  $U_1 := \bigcup_{t \in T_1} V_t$  und  $U_2 := \bigcup_{t \in T_2} V_t$  in  $G$  (Abb. 10.3.2).*

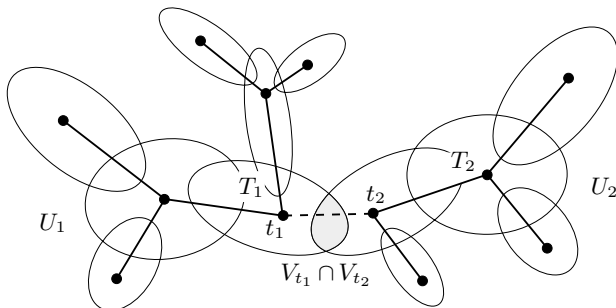


Abb. 10.3.2.  $V_{t_1} \cap V_{t_2}$  trennt  $U_1$  von  $U_2$  in  $G$

*Beweis.* Nach (T3) gilt  $U_1 \cap U_2 \subseteq V_{t_1} \cap V_{t_2}$ , da  $t_1$  und  $t_2$  beide auf jedem  $t-t'$ -Weg in  $T$  mit  $t \in T_1$  und  $t' \in T_2$  liegen. Es reicht daher zu zeigen, daß  $G$  keine Kante  $u_1 u_2$  mit  $u_1 \in U_1 \setminus U_2$  und  $u_2 \in U_2 \setminus U_1$  enthält. Ist  $u_1 u_2$  eine solche Kante, so gibt es nach (T2) ein  $t \in T$  mit  $u_1, u_2 \in V_t$ . Nach Wahl von  $u_1$  und  $u_2$  liegt  $t$  weder in  $T_2$  noch in  $T_1$ , ein Widerspruch zur Definition von  $T_1$  und  $T_2$ .  $\square$

Baumzerlegungen vererben sich kanonisch auf Teilgraphen:

**Lemma 10.3.2.** Für jedes  $H \subseteq G$  ist  $(T, (V_t \cap V(H))_{t \in T})$  eine Baumzerlegung von  $H$ .  $\square$

[10.4.2]  
[10.4.4]

Und entsprechend für Kantenkontraktionen:

**Lemma 10.3.3.** Angenommen,  $G$  sei ein MH mit Verzweigungsmengen  $U_h$ ,  $h \in V(H)$ . Durch  $f: V(G) \rightarrow V(H)$  sei jeder Ecke von  $G$  der Index der sie enthaltenden Verzweigungsmenge zugeordnet. Für alle  $t \in T$  sei  $W_t := \{f(v) \mid v \in V_t\}$ , sowie  $\mathcal{W} := (W_t)_{t \in T}$ . Dann ist  $(T, \mathcal{W})$  eine Baumzerlegung von  $H$ .

*Beweis.* Die Aussagen (T1) und (T2) für  $(T, \mathcal{W})$  folgen direkt aus den entsprechenden Aussagen für  $(T, \mathcal{V})$ . Sind nun  $t_1, t_2, t_3 \in T$  wie in (T3) gegeben, so betrachten wir eine Ecke  $h \in W_{t_1} \cap W_{t_3}$  von  $H$  und zeigen  $h \in W_{t_2}$ . Nach Definition von  $W_{t_1}$  und  $W_{t_3}$  gibt es Ecken  $v_1 \in V_{t_1} \cap U_h$  und  $v_3 \in V_{t_3} \cap U_h$ . Da  $U_h$  in  $G$  zusammenhängend ist und  $V_{t_2}$  nach Lemma 10.3.1 die Ecken  $v_1$  und  $v_3$  in  $G$  trennt, enthält  $U_h$  eine Ecke aus  $V_{t_2}$ . Nach Definition von  $W_{t_2}$  folgt hieraus  $h \in W_{t_2}$ .  $\square$

Lemma 10.3.1 hat zur Folge, daß vollständige (und somit nicht trennbare) Teilgraphen von  $G$  stets ganz in einem Teil der Baumzerlegung liegen:

**Lemma 10.3.4.** Ist  $K \subseteq G$  vollständig, so gibt es ein  $t \in T$  mit  $V(K) \subseteq V_t$ .  $\square$

[10.4.2]

*Beweis.* Wir richten zunächst die Kanten von  $T$ , wie folgt. Zu jeder Kante  $t_1 t_2 \in T$  definieren wir  $U_1$  und  $U_2$  wie in Lemma 10.3.1. Nach dem Lemma gibt es ein  $i \in \{1, 2\}$  mit  $V(K) \subseteq U_i$  (warum?), und wir richten die Kante  $t_1 t_2$  nach  $t_i$ .

Es sei  $t$  die letzte Ecke eines maximalen gerichteten Weges  $P$  in  $T$ ; wir zeigen  $V(K) \subseteq V_t$ . Zu gegebenem  $v \in V(K)$  gibt es ein  $t' \in T$  mit  $v \in V_{t'}$ . Ist  $t' \neq t$ , so sei  $e$  die mit  $t$  inzidente Kante von  $T$ , die  $t'$  von  $t$  trennt. Da  $e$  wegen der Maximalität von  $P$  auf  $t$  hin gerichtet ist, liegt  $v$  auch in einem  $V_{t''}$ , dessen Index  $t''$  in der  $t$  enthaltenden Komponente von  $T - e$  liegt. Es folgt  $v \in V_t$  mit (T3).  $\square$

Ziel einer Baumzerlegung ist, wie schon gesagt, die Eigenschaften eines Baumes für den zu zerlegenden Graphen nutzbar zu machen. Das wird natürlich umso besser gelingen, je mehr wir die Struktur *innerhalb* der Teile einer Baumzerlegung vernachlässigen dürfen: je kleiner die Teile, umso größer die Ähnlichkeit des Graphen mit seinem Zerlegungsbaum.

*Weite* Dieser Gedanke motiviert die folgende Definition. Als *Weite* der Baumzerlegung  $(T, \mathcal{V})$  bezeichnen wir die Zahl

$$\max \{ |V_t| - 1 : t \in T \},$$

*Baumweite*  
 $\text{tw}(G)$

und die *Baumweite*  $\text{tw}(G)$  von  $G$  ist die geringste *Weite* einer Baumzerlegung von  $G$ . Die Baumweite eines Graphen mißt gewissermaßen die Dicke seiner Äste (an der dicksten Stelle), wenn man ihn möglichst günstig in die grobe Form eines Baumes zwingt. Wie man leicht sieht, haben Bäume selbst die Baumweite 1.

Wegen der Lemmas 10.3.2 und 10.3.3 kann sich die Baumweite eines Graphen durch Löschen oder Kontrahieren von Kanten nicht erhöhen:

**Proposition 10.3.5.** *Ist  $H \preceq G$ , so gilt  $\text{tw}(H) \leq \text{tw}(G)$ .* □

Graphen beschränkter Baumweite sind nun den Bäumen in der Tat so ähnlich, daß sich deren Wohlquasiordnung auf solche Graphenklassen überträgt:

**Satz 10.3.6.** (Robertson & Seymour 1990)  
*Für jedes  $k \in \mathbb{N}$  sind die Graphen mit Baumweite  $< k$  durch die Minorenrelation wohlquasi geordnet.*

Satz 10.3.6 ist natürlich nur eine Teilaussage des Minorensatzes, aber er ist ein wichtiger Schritt auf dem Weg zu dessen Beweis. Der Beweis von Satz 10.3.6 ist dem des Satzes von Kruskal nicht unähnlich: grob gesprochen muß man das Argument der “minimalen schlechten Folge”  $\text{tw}(G)$ -mal iterieren.

Um Satz 10.3.6 für den Beweis des Minorensatzes nutzbar zu machen, sollten wir in der Lage sein, etwas über die von ihm nicht erfaßten Graphen zu sagen: diejenigen mit *großer* Baumweite. Es gibt in der Tat eine Reihe von Reichhaltigkeitssätzen über solche Graphen, und unser nächster Satz ist ein typisches Beispiel hierfür.

*berühren* Wir sagen, daß zwei Eckenmengen in einem Graphen einander *berühren*, wenn sie eine Ecke gemeinsam haben oder durch eine Kante verbunden sind. Eine Menge einander paarweise berührender zusammenhängender Eckenmengen nennen wir ein *Netz*. Eine Menge von Ecken ist eine *Überdeckung* des Netzes (und *überdeckt* es), wenn sie aus jeder seiner Mengen mindestens eine Ecke enthält. Die kleinste Mächtigkeit einer Überdeckung eines Netzes ist seine *Dichte*.

*Netz*

*überdeckt*

*Dichte*

**Lemma 10.3.7.** *Jede zwei Überdeckungen eines Netzes trennende Eckenmenge überdeckt das Netz selbst.*

*Beweis.* Da jede Menge des Netzes zusammenhängend ist und beide Überdeckungen trifft, trifft sie auch jede diese Überdeckungen trennende Eckenmenge.  $\square$

Typisches Beispiel eines Netzes ist die Menge von Kreuzen in einem Gitter. Das  $k \times k$ -Gitter ist der Graph auf  $\{1, \dots, k\}^2$  mit der Kantenmenge

Gitter

$$\{(i, j)(i', j') : |i - i'| + |j - j'| = 1\}.$$

Die Kreuze dieses Gitters sind die  $k^2$  Eckenmengen

$$C_{ij} := \{(i, \ell) \mid \ell = 1, \dots, k\} \cup \{(\ell, j) \mid \ell = 1, \dots, k\};$$

das Kreuz  $C_{ij}$  ist also die Vereinigung der  $i$ ten Spalte mit der  $j$ ten Zeile des Gitters. Offenbar bilden die Kreuze des  $k \times k$ -Gitters ein Netz der Ordnung  $k$ : jede Zeile und jede Spalte des Gitters überdeckt die Kreuze, aber jede Menge von weniger als  $k$  Ecken vermeidet eine der  $k$  Zeilen und eine der  $k$  Spalten und somit ein Kreuz.

Der folgende Satz wird manchmal *Dualitätssatz der Baumweite* genannt:

**Satz 10.3.8.** (Seymour & Thomas 1993)

*Ist  $k \geq 0$  und  $G$  ein Graph, so gilt  $\text{tw}(G) \geq k$  genau dann, wenn  $G$  ein Netz der Dichte  $> k$  enthält.*

*Beweis.* Zum Beweis der Rückrichtung sei  $\mathcal{B}$  irgendein Netz in  $G$ . Wir zeigen, daß jede Baumzerlegung  $(T, (V_t)_{t \in T})$  von  $G$  einen Teil hat, der jede Menge aus  $\mathcal{B}$  trifft. (2.3.1)

Wie im Beweis von Lemma 10.3.4 richten wir zunächst die Kanten  $t_1 t_2$  von  $T$ , wie folgt. Trifft  $X := V_{t_1} \cap V_{t_2}$  alle Mengen aus  $\mathcal{B}$ , so sind wir fertig. Da die Mengen aus  $\mathcal{B}$  zusammenhängend sind, gibt es anderenfalls nach Lemma 10.3.1 ein  $B \in \mathcal{B}$ , das ganz in  $U_1 \setminus X$  oder ganz in  $U_2 \setminus X$  liegt – sagen wir, in  $U_2 \setminus X$ . Dann liegt aber *jede*  $X$  vermeidende Menge aus  $\mathcal{B}$  in  $U_2 \setminus X$ , da sie ja  $B$  berührt. Wir richten dann die Kante  $t_1 t_2$  von  $t_1$  nach  $t_2$ .

Ist jede Kante von  $T$  gerichtet und  $t$  die letzte Ecke eines maximalen gerichteten Weges in  $T$ , so trifft  $V_t$  jede Menge aus  $\mathcal{B}$  – ganz wie im Beweis von Lemma 10.3.4.

Zum Beweis der Vorwärtsrichtung nehmen wir nun an, daß  $G$  kein Netz der Dichte  $> k$  enthält. Wir zeigen, daß  $G$  zu jedem Netz  $\mathcal{B}$  eine  $\mathcal{B}$ -zulässige Baumzerlegung hat: eine Baumzerlegung, bei der kein Teil aus mehr als  $k$  Ecken  $\mathcal{B}$  überdeckt. Für  $\mathcal{B} = \emptyset$  impliziert dies  $\text{tw}(G) < k$ :

 $\mathcal{B}$ -zulässig

da das leere Netz von jeder Menge überdeckt wird, kann es dann keine Teile mit mehr als  $k$  Ecken geben.

Sei also  $\mathcal{B}$  gegeben. Da  $G$  keine Netze mit mehr als  $2^{|G|}$  Mengen enthalten kann, dürfen wir induktiv annehmen, daß es zu jedem Netz  $\mathcal{B}'$  mit mehr als  $|\mathcal{B}|$  Mengen eine  $\mathcal{B}'$ -zulässige Baumzerlegung von  $G$  gibt. Es sei  $X \subseteq V(G)$  eine Überdeckung von  $\mathcal{B}$  mit möglichst wenigen Ecken; dann ist  $\ell := |X| \leq k$  die Dichte von  $\mathcal{B}$ . Unser Ziel ist ein Beweis der folgenden Aussage:

*Zu jeder Komponente  $C$  von  $G - X$  gibt es eine  $\mathcal{B}$ -zulässige Baumzerlegung von  $G[X \cup V(C)]$ , in der  $X$  ein Teil ist.* (\*)

Diese Baumzerlegungen können wir dann zu einer  $\mathcal{B}$ -zulässigen Baumzerlegung zusammenfügen, indem wir die dem Teil  $X$  entsprechenden Knoten ihrer Bäume identifizieren. (Ist  $X = V(G)$ , so ist die Baumzerlegung mit  $X$  als einzigem Teil  $\mathcal{B}$ -zulässig.)

Betrachten wir also eine Komponente  $C$  von  $G - X$ . Wir setzen  $H := G[X \cup V(C)]$  und  $\mathcal{B}' := \mathcal{B} \cup \{C\}$ . Ist  $\mathcal{B}'$  kein Netz, so wird  $\mathcal{B}$  nicht von  $Y := V(C) \cup N(C)$  überdeckt. Die aus den Teilen  $X$  und  $Y$  bestehende Baumzerlegung von  $H$  erfüllt dann (\*).

Wir dürfen also annehmen, daß  $\mathcal{B}'$  ein Netz ist. Da  $X$  zwar  $\mathcal{B}$  aber nicht  $\mathcal{B}'$  überdeckt, gilt  $|\mathcal{B}'| > |\mathcal{B}|$ . Nach Induktionsannahme hat  $G$  eine  $\mathcal{B}'$ -zulässige Baumzerlegung  $(T, (V_t)_{t \in T})$ . Ist diese Zerlegung auch  $\mathcal{B}$ -zulässig, so ist nichts weiter zu zeigen. Ist sie es nicht, so hat sie einen Teil  $V_s$  von mehr als  $k$  Ecken, der  $\mathcal{B}$  überdeckt. Da  $\mathcal{B}$  nicht durch weniger als  $\ell$  Ecken überdeckbar ist, gibt es nach Lemma 10.3.7 und Satz 2.3.1 von Menger  $\ell$  disjunkte  $V_s - X$ -Wege  $P_1, \dots, P_\ell$ . Da  $V_s$  nicht  $\mathcal{B}'$  überdeckt und daher in  $G - C$  liegt, haben die  $P_i$  außer ihren Enden  $x_i \in X$  keine Ecken in  $H$ .

Für jedes  $i = 1, \dots, \ell$  wählen wir ein  $t_i \in T$  mit  $x_i \in V_{t_i}$  und setzen

$$W_t := (V_t \cap (X \cup V(C))) \cup \{x_i \mid t \in sTt_i\}$$

für alle  $t \in T$  (Abb. 10.3.3). Bis auf die zusätzlichen Ecken  $x_i$  ist  $(T, (W_t)_{t \in T})$  die durch  $(T, (V_t)_{t \in T})$  induzierte Baumzerlegung von  $H$ ; vgl. Lemma 10.3.2. Trotz der zusätzlichen Ecken gilt  $|W_t| \leq |V_t|$  für alle  $t$ , da  $V_t$  für jedes  $x_i \in W_t \setminus V_t$  wegen  $t \in sTt_i$  eine andere Ecke von  $P_i$  enthält (Lemma 10.3.1) und diese Ecke wegen  $P_i \cap H = \{x_i\}$  nicht in  $W_t$  liegen kann. Weiter erfüllt  $(T, (W_t)_{t \in T})$  die Bedingung (T3), da jedes  $x_i$  zu allen Teilen entlang eines Weges  $sTt_i$  in  $T$  hinzugefügt wurde. Damit ist  $(T, (W_t)_{t \in T})$  eine Baumzerlegung von  $H$ .

Wegen  $W_s = X$  bleibt zum Beweis von (\*) nur noch zu zeigen, daß diese Zerlegung auch  $\mathcal{B}$ -zulässig ist. Betrachten wir also einen Teil  $W_t$  von mehr als  $k$  Ecken. Wegen  $|X| = \ell \leq k$  hat  $W_t$  eine Ecke in  $C$ ; diese liegt dann auch in  $V_t$ . Da  $(T, (V_t)_{t \in T})$  nach Annahme  $\mathcal{B}'$ -zulässig ist und

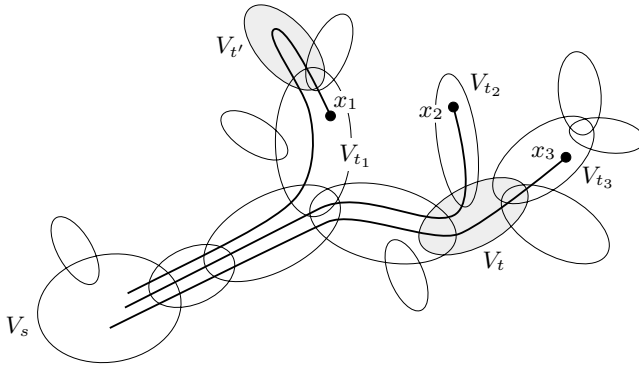


Abb. 10.3.3.  $W_t$  enthält  $x_2$  und  $x_3$ , aber nicht  $x_1$ ;  $W_{t'}$  enthält kein  $x_i$

$|V_t| \geq |W_t| > k$  gilt, vermeidet  $V_t$  daher ein  $B \in \mathcal{B}$ ; wir zeigen, daß auch  $W_t$  dieses  $B$  nicht trifft. Tut es dies, dann in einer Ecke  $x_i \in W_t \setminus V_t$ . Nach Definition von  $W_t$  gilt dann  $t \in sTt_i$ , und  $B$  trifft außer  $V_s$  auch  $V_{t_i}$  aber nicht  $V_t$ . Da  $B$  zusammenhängend ist, widerspricht dies Lemma 10.3.1.  $\square$

Satz 10.3.8 kann man besonders prägnant formulieren durch die folgende Invariante. Bezeichnen wir als *Vernetzungsgrad* eines Graphen die größte Dichte eines Netzes in ihm, so besagt der Satz, daß die Baumweite eines Graphen stets um eins kleiner ist als sein Vernetzungsgrad. (Übung 16).

Wie nützlich bereits die einfache Rückrichtung von Satz 10.3.8 ist, zeigt wiederum das Beispiel der Gitter: da das  $k \times k$ -Gitter ein Netz der Dichte  $k$  enthält, hat es nach Satz 10.3.8 eine Baumweite von mindestens  $k - 1$ ; ohne den Satz ist dies gar nicht so einfach zu zeigen. Tatsächlich hat das  $k \times k$ -Gitter die Baumweite  $k$  (Übung 15). Wichtiger als der genaue Wert seiner Baumweite ist aber die Tatsache, daß diese mit  $k$  gegen unendlich geht, also unbeschränkt ist. Wie wir noch sehen werden, bilden die Gitter sogar den Prototyp einer Graphenmenge unbeschränkter Baumweite: die Elemente einer jeden solchen Menge enthalten alle Gitter als Minoren (Satz 10.4.3).

Nach Lemma 10.3.1 trennt für  $t_1, t_2 \in T$  jede Eckenmenge  $V_t$  mit  $t \in t_1Tt_2$  die Ecken aus  $V_{t_1}$  von denen aus  $V_{t_2}$  in  $G$ . Wir nennen unsere Baumzerlegung  $(T, \mathcal{V})$  *schlank*, wenn sie der folgenden Bedingung genügt:

(T4) zu  $s \in \mathbb{N}$  und  $t_1, t_2 \in T$  gibt es stets entweder  $s$  disjunkte  $V_{t_1} - V_{t_2}$ -Wege in  $G$  oder ein  $t \in t_1Tt_2$  mit  $|V_t| < s$ .

Die Äste einer schlanken Baumzerlegung sind also nur so dick, wie die Zusammenhangeigenschaften von  $G$  es erfordern: ist  $t_1 \dots t_k$  ein Weg

*schlank*



in  $T$ , bei dem alle  $V_{t_i}$  groß sind, dann enthält  $G$  auch viele  $V_{t_1}-V_{t_k}$ -Wege.

Sind wir an Baumzerlegungen in möglichst kleine Teile interessiert, so haben wir jetzt zwei Kriterien zu ihrer Bewertung; während eine Zerlegung minimaler Weite die Ordnung der größten Teile klein hält, minimiert die Schlankheitsbedingung (T4) die Größe aller Teile – zumindest lokal, in einem gewissen Sinne. Überraschenderweise sind jedoch beide Kriterien ohne Reibungsverlust vereinbar:

**Satz 10.3.9.** (Thomas 1990)

*Jeder Graph  $G$  hat eine schlanke Baumzerlegung der Weite  $\text{tw}(G)$ .*

Der Beweis von Satz 10.3.9 ist nicht allzu lang aber relativ technisch, und wir werden ihn nicht darstellen. Bei der praktischen Anwendung von Baumzerlegungen ist der Satz ein wesentliches Hilfsmittel.

*simplizial*

Die Baumzerlegung  $(T, \mathcal{V})$  von  $G$  heißt *simplizial*, wenn jede trennende Eckenmenge der Form  $V_{t_1} \cap V_{t_2}$  einen vollständigen Teilgraphen in  $G$  induziert. Bei einer simplizialen Baumzerlegung kann man zuweilen von Eigenschaften der Teile auf Eigenschaften des ganzen Graphen schließen: ist beispielsweise jeder Teil  $k$ -färbbar, so ist es auch  $G$ . (Beweis?) Entsprechendes gilt für die Eigenschaft, keinen  $K^r$ -Minor zu enthalten ( $r$  fest). Spaltet man einen gegebenen Graphen sukzessive entlang minimaler trennender vollständiger Teilgraphen auf, so erhält man eine simpliziale Baumzerlegung des Graphen in eindeutig bestimmte irreduzible Teile (Übung 22).

Kann man umgekehrt einen Graphen  $G$  rekursiv durch Zusammenkleben entlang vollständiger Teilgraphen aus Graphen einer Menge  $\mathcal{H}$  konstruieren, so hat  $G$  eine simpliziale Baumzerlegung in Elemente von  $\mathcal{H}$ . Nach dem Struktursatz 6.4.4 von Wagner über die kantenmaximalen Graphen ohne  $K^5$ -Minor beispielsweise hat jeder solche Graph eine simpliziale Baumzerlegung in ebene Dreiecksgraphen und Exemplare des Wagner-Graphen  $W$ . Entsprechendes gilt für die Graphen ohne  $K^4$ -Minor mit Proposition 6.4.1; siehe auch Proposition 10.4.2.

Hier ist noch ein besonders einfaches Beispiel der Charakterisierung einer Grapheneigenschaft durch Baumzerlegungen:

[10.4.2] **Proposition 10.3.10.**  *$G$  ist genau dann chordal, wenn  $G$  eine Baumzerlegung in vollständige Teile hat.*

(4.5.1) *Beweis.* Wir wenden Induktion nach  $|G|$  an. Zunächst sei  $(T, \mathcal{V})$  eine Baumzerlegung von  $G$ , so daß  $G[V_t]$  für alle  $t \in T$  vollständig ist; wir wählen  $(T, \mathcal{V})$  so, daß  $T$  möglichst wenige Ecken hat. Ist  $|T| \leq 1$ , so ist  $G$  vollständig und damit chordal. Ist  $|T| \geq 2$ , so ist  $T = (T_1 \cup T_2) + t_1 t_2$  wie in Lemma 10.3.1. Nach (T1) und (T2) ist  $G = G_1 \cup G_2$  mit  $G_i := G[\bigcup_{t \in T_i} V_t]$  ( $i = 1, 2$ ), und nach dem Lemma gilt  $V(G_1 \cap G_2) \subseteq V_{t_1} \cap V_{t_2}$ ; somit ist  $G_1 \cap G_2$  vollständig.

Nun ist  $(T_i, (V_t)_{t \in T_i})$  jeweils eine Baumzerlegung von  $G_i$  in vollständige Teile (warum?), und so sind beide  $G_i$  nach Induktionsannahme chordal. (Beachte, daß nach Wahl von  $(T, \mathcal{V})$  weder  $G_1$  noch  $G_2$  ganz in  $G[V_{t_1} \cap V_{t_2}] \supseteq G_1 \cap G_2$  liegt, d.h.  $G_1$  und  $G_2$  sind wirklich kleiner als  $G$ .) Nach Proposition 4.5.1 sind die  $G_i$  damit rekursiv aus vollständigen Graphen durch Zusammenkleben entlang vollständiger Untergraphen konstruierbar. Da  $G_1 \cap G_2$  vollständig ist, ist damit auch  $G$  derart konstruierbar und nach Proposition 4.5.1 wiederum chordal.

Umgekehrt sei nun  $G$  chordal. Ist  $G$  vollständig, so ist nichts zu zeigen. Ist  $G$  nicht vollständig, so ist  $G$  nach Proposition 4.5.1 die Vereinigung kleinerer chordaler Untergraphen  $G_1, G_2$  mit  $G_1 \cap G_2$  vollständig. Nach Induktionsannahme haben  $G_1$  und  $G_2$  Baumzerlegungen  $(T_1, \mathcal{V}_1)$  und  $(T_2, \mathcal{V}_2)$  in vollständige Teile. Nach Lemma 10.3.4 liegt  $G_1 \cap G_2$  jeweils ganz in einem dieser Teile, etwa mit den Indizes  $t_1 \in T_1$  und  $t_2 \in T_2$ . Wie man leicht nachprüft, ist  $((T_1 \cup T_2) + t_1 t_2, \mathcal{V}_1 \cup \mathcal{V}_2)$  eine Baumzerlegung von  $G$  in vollständige Teile.  $\square$

**Korollar 10.3.11.**  $\text{tw}(G) = \min \{ \omega(H) - 1 \mid G \subseteq H; H \text{ chordal} \}$ .

*Beweis.* Nach den Lemma 10.3.4 und Proposition 10.3.10 hat jeder der betrachteten Obergraphen  $H$  von  $G$  eine Baumzerlegung der Weite  $\omega(H) - 1$ . Da nach Lemma 10.3.2 jede dieser Baumzerlegungen eine Baumzerlegung von  $G$  induziert, folgt  $\text{tw}(G) \leq \omega(H) - 1$ .

Umgekehrt konstruieren wir jetzt ein geeignetes  $H$  mit  $\omega(H) - 1 \leq \text{tw}(G)$ . Es sei  $(T, \mathcal{V})$  eine Baumzerlegung von  $G$  der Weite  $\text{tw}(G)$ . Für jedes  $t \in T$  sei  $K_t$  der vollständige Graph auf  $V_t$ , und es sei  $H := \bigcup_{t \in T} K_t$ . Offenbar ist  $(T, \mathcal{V})$  auch eine Baumzerlegung von  $H$ . Nach Proposition 10.3.10 ist  $H$  chordal, und nach Lemma 10.3.4 ist  $\omega(H) - 1$  nicht größer als die Weite von  $(T, \mathcal{V})$ , also  $\text{tw}(G)$ .  $\square$

## 10.4 Baumweite und verbotene Minoren

Ist  $\mathcal{X}$  eine Menge oder Klasse von Graphen, so ist die Klasse

$$\text{Forb}_{\preceq}(\mathcal{X}) := \{ G \mid G \not\preceq X \text{ für alle } X \in \mathcal{X} \}$$

$\text{Forb}_{\preceq}(\mathcal{X})$

aller Graphen ohne Minor in  $\mathcal{X}$  eine Grapheneigenschaft: mit jedem  $G \in \text{Forb}_{\preceq}(\mathcal{X})$  liegen auch alle zu  $G$  isomorphen Graphen in  $\text{Forb}_{\preceq}(\mathcal{X})$ .<sup>1</sup> Die Graphen  $X \in \mathcal{X}$  nennen wir die in dieser Darstellung der Eigenschaft  $\mathcal{G} = \text{Forb}_{\preceq}(\mathcal{X})$  *verbotenen Minoren*. Eine Grapheneigenschaft  $\mathcal{G}$  mit  $\mathcal{G} = \text{Forb}_{\preceq}(\mathcal{X})$  für ein geeignetes  $\mathcal{X}$  heißt *durch verbotene Minoren darstellbar*.

verbotene  
Minoren

<sup>1</sup> Statt  $\text{Forb}_{\preceq}(\{X\})$  schreiben wir wieder kürzer  $\text{Forb}_{\preceq}(X)$  etc.

*erblich* Wir nennen eine Grapheneigenschaft  $\mathcal{G}$  *erblich*, wenn mit jedem Graphen auch all dessen Minoren die Eigenschaft haben, d.h. wenn  $H \preceq G \in \mathcal{G} \Rightarrow H \in \mathcal{G}$  gilt.

[10.5.1] **Proposition 10.4.1.** *Eine Grapheneigenschaft ist genau dann erblich, wenn sie durch verbotene Minoren darstellbar ist.*

(0.7.3) *Beweis.* Zunächst sei  $\mathcal{G}$  eine durch verbotene Minoren darstellbare Eigenschaft, etwa  $\mathcal{G} = \text{Forb}_{\preceq}(\mathcal{X})$ . Aus  $H \preceq G \in \mathcal{G}$  folgt dann stets  $H \in \mathcal{G}$ : anderenfalls gäbe es ein  $X \in \mathcal{X}$  mit  $X \preceq H$ , und es folgte  $X \preceq G$  aus der Transitivität von  $\preceq$  (mit Widerspruch).

$\bar{\mathcal{G}}$  Ist umgekehrt  $\mathcal{G}$  eine erbliche Grapheneigenschaft und  $\bar{\mathcal{G}}$  ihr Komplement (die Klasse aller Graphen, die nicht in  $\mathcal{G}$  liegen), so ist  $\mathcal{G}$  gleich  $\text{Forb}_{\preceq}(\bar{\mathcal{G}})$ , also durch verbotene Minoren darstellbar.  $\square$

Auf die allgemeine Frage nach der einfachsten Darstellung einer erblichen Grapheneigenschaft durch verbotene Minoren werden wir in Abschnitt 10.5 zurückkommen. In diesem Abschnitt interessiert uns zunächst eine ganz bestimmte Art von Eigenschaft: beschränkte Baumweite.

Betrachten wir zu gegebenem  $k$  die Graphen mit Baumweite  $< k$ . Nach den Propositionen 10.3.5 und 10.4.1 sind diese Graphen durch verbotene Minoren darstellbar. Wählen wir deren Menge  $\mathcal{X}$  möglichst klein, so erhalten wir etwa  $\mathcal{X} = \{K^3\}$  für  $k = 2$ : die Graphen mit Baumweite  $< 2$  sind gerade die Wälder. Für  $k = 3$  erhalten wir  $\mathcal{X} = \{K^4\}$ :

**Proposition 10.4.2.** *Für jeden Graphen  $G$  gilt  $\text{tw}(G) < 3 \Leftrightarrow G \not\preceq K^4$ .*

(6.4.1) *Beweis.* Nach Lemma 10.3.4 gilt  $\text{tw}(K^4) \geq 3$ ; ein Graph der Baumweite  $< 3$  hat somit nach Proposition 10.3.5 keinen  $K^4$ -Minor.  
(10.3.2)  
(10.3.4)  
(10.3.10)

Umgekehrt enthalte  $G$  nun keinen  $K^4$ -Minor; es gelte  $|G| \geq 3$ . Wir fügen so lange Kanten zu  $G$  hinzu, bis der erhaltene Graph  $G'$  kantenmaximal ohne  $K^4$ -Minor ist. Nach Proposition 6.4.1 kann  $G'$  rekursiv aus Dreiecken durch Zusammenkleben entlang vollständiger Untergraphen  $K^2$  konstruiert werden. Wie in der Rückrichtung des Beweises von Proposition 10.3.10 folgt induktiv, daß jeder so konstruierbare Graph, und somit auch  $G'$ , eine Baumzerlegung in Dreiecke hat. Diese Baumzerlegung von  $G'$  hat somit die Weite 2, und nach Lemma 10.3.2 ist sie auch eine Baumzerlegung von  $G$ .  $\square$

Umgekehrt können wir fragen, für welche Graphen  $X$  außer  $K^3$  und  $K^4$  die Baumweite der Graphen in  $\text{Forb}_{\preceq}(X)$  beschränkt ist. Interessanterweise sieht man ganz einfach, daß jeder solche Graph  $X$  plättbar sein muß. Da nämlich alle Gitter und deren Minoren plättbar sind, enthält jede Klasse  $\text{Forb}_{\preceq}(X)$  mit nicht plättbarem  $X$  alle Gitter. Wie wir jedoch bereits sahen, haben die Gitter unbeschränkte Baumweite.

Der folgende überraschende Satz besagt, daß umgekehrt für jedes plättbare  $X$  die Graphen in  $\text{Forb}_{\preceq}(X)$  beschränkte Baumweite haben:

**Satz 10.4.3.** (Robertson & Seymour 1986)

*Die Baumweite der Graphen in  $\text{Forb}_{\preceq}(X)$  ist genau dann beschränkt, wenn  $X$  plättbar ist.*

Satz 10.4.3 ist einer der zentralen Pfeiler der Minorentheorie. Mittlerweile gibt es einen nur wenige Seiten umfassenden Beweis; er ist in der englischen Ausgabe dieses Buchs dargestellt (ab der zweiten Auflage).<sup>2</sup>

Hier wollen wir anstelle des Satzes 10.4.3 einen etwas einfacheren aber ganz ähnlichen Satz über sogenannte Wegzerlegungen beweisen. Eine *Wegzerlegung* ist einfach eine Baumzerlegung, deren Baum ein Weg ist. Wir bezeichnen eine Wegzerlegung  $(T, \mathcal{V})$  jedoch gewöhnlich einfach durch die ihrem Weg entsprechende Folge  $(V_1, \dots, V_s)$  der Eckenmengen aus  $\mathcal{V}$ . Die Weite einer Wegzerlegung nennen wir ihre *Breite*, und die *Wegbreite*  $\text{pw}(G)$  eines Graphen  $G$  ist die geringste Breite einer Wegzerlegung von  $G$ .

Weg-  
zerlegung

Wegbreite  
 $\text{pw}(G)$

Der Plättbarkeit des betrachteten Minors  $X$  in Satz 10.4.3 entspricht im Falle von Wegzerlegungen die Kreislosigkeit:

**Satz 10.4.4.** (Robertson & Seymour 1983)

*Die Wegbreite der Graphen in  $\text{Forb}_{\preceq}(X)$  ist genau dann beschränkt, wenn  $X$  ein Wald ist.*

Die Vorwärtsrichtung von Satz 10.4.4 ist wiederum einfach. Wir müssen lediglich zeigen, daß Bäume beliebige hohe Wegbreite haben können: da  $\text{Forb}_{\preceq}(X)$  alle Bäume enthält, wenn  $X$  kein Wald ist, kann dann in diesem Fall die Wegbreite der Graphen in  $\text{Forb}_{\preceq}(X)$  nicht beschränkt sein.

Wie zeigt man, daß ein Graph – in unserem Fall ein geeigneter Baum – hohe Wegbreite hat? Betrachten wir dazu eine Wegzerlegung  $(V_1, \dots, V_s)$  der Breite  $\text{pw}(G)$  eines zusammenhängenden Graphen  $G$ . Wir wählen  $v_1 \in V_1$  und  $v_s \in V_s$  und betrachten einen beliebigen  $v_1$ – $v_s$ -Weg  $Q \subseteq G$ . Nach Lemma 10.3.1 trifft  $Q$  jedes  $V_r$ ,  $r = 1, \dots, s$ . Mit  $(V_1 \setminus V(Q), \dots, V_s \setminus V(Q))$  hat  $G - Q$  daher eine Wegzerlegung der Breite  $\leq \text{pw}(G) - 1$ , und insbesondere gilt  $\text{pw}(G - Q) < \text{pw}(G)$ .

(10.3.1)

(10.3.2)

Jeder zusammenhängende Graph  $G$  enthält also einen Weg, dessen Löschung seine Wegbreite senkt. Wissen wir nun (etwa nach einer geeigneten Induktionsannahme), daß  $G - Q$  für jeden Weg  $Q \subseteq G$  hohe Wegbreite hat, so hat  $G$  selbst entsprechend noch höhere Wegbreite.

Dieser Idee folgend zeigen wir jetzt, daß Bäume beliebige hohe Wegbreite haben können. Mit  $T_3^k$  bezeichnen wir den Wurzelbaum, in dem

<sup>2</sup> R. Diestel, *Graph Theory* (2nd ed.n), Springer-Verlag, New York 2000

die Wurzel  $r$  den Grad 3 hat und alle anderen Ecken, die keine Blätter sind, den Grad 4 haben, und in dem alle Blätter von  $r$  den Abstand  $k$  haben. Ist  $T = T_3^k$  und  $Q \subseteq T$  ein Weg, so enthält  $Q$  höchstens zwei der drei mit  $r$  inzidenten Kanten. Folglich enthält  $T - Q$  noch eine Kopie des Baumes  $T_3^{k-1}$ . Mit Induktion nach  $k$  folgt hieraus  $\text{pw}(T_3^k) \geq k$ .

Zum Beweis der Rückrichtung von Satz 10.4.4 brauchen wir einen Hilfsbegriff und zwei Lemmas. Es sei  $G = (V, E)$  ein Graph. Für  $X \subseteq V$  bezeichnen wir mit  $\partial X$  die Menge aller Ecken in  $X$  mit einem Nachbarn in  $G - X$ . Für jedes  $n \in \mathbb{N}$  definieren wir eine Menge  $\mathcal{B}_n = \mathcal{B}_n(G)$  von Teilmengen von  $V$  rekursiv wie folgt:

- (i)  $\emptyset \in \mathcal{B}_n$ ;
- (ii) ist  $X \in \mathcal{B}_n$ ,  $X \subseteq Y \subseteq V$  und  $|\partial X| + |Y \setminus X| \leq n$ , dann ist auch  $Y \in \mathcal{B}_n$  (Abb. 10.4.1).

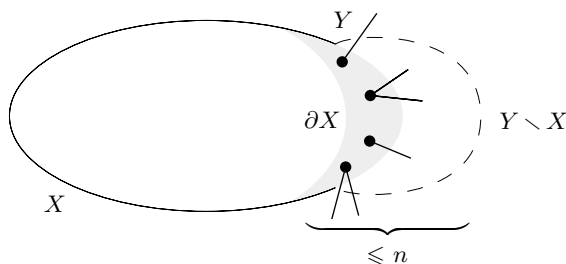


Abb. 10.4.1. Mit  $X$  liegt auch  $Y$  in  $\mathcal{B}_n$

Eine Menge  $X \subseteq V$  liegt also genau dann in  $\mathcal{B}_n$ , wenn es eine Folge

$$\emptyset = X_0 \subseteq \dots \subseteq X_s = X$$

gibt mit  $|\partial X_r| + |X_{r+1} \setminus X_r| \leq n$  für alle  $r < s$ .

Typische Beispiele für Eckenmengen in  $\mathcal{B}_n$  sind die ‘‘Anfangsstücke’’ von Wegzerlegungen: ist  $(V_1, \dots, V_s)$  eine Wegzerlegung von  $G$  der Breite  $< n$ , dann liegen die Mengen  $V_1 \cup \dots \cup V_r$  ( $r \leq s$ ) in  $\mathcal{B}_n$ , einschließlich  $V$  selbst für  $r = s$  (Übung). Umgekehrt gilt:

**Lemma 10.4.5.** *Ist  $V \in \mathcal{B}_n$ , so gilt  $\text{pw}(G) < n$ .*

*Beweis.* Ist  $V \in \mathcal{B}_n$ , dann gibt es eine Folge  $\emptyset = X_0 \subseteq \dots \subseteq X_s = V$  mit  $|\partial X_r| + |X_{r+1} \setminus X_r| \leq n$  für alle  $r < s$ . Wir setzen

$$V_{r+1} := \partial X_r \cup (X_{r+1} \setminus X_r)$$

und zeigen, daß  $(V_1, \dots, V_s)$  eine Wegzerlegung von  $G$  ist (Abb. 10.4.2).

Offenbar gilt  $X_r = V_1 \cup \dots \cup V_r$  für alle  $r \leq s$  (Induktion nach  $r$ ), und insbesondere  $V = X_s = V_1 \cup \dots \cup V_s$ . Somit gilt (T1). Zum Beweis

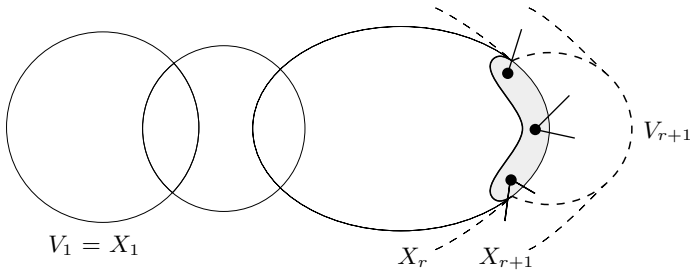


Abb. 10.4.2. Konstruktion einer Wegzerlegung aus  $\mathcal{B}_n$

von (T2) sei  $xy \in E$  gegeben. Es sei  $r(x)$  minimal mit  $x \in X_{r(x)}$  und  $r(y)$  minimal mit  $y \in X_{r(y)}$ . OBdA gelte  $r(x) \leq r(y) =: r$ ; wir zeigen, daß  $x$ , wie  $y$ , in  $V_r$  liegt. Im Falle von  $r(x) = r$  ist dies klar. Gilt aber  $r(x) < r$ , so liegt  $x$  in  $X_{r-1}$ , und wegen  $xy \in E$  damit in  $\partial X_{r-1} \subseteq V_r$ . Zum Beweis von (T3) schließlich sei  $x \in V_p \cap V_r$  und  $p < q < r$ . Dann gilt  $x \in V_p \subseteq X_{q-1} \subseteq X_{r-1}$ , also  $x \in X_{r-1} \cap V_r$ . Nach Definition von  $V_r$  folgt  $x \in \partial X_{r-1} \cap X_{q-1} \subseteq \partial X_{q-1} \subseteq V_q$ .  $\square$

**Lemma 10.4.6.** *Es sei  $Y \in \mathcal{B}_n$  und  $Z \subseteq Y$ . Gibt es eine Menge  $\{P_z \mid z \in \partial Z\}$  disjunkter  $Z$ - $\partial Y$ -Wege in  $G$  mit  $z \in P_z$  für alle  $z \in \partial Z$ , dann gilt  $Z \in \mathcal{B}_n$  (Abb. 10.4.3).*

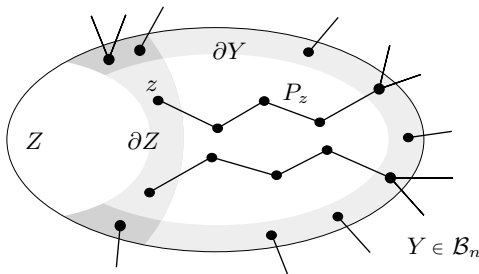


Abb. 10.4.3. Fünf Wege  $P_z$ ; drei davon sind trivial

*Beweis.* Nach Definition von  $\mathcal{B}_n$  gibt es Eckenmengen  $\emptyset = Y_0 \subseteq \dots \subseteq Y_s = Y$  in  $G$  mit

$$|\partial Y_r| + |Y_{r+1} \setminus Y_r| \leq n$$

für alle  $r < s$ . Wir werden hieraus ableiten, daß mit  $Z_r := Y_r \cap Z$  entsprechend

$$|\partial Z_r| + |Z_{r+1} \setminus Z_r| \leq n$$

gilt für alle  $r < s$ , und somit  $Z = Z_s \in \mathcal{B}_n$ .

Es sei  $r$  fest gewählt. Wegen

$$Z_{r+1} \setminus Z_r = Z_{r+1} \setminus Y_r \subseteq Y_{r+1} \setminus Y_r$$

reicht es,  $|\partial Z_r| \leq |\partial Y_r|$  zu zeigen. Wir konstruieren dazu eine injektive Abbildung  $z \mapsto y$  von  $\partial Z_r \setminus \partial Y_r$  nach  $\partial Y_r \setminus \partial Z_r$ .

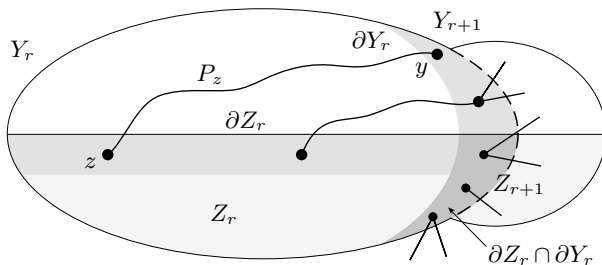


Abb. 10.4.4. Eine injektive Wegverbindung von  $\partial Z_r \setminus \partial Y_r$  nach  $\partial Y_r \setminus \partial Z_r$

Es sei  $z \in \partial Z_r \setminus \partial Y_r$  gegeben. Dann hat  $z$  einen Nachbarn in  $Y_r \setminus Z_r = Y_r \setminus Z$  und liegt somit in  $\partial Z$ . Nun ist  $P_z$  ein Weg von  $(Z_r \subseteq) Y_r$  nach  $\partial Y$  und hat somit eine Ecke  $y$  in  $\partial Y_r$ . Nach Wahl von  $z$  ist  $y \neq z$ ; da  $z$  die einzige Ecke von  $P_z$  in  $Z$  ist, gilt daher  $y \in \partial Y_r \setminus \partial Z_r$ . Nach Definition der Wege  $P_z$  sind diese Ecken  $y$  verschieden für verschiedene  $z$ , und es folgt  $|\partial Z_r| \leq |\partial Y_r|$  wie behauptet.  $\square$

(0.5.2)  
(2.3.1)

**Beweis von Satz 10.4.4.** Die Vorwärtsrichtung des Satzes haben wir bereits bewiesen. Zur Rückrichtung zeigen wir folgendes:

$n, F$

Ist  $\text{pw}(G) \geq n \in \mathbb{N}$ , so enthält  $G$  jeden Wald  $F$  mit  $|F| - 1 = n$  als Minor; (\*)

die Graphen in  $\text{Forb}_{\leq}(F)$  haben dann alle eine Wegbreite  $< n$ .

$v_1, v_2, \dots$

Es gelte also  $\text{pw}(G) \geq n$ , und oBdA sei  $F$  ein Baum. Es sei  $(v_1, \dots, v_{n+1})$  eine Aufzählung von  $V(F)$  wie in Korollar 0.5.2, also so, daß  $v_{i+1}$  für jedes  $i \leq n$  genau einen Nachbarn in  $\{v_1, \dots, v_i\}$  hat.

$X^i$

Für jedes  $i = 0, \dots, n$  werden wir eine Menge  $X^i = \{X_0^i, \dots, X_i^i\}$  disjunkter Eckenmengen von  $G$  definieren, mit  $X_j^k \subseteq X_j^\ell$  für  $j \leq k \leq \ell$ , und so daß  $X_j^i$  zusammenhängend ist in  $G$  für alle  $j > 0$ . Wir schreiben dann

$X^i$

$$X^i := X_0^i \cup \dots \cup X_i^i.$$

Für jedes  $i$  werden die folgenden drei Aussagen gelten:

- (i)  $G$  enthält eine  $X_j^i - X_k^i$ -Kante für alle  $1 \leq j < k \leq i$  mit  $v_j v_k \in E(F)$  (damit ist  $F[v_1, \dots, v_i]$  ein Minor von  $G[X_1^i \cup \dots \cup X_i^i]$ );
- (ii)  $|X_j^i \cap \partial X^i| = 1$  für alle  $1 \leq j \leq i$ ;
- (iii)  $X^i$  ist maximal in  $\mathcal{B}_n$  mit  $|\partial X^i| \leq i$ .

Aus (ii) und (iii) folgt dann  $|\partial X^i| = i$ .

Es sei  $X_0^0 \in \mathcal{B}_n$  maximal mit  $|\partial X_0^0| = 0$  (möglicherweise  $X_0^0 = \emptyset$ ).  
 Damit gelten (i)–(iii) für  $i = 0$ . Zu gegebenem  $i \leq n$  sei nun  $\mathcal{X}^i$  bereits  
 definiert, und es gelte (i)–(iii). Ist  $i = 0$ , so sei  $x$  eine beliebige Ecke  
 aus  $G - X^0$ ; dieser Graph ist nicht leer, da  $X^0 = X_0^0 \in \mathcal{B}_n$  ist aber  
 $V(G) \notin \mathcal{B}_n$  nach Lemma 10.4.5. Ist  $i > 0$ , so betrachten wir das  $j \leq i$   
 mit  $v_j v_{j+1} \in E(F)$  und wählen als  $x \in G - X^i$  einen Nachbarn der nach  
 (ii) eindeutig bestimmten Ecke in  $X_j^i \cap \partial X^i$ . Wir setzen dann

$$X := X^i \cup \{x\}.$$

Ist  $i = n$ , so folgt  $F \preccurlyeq G[X]$  aus (i) und der Wahl von  $x$ , und wir  
 sind fertig. Es gelte also  $i < n$ . Aus (iii) und der Definition von  $\mathcal{B}_n$  folgt  
 dann  $X \in \mathcal{B}_n$  und  $|\partial X| > i$ . Wegen  $\partial X \cap X^i \subseteq \partial X^i$  bedeutet dies

$$|\partial X| = i + 1$$

und

$$\partial X = \partial X^i \cup \{x\}.$$

Es sei  $Y$  maximal in  $\mathcal{B}_n$  mit  $X \subseteq Y$  und

$$|\partial Y| = i + 1;$$

diese Menge  $Y$  wird später unser  $X^{i+1}$  werden.

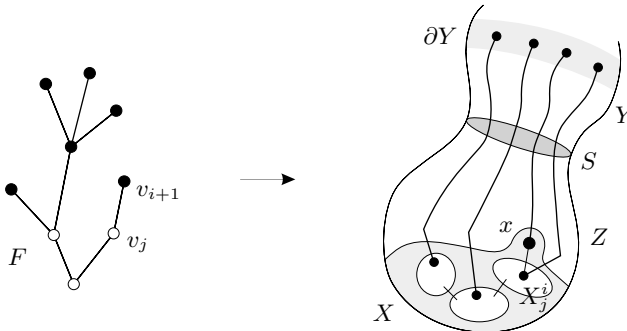


Abb. 10.4.5. Die Konstruktion eines  $F$ -Minors in  $G$

Nach dem Satz von Menger (2.3.1) gibt es eine Menge  $\mathcal{P}$  disjunkter  
 $X$ - $\partial Y$ -Wege in  $G[Y]$  und eine  $X$  von  $\partial Y$  in  $G[Y]$  trennende Ecken-  
 menge  $S \subseteq Y$ , die von jedem Weg aus  $\mathcal{P}$  genau eine Ecke und sonst keine  
 Ecken enthält. Es sei  $Z$  die Vereinigung von  $S$  mit den Eckenmengen  
 der Komponenten von  $G - S$ , die  $X$  treffen. Offenbar gilt  $X^i \subsetneq X \subseteq Z$ ;  
 wir zeigen, daß sogar

$$X \subseteq Z \subseteq Y$$



gilt. Es sei  $z \in Z$  gegeben. Liegt  $z$  in  $S$ , so gilt  $z \in Y$  nach Wahl von  $S$ . Anderenfalls ist  $z$  von  $X$  durch einen Weg erreichbar, der  $S$  vermeidet. Läge  $z$  nicht in  $Y$ , so enthielte dieser Weg wegen  $X \subseteq Y$  einen  $X$ - $\partial Y$ -Weg, der ganz in  $G[Y]$  liegt und somit  $S$  trifft (nach Wahl von  $S$ ), ein Widerspruch.

Aus  $Z \subseteq Y \in \mathcal{B}_n$  und  $\partial Z = S$  folgt mit Lemma 10.4.6, daß  $Z$  in  $\mathcal{B}_n$  liegt. Nach (iii) gilt damit  $i < |\partial Z| = |S| = |\mathcal{P}|$ . Nach Definition von  $\mathcal{P}$  enthält jeder Weg aus  $\mathcal{P}$  eine Ecke von  $\partial X$ . Es gilt also  $i < |\mathcal{P}| \leq |\partial X| = i + 1$  und somit

$$|\mathcal{P}| = i + 1,$$

d.h. die Wege aus  $\mathcal{P}$  verbinden  $\partial X$  und  $\partial Y$  bijektiv.

Wir definieren jetzt  $\mathcal{X}^{i+1}$ . Für  $1 \leq k \leq i$  sei  $X_k^{i+1} := X_k^i \cup V(P_k)$ , wobei  $P_k$  der Weg aus  $\mathcal{P}$  ist, der die nach (ii) eindeutig bestimmte Ecke von  $\partial X^i$  in  $X_k^i$  enthält. Entsprechend sei  $X_{i+1}^{i+1}$  die Eckenmenge des  $x$  enthaltenden Weges aus  $\mathcal{P}$ , und schließlich sei  $X_0^{i+1} := Y \setminus (X_1^{i+1} \cup \dots \cup X_{i+1}^{i+1})$ . Damit ist in der Tat

$$X^{i+1} = Y.$$

Für  $i + 1$  gilt dann (i) nach Wahl von  $x$ , (ii) wegen  $X^{i+1} = Y$  nach Definition von  $\mathcal{P}$ , und (iii) nach Wahl von  $Y = X^{i+1}$ , zusammen mit  $X^i \subseteq Y$  und (iii) für  $i$ .

Wie bereits bemerkt, folgt  $F \preccurlyeq G$  aus der Definition von  $X$  im Falle  $i = n$ . □

## 10.5 Der Minorensatz

Erbliche Grapheneigenschaften treten verschiedentlich in natürlicher Weise in der Graphentheorie auf. Das vielleicht offensichtlichste Beispiel ist die Plättbarkeit, sowie entsprechend die – analog definierte – Einbettbarkeit in irgendeine fest vorgegebene Fläche.

Plättbarkeit ist darstellbar als  $\text{Forb}_{\preccurlyeq}(K^5, K_{3,3})$ , nach dem Satz von Kuratowski. Dies ist eine *gute Charakterisierung* im folgenden Sinne. Möchten wir jemanden von der Nichtplättbarkeit eines Graphen  $G$  überzeugen, so können wir dies einfach anhand eines in  $G$  enthaltenen  $MK^5$  oder  $MK_{3,3}$  tun: nach dem Satz von Kuratowski enthält jeder nicht plättbare Graph ein solches “Zertifikat” seiner Nichtplättbarkeit. Ist andererseits  $G$  plättbar, so ist auch dies leicht nachweisbar: als Zertifikat seiner Plättbarkeit brauchen wir nur eine konkrete Zeichnung von  $G$  vorzulegen. Unsere simple Proposition 10.4.2 ist ein weiteres typisches Beispiel für diese Situation: hat ein Graph die dort charakterisierte Eigenschaft, so können wir dies durch Angabe einer Baumzerlegung der

Weite  $< 3$  nachweisen; hat er sie nicht, so können wir dies an einem  $MK^4$ -Teilgraphen festmachen.

Sätze dieser Art, die eine erbliche Grapheneigenschaft  $\mathcal{G}$  durch eine Menge  $\mathcal{X}$  verbotener Minoren charakterisieren, gehören vielleicht zu den reizvollsten Sätzen der Graphentheorie. Wie wir in Proposition 10.4.1 sahen, gibt es stets eine solche Darstellung: im Prinzip können wir als  $\mathcal{X}$  einfach das Komplement  $\overline{\mathcal{G}}$  von  $\mathcal{G}$  wählen. Andererseits ist eine solche Darstellung umso attraktiver, je kleiner und überschaubarer  $\mathcal{X}$  ausfällt. Und es zeigt sich, daß es in der Tat zu jedem erblichen  $\mathcal{G}$  eine eindeutig bestimmte kleinste Menge  $\mathcal{X}$  verbotener Minoren gibt: die Menge

$$\mathcal{X}_{\mathcal{G}} := \{ X \mid X \text{ ist } \preceq\text{-minimal in } \overline{\mathcal{G}} \}$$

erfüllt  $\mathcal{G} = \text{Forb}_{\preceq}(\mathcal{X})$  und ist in jeder anderen solchen Menge  $\mathcal{X}$  enthalten.

**Proposition 10.5.1.** *Es gilt  $\mathcal{G} = \text{Forb}_{\preceq}(\mathcal{X}_{\mathcal{G}})$ , und  $\mathcal{X}_{\mathcal{G}} \subseteq \mathcal{X}$  für jede Menge  $\mathcal{X}$  mit  $\mathcal{G} = \text{Forb}_{\preceq}(\mathcal{X})$ .*  $\square$

Offenbar sind die Graphen in  $\mathcal{X}_{\mathcal{G}}$  bezüglich der Minorenrelation  $\preceq$  unvergleichbar. Der *Minorensatz* von Robertson und Seymour besagt nun, daß jede Menge  $\preceq$ -unvergleichbarer Graphen endlich ist:

**Satz 10.5.2.** (Minorensatz; Robertson & Seymour)  
*Die endlichen Graphen sind durch die Minorenrelation  $\preceq$  wohlquasi-geordnet.*

Insbesondere ist also jede Menge  $\mathcal{X}_{\mathcal{G}}$  endlich. Der Minorensatz impliziert somit:

**Korollar 10.5.3.** *Jede erbliche Grapheneigenschaft ist durch endlich viele verbotene Minoren darstellbar.*  $\square$

Als Spezialfall von Korollar 10.5.3 erhalten wir, zumindest im Prinzip, für jede Fläche eine Charakterisierung vom Kuratowski-Typ:

**Korollar 10.5.4.** *Zu jeder Fläche  $S$  gibt es ein  $n \in \mathbb{N}$  und Graphen  $X_1, \dots, X_n$ , so daß  $\text{Forb}_{\preceq}(X_1, \dots, X_n)$  genau die in  $S$  einbettbaren Graphen enthält.*  $\square$

Explizit sind die verbotenen Minoren bislang nur für eine einzige Fläche außer der Ebene bekannt, für die Projektive Ebene: es sind 35 an der Zahl. Mit wachsendem Geschlecht der Fläche wächst auch die Anzahl der verbotenen Minoren rasch (siehe Übungen).

Der Beweis des Minorensatzes füllt ein Buch oder zwei; die ihn enthaltenden Originalarbeiten sind gegenwärtig (1996) noch nicht vollständig erschienen. Trotz seiner Komplexität in der Durchführung ist der Grundgedanke des Beweises jedoch ganz einfach. Zu zeigen ist, daß jede unendliche Folge

$$G_0, G_1, G_2, \dots$$

endlicher Graphen ein gutes Paar enthält, also zwei Graphen  $G_i \preceq G_j$  mit  $i < j$ . Nun dürfen wir annehmen, daß  $G_0 \not\preceq G_i$  gilt für alle  $i \geq 1$  – sonst wären wir fertig. Damit liegen aber all die Graphen  $G_1, G_2, \dots$  in  $\text{Forb}_{\preceq}(G_0)$ , und wir können die Struktur der Graphen aus  $\text{Forb}_{\preceq}(G_0)$  ausnutzen, um ein gutes Paar zu finden!

Für den Spezialfall, daß  $G_0$  plättbar ist, haben wir bereits gesehen, wie dies geht: die Graphen in  $\text{Forb}_{\preceq}(G_0)$  haben dann nach Satz 10.4.3 beschränkte Baumweite und sind somit nach Satz 10.3.6 wohlquasi-geordnet. Allgemein brauchen wir nur den Fall  $G_0 = K^n$  zu betrachten: wegen  $G_0 \preceq K^n$  (für  $n := |G_0|$ ) dürfen wir annehmen, daß  $K^n \not\preceq G_i$  gilt für alle  $i \geq 1$ .

Der Beweis ist nun vom Ansatz her analog zu dem erwähnten Spezialfall: auch die Graphen in  $\text{Forb}_{\preceq}(K^n)$  sind durch ihre Baumzerlegungen charakterisierbar, und wiederum hilft ihre Baumstruktur wie im Satz von Kruskal beim Beweis der Wohlquasi-geordnetheit. Die Teile der Baumzerlegungen sind jetzt jedoch nicht mehr in ihrer Ordnung beschränkt, sondern in ihrer Feinstruktur. Grob gesprochen existiert zu jedem  $n$  eine endliche Menge  $\mathcal{S}$  geschlossener Flächen, so daß jeder Graph ohne  $K^n$ -Minor eine simpliziale Baumzerlegung in Teile hat, von denen jeder fast in eine der Flächen  $S \in \mathcal{S}$  einbettbar ist. (Hinter dem Wort “fast” verbirgt sich ein Maß an Unordnung, das von  $n$  abhängt, nicht aber von dem einzubettenden Graphen.) Nach einer Verallgemeinerung von Satz 10.3.6 – und damit des Satzes von Kruskal – reicht es nun im wesentlichen, zu zeigen, daß die Menge all dieser möglichen Teile wohlquasi-geordnet ist: dann sind es auch die Graphen mit Baumzerlegungen in diese Teile. Da  $\mathcal{S}$  endlich ist, hat aber jede unendliche Folge solcher Teile eine unendliche Teilfolge, deren Glieder alle (fast) in die gleiche Fläche  $S \in \mathcal{S}$  einbettbar sind. Es reicht also zu zeigen, daß die in eine vorgegebene geschlossene Fläche  $S$  einbettbaren Graphen stets wohlquasi-geordnet sind.

Dies beweist man durch Induktion nach dem Geschlecht der Fläche (genauer: durch Induktion nach  $2 - \chi(S)$ , wobei  $\chi(S)$  die Euler-Charakteristik von  $S$  ist), mit dem schon vertrauten Ansatz: ist  $H_0, H_1, H_2, \dots$  eine unendliche Folge in  $S$  einbettbarer Graphen, so dürfen wir annehmen, daß keiner der Graphen  $H_1, H_2, \dots$  einen  $H_0$ -Minor hat. Ist  $S = S^2$ , so haben wir unseren bereits betrachteten Fall, daß  $H_0$  plättbar ist; dies ist der Induktionsanfang. Zum Induktionsschritt sei nun  $S \neq S^2$ . Auch jetzt beschränkt das Verbot eines  $H_0$ -Minors die Struktur der Graphen

$H_1, H_2, \dots$ , wenn auch diesmal topologisch: jedes  $H_i$  mit  $i \geq 1$  besitzt eine Einbettung in  $S$ , die eine geeignete nicht kontrahierbare geschlossene Kurve  $C_i \subseteq S$  in nur beschränkt vielen Ecken (und in keiner Kante) trifft, sagen wir in  $X_i \subseteq V(H_i)$ . (Die Schranke für  $|X_i|$  hängt von  $H_0$  ab, aber nicht von  $H_i$ .) Indem wir  $S$  entlang  $C_i$  aufschneiden und an die ein oder zwei entstandenen Randkurven jeweils eine Scheibe annähen, erhalten wir ein oder zwei geschlossene Flächen geringeren Geschlechts (größerer Euler-Charakteristik). Entsteht beim Aufschneiden von  $S$  nur eine neue Fläche  $S_i$ , so zählt unsere Einbettung von  $H_i - X_i$  in  $S_i$  noch als eine Fast-Einbettung von  $H_i$  in  $S_i$  (da  $X_i$  klein ist). Tritt dies für unendlich viele  $i$  ein, so ist auch die Fläche  $S_i$  dieselbe für unendlich viele  $i$ , und wir haben nach Induktionsannahme unter den entsprechenden  $H_i$  ein gutes Paar. Entstehen andererseits für unendlich viele  $i$  jeweils zwei Flächen  $S'_i$  und  $S''_i$  (oBdA dieselben beiden), so zerfällt  $H_i$  entsprechend in darin eingebettete Teilgraphen  $H'_i$  und  $H''_i$ , mit  $V(H'_i \cap H''_i) = X_i$ . Die Menge all dieser Teilgraphen (für alle  $i$  zusammen) ist wieder nach Induktionsannahme wohlquasi geordnet, und die Paare  $(H'_i, H''_i)$  sind es nach Lemma 10.1.3. Nach einer Verschärfung des Lemmas, die außer den Graphen  $H'_i$  und  $H''_i$  auch berücksichtigt, wie  $X_i$  in ihnen liegt, finden wir schließlich Indizes  $i < j$ , für die wir aus  $H'_i \preceq H'_j$  und  $H''_i \preceq H''_j$  überdies auf  $H_i \preceq H_j$  schließen können – und der Beweis des Minorensatzes ist vollständig.

Wir bemerken noch, daß der Minorensatz auch auf die algorithmische Graphentheorie ganz fundamentale Auswirkungen hat. Mit ihrem Baumzerlegungsstruktursatz für die Graphen in  $\text{Forb}_{\preceq}(K^n)$  haben Robertson und Seymour gezeigt, daß die Existenz eines gegebenen Minors in einem Graphen algorithmisch im Prinzip “schnell” zu überprüfen ist: zu jedem Graphen  $X$  existiert ein Polynom<sup>3</sup>  $P$  und ein Algorithmus, der zu einem Graphen auf  $n$  Ecken stets in höchstens  $P(n)$  Schritten entscheidet, ob  $X$  ein Minor dieses Graphen ist. Nach dem Minorensatz ist damit jede erbliche Grapheneigenschaft in diesem Sinne polynomiell (sogar in kubischer Zeit) entscheidbar: sind  $X_1, \dots, X_k$  die zu der Eigenschaft gehörigen verbotenen Minoren, so brauchen wir zu gegebenem Graphen  $G$  lediglich nacheinander die  $k$  Aussagen  $X_i \preceq G$  zu testen!

Welch einen Fortschritt diese Tatsache für die Komplexitätstheorie<sup>4</sup> von Graphenproblemen bedeutet, läßt sich am folgenden Beispiel ermesen. Ein Graph heißt *knotenfrei*, wenn er eine Darstellung im euklidischen Raum  $\mathbb{R}^3$  besitzt, in der kein Kreis des Graphen einen nicht trivialen Knoten bildet. Bis zum Beweis des Minorensatzes war es ein

<sup>3</sup> sogar ein Polynom dritten Grades – wenn auch mit enormer von  $X$  abhängiger Konstante

<sup>4</sup> Als *Komplexitätstheorie* bezeichnet man die Untersuchungen der “Komplexität” algorithmischer Probleme, ihrer Lösbarkeit durch möglichst schnelle Algorithmen. Die Komplexitätstheorie liegt im Grenzgebiet zwischen Mathematik und theoretischer Informatik.

bekanntes Problem der algorithmischen Topologie, ob die Frage nach der Knotenfreiheit eines Graphen entscheidbar sei, d.h. ob es *irgendeinen* Algorithmus gebe (egal wie langsam), der zu jedem gegebenen Graphen entscheiden kann, ob dieser Graph knotenfrei ist.

Bis heute ist kein solcher Algorithmus bekannt. Die Eigenschaft der Knotenfreiheit ist aber, wie man “sieht”, erblich: die Kontraktion einer Kante wird keinen Knoten schaffen, wo vorher keiner war. Nach dem Minorensatz *existiert* daher ein Algorithmus, der die Knotenfreiheit entscheidet – und sogar ein Algorithmus mit polynomieller (kubischer) Laufzeit, d.h. ein Algorithmus einer theoretisch ganz geringen Komplexitätsstufe!

So spektakulär die genannten unvermittelten Lösungen ehemals offener Probleme durch den Minorensatz auch sein mögen – man wird seiner Bedeutung nicht gerecht, wenn man sie auf diese Korollare reduziert. Mindestens ebenso wichtig sind die zum Beweis des Satzes ganz neu entwickelten Methoden der Behandlung von Minoren: Methoden, die in diesem Kapitel überwiegend nicht einmal angeklungen sind. Dem interessierten Leser sei das Studium dieser Methoden empfohlen; sie werden die Graphentheorie auf absehbare Zeit prägen.

## Übungen

1. Auf einer Menge  $X$  sei eine Quasiordnung  $\leq$  definiert. Zwei Elemente  $x, y \in X$  seien *äquivalent*, wenn sowohl  $x \leq y$  als auch  $y \leq x$  gilt. Zeige, daß dies in der Tat eine Äquivalenzrelation auf  $X$  ist, und daß  $\leq$  auf der Menge der Äquivalenzklassen eine Halbordnung induziert.
2. Auf einer Menge  $A$  sei eine Quasiordnung  $\leq$  definiert, und für Teilmengen  $X \subseteq A$  sei

$$\text{Forb}(X) := \{ a \in A \mid a \not\leq x \text{ für alle } x \in X \}.$$

Zeige, daß  $\leq$  genau dann eine Wohlquasiordnung auf  $A$  ist, wenn jede unter  $\geq$  abgeschlossene Teilmenge  $B$  (d.h. jedes  $B \subseteq A$  mit  $x \leq y \in B \Rightarrow x \in B$ ) die Form  $B = \text{Forb}(X)$  hat für ein endliches  $X \subseteq A$ .

3. Beweise Proposition 10.1.1 und Korollar 10.1.2 direkt, ohne den Satz von Ramsey zu benutzen.
4. Für zwei Teilmengen  $A, B$  einer Menge  $X$  mit Halbordnung  $\leq$  gelte  $A \leq' B$ , wenn eine *ordnungserhaltende* Injektion  $f: A \rightarrow B$  mit  $a \leq f(a)$  für alle  $a \in A$  existiert. Gilt Lemma 10.1.3 entsprechend auch mit  $\leq'$ ?
5. Zeige, daß die im Text definierte Relation  $\leq$  zwischen Wurzelbäumen in der Tat eine Quasiordnung ist.
6. Zeige, daß die endlichen Bäume durch die Teilgraphenrelation nicht wohlquasi geordnet sind.

7. Im letzten Schritt des Beweises vom Satz von Kruskal wird bei der topologischen Einbettung von  $T_m$  in  $T_n$  die Wurzel von  $T_m$  auf die Wurzel von  $T_n$  abgebildet. Nehmen wir induktiv an, daß auch bei der Einbettung der Bäume aus  $A_m$  in die Bäume aus  $A_n$  stets Wurzeln auf Wurzeln abgebildet werden, so erhalten wir ganz analog zum Beweis von Kruskal einen Beweis, daß die endlichen Wurzelbäume durch die Teilgraphenrelation (bei Abbildung von Wurzeln auf Wurzeln) wohlquasigeordnet sind. Wo liegt der Fehler?
- 8.<sup>+</sup> Zeige, daß die endlichen Graphen durch die topologische Minorenrelation nicht wohlquasigeordnet sind.
- 9.<sup>+</sup> Ist die Klasse  $\{G \mid G \not\supseteq P^k\}$  durch die Teilgraphenrelation wohlquasigeordnet?
10. Zeige, daß ein Graph genau dann die Baumweite höchstens 1 hat, wenn er ein Wald ist.
11. Es sei  $G$  ein Graph,  $T$  eine Menge, und  $(V_t)_{t \in T}$  eine Familie von Teilmengen von  $V(G)$ , die die Bedingungen (T1) und (T2) aus der Definition einer Baumzerlegung erfüllt. Zeige, daß genau dann ein Baum auf  $T$  existiert, der (T3) wahr macht, wenn  $T$  eine Aufzählung  $t_1, \dots, t_n$  hat, bei der es zu jedem  $k = 2, \dots, n$  ein  $j < k$  gibt mit  $V_{t_k} \cap \bigcup_{i < k} V_{t_i} \subseteq V_{t_j}$ .  
(Die angegebene Bedingung ist in der Praxis meist einfacher zu überprüfen als (T3). Sie ist daher oft nützlich bei der Konstruktion einer Baumzerlegung in eine vorgegebene Menge von Teilen.)
12. Beweise die folgende Umkehrung von Lemma 10.3.1: erfüllt  $(T, \mathcal{V})$  die Bedingung (T1) und die Aussage des Lemmas, so ist  $(T, \mathcal{V})$  eine Baumzerlegung von  $G$ .
13. Kann die Baumweite einer Unterteilung eines Graphen  $G$  kleiner sein als  $\text{tw}(G)$ ? Kann sie größer sein?
14. Es sei  $(T, (V_t)_{t \in T})$  eine Baumzerlegung des Graphen  $G$ . Für jede Ecke  $v \in G$  sei  $T_v := \{t \in T \mid v \in V_t\}$ . Zeige, daß  $T_v$  stets zusammenhängend in  $T$  ist. Für welche Untergraphen  $H \subseteq G$  ist auch  $\{t \in T \mid V_t \cap V(H) \neq \emptyset\}$  stets (d.h. für alle Baumzerlegungen) in  $T$  zusammenhängend?
15. Zeige mit Hilfe von Satz 10.3.8, daß das  $k \times k$ -Gitter eine Baumweite von mindestens  $k$  hat, und finde eine Baumzerlegung der Weite genau  $k$ .
- 16.<sup>-</sup> Zeige, daß die Baumweite eines Graphen stets um eins kleiner ist als sein Vernetzungsgrad.
17. Es sei  $\mathcal{B}$  ein Netz maximaler Dichte in einem Graphen  $G$ . Zeige, daß jede Baumzerlegung minimaler Weite von  $G$  genau einen Teil hat, der  $\mathcal{B}$  überdeckt.

- 18.<sup>+</sup> In der zweiten Hälfte des Beweises von Satz 10.3.8 sei  $H'$  die Vereinigung von  $H$  mit den Wegen  $P_1, \dots, P_\ell$ , sowie  $H''$  der aus  $H'$  durch Kontraktion der  $P_i$  gewonnene Graph. Weiter sei  $(T, (W_t'')_{t \in T})$  die Baumzerlegung von  $H''$ , die wie in Lemma 10.3.3 durch die Baumzerlegung induziert wird, die  $(T, (V_t)_{t \in T})$  auf  $H'$  induziert. Identifizieren wir  $H''$  mit  $H$  in der offensichtlichen Weise, so ist  $(T, (W_t'')_{t \in T})$  auch eine Baumzerlegung von  $H$ . Ist dies dieselbe Zerlegung wie die im Beweis definierte Zerlegung  $(T, (W_t)_{t \in T})$  von  $H$ , d.h. gilt  $W_t'' = W_t$  für alle  $t \in T$ ?
19. Zeige, daß jeder Graph mit einer simplizialen Baumzerlegung in  $k$ -färbbare Teile selbst  $k$ -färbbar ist.
20. Es sei  $\mathcal{H}$  eine Menge von Graphen, und  $G$  sei rekursiv aus Elementen von  $\mathcal{H}$  konstruierbar durch Zusammenkleben entlang vollständiger Teilgraphen. Zeige, daß  $G$  eine simpliziale Baumzerlegung in Graphen aus  $\mathcal{H}$  besitzt.
- 21.<sup>+</sup> Ist  $(T, (V_t)_{t \in T})$  eine Baumzerlegung von  $G$  und  $t \in T$ , so bezeichne  $H_t$  den Graphen, der aus  $G[V_t]$  dadurch entsteht, daß wir für jeden Nachbarn  $t'$  von  $t$  in  $T$  je zwei noch nicht benachbarte Ecken in  $V_t \cap V_{t'}$  verbinden; die Graphen  $H_t$  sind die *Torsos* dieser Baumzerlegung. Zeige, daß  $G$  genau dann  $K^5$  nicht zum Minor hat, wenn  $G$  eine Baumzerlegung besitzt, bei der jeder Torso entweder plättbar ist oder isomorph zum Wagner-Graphen  $W$  (Abb. 6.4.1).
- 22.<sup>+</sup> Ein Graph heiße *irreduzibel*, wenn er durch keinen vollständigen Teilgraphen getrennt wird. Jeder endliche Graph  $G$  läßt sich wie folgt rekursiv in irreduzible Untergraphen zerlegen (beginnend mit  $H := G$ ): hat  $H \subseteq G$  einen trennenden vollständigen Teilgraphen  $S$ , so zerlege  $H$  in echte Untergraphen  $H'$  und  $H''$  mit  $H = H' \cup H''$  und  $H' \cap H'' = S$ . Nach der vorletzten Übung hat  $G$  eine simpliziale Baumzerlegung in die hierbei schließlich erhaltenen irreduziblen Untergraphen. Zeige, daß die Menge dieser irreduziblen Teile eindeutig bestimmt ist, wenn  $S$  stets minimal gewählt wird.
- 23.<sup>+</sup> Ist  $\mathcal{F}$  eine Familie von Mengen, so nennt man den Graphen  $G$  auf  $\mathcal{F}$  mit  $XY \in E(G) \Leftrightarrow X \cap Y \neq \emptyset$  den *Schnittgraphen* von  $\mathcal{F}$ . Zeige, daß ein Graph genau dann chordal ist, wenn er isomorph ist zum Schnittgraphen einer Familie von (Eckenmengen von) Teilbäumen eines Baumes.
24. Zeige, daß ein Graph genau dann eine Wegzerlegung in sämtlich vollständige Teile besitzt, wenn er isomorph zu einem Intervallgraphen ist. (Intervallgraphen sind in Übung 37, Kap. 4, definiert.)
25. (Fortsetzung der vorigen Übung)  
Zeige das folgende Analogon zu Korollar 10.3.11 für die Wegbreite: für jeden Graphen  $G$  ist  $\text{pw}(G) + 1$  gleich der geringsten Cliquenzahl eines Intervallgraphen  $H \supseteq G$ .
- 26.<sup>-</sup> Zeige, daß für eine Wegzerlegung  $(V_1, \dots, V_s)$  der Breite  $< n$  stets alle Mengen  $V_1 \cup \dots \cup V_r$  ( $r \leq s$ ) in  $\mathcal{B}_n$  liegen.

27. Es sei  $G$  ein Graph und  $X \subseteq V(G)$  maximal in  $\mathcal{B}_n(G)$ . Zeige  $|\partial X| = n$ .
- 28.<sup>-</sup> Ist die Aussage (\*) im Beweis von Satz 10.4.4 bestmöglich in dem Sinne, daß ein Graph ohne  $F$ -Minor keine Wegbreite  $< |F| - 2$  zu haben braucht?
- 29.<sup>+</sup> Finde zu jedem  $r \in \mathbb{N}$  ein  $k$ , so daß jedes Gitter mit  $k$  zusätzlichen Kanten einen  $K^r$ -Minor enthält, sofern die Enden aller dieser Kanten voneinander und vom Rand des Gitters einen Gitter-Abstand von mindestens  $k$  haben.
30. Betrachte eine erbliche Grapheneigenschaft  $\mathcal{G}$ . Zeige, daß jede Verschärfung der Minorenrelation (wie beispielsweise zur Relation topologischer Minoren) die Anzahl der zur Darstellung von  $\mathcal{G}$  erforderlichen verbotenen Minoren erhöht.
31. Beweise unter Benutzung des Minorensatzes, daß jede erbliche Grapheneigenschaft auch durch endlich viele verbotene topologische Minoren darstellbar ist. Gilt dies auch allgemeiner für jede unter topologischer Minorenbildung abgeschlossene Grapheneigenschaft?
32. Zeige ohne Benutzung des Minorensatzes, daß die chromatische Zahl der Graphen in einer  $\preceq$ -Antikette stets beschränkt ist.
33. Die *self-minor conjecture* von Seymour besagt, daß jeder abzählbar unendliche Graph sein eigener echter Minor sei. Präzisiere diese Aussage, und leite daraus den Minorensatz her.
34. Finde eine von  $g$  abhängige untere Schranke für die Anzahl der verbotenen Minoren, durch die die Einbettbarkeit in eine (orientierbare) Fläche des Geschlechts  $g$  darstellbar ist.  
(Tip: Als *Geschlecht* eines Graphen bezeichnet man das kleinste Geschlecht einer (orientierbaren) Fläche, in die er einbettbar ist. Verwende den Satz, daß das Geschlecht eines Graphen gleich der Summe der Geschlechter seiner Blöcke ist.)

## Notizen

Der Satz, daß die endlichen Bäume durch die topologische Minorenrelation wohlquasi geordnet sind, ist von J.A. Kruskal, Well-quasi ordering, the tree theorem, and Vászonyi's conjecture, *Trans. Amer. Math. Soc.* **95** (1960), 210–225. Unser Beweis, und insbesondere die Beweisidee der *minimal bad sequence* – mit der wir bereits das ursprünglich von Higman stammende Lemma 10.1.3 bewiesen haben – stammt von Nash-Williams.

Nash-Williams verallgemeinerte überdies den Satz von Kruskal auf unendliche Graphen; dies ist eines der tiefsten Resultate der unendlichen Graphentheorie. Für Einzelheiten und weitere Literaturangaben verweisen wir auf Halins Monographie *Graphentheorie*, Darmstadt 1989. Der allgemeine Minorensatz ist falsch im Unendlichen (Thomas 1988); ob die abzählbaren Graphen durch die Minorenrelation wohlquasi geordnet sind, ist ein noch offenes Problem.



Die Begriffe der Baumzerlegung und Baumweite wurden (unter anderer Bezeichnung) zuerst eingeführt und untersucht von R. Halin, *S-functions for graphs*, *J. Geometry* **8** (1976), 171–186; bereits dort findet sich der Satz, daß ebene Gitter beliebig hohe Baumweite haben können. Robertsen & Seymour formulierten die beiden Begriffe, offenbar ohne Halin's Arbeit zu kennen, in Anlehnung an die in Wagners Satz 6.4.4 vorkommenden simplizialen Baumzerlegungen. Letztere werden ausführlich behandelt in R. Diestel, *Graph Decompositions*, Oxford 1990.

Robertson & Seymours Originalbeweis des Minorensatzes ist enthalten in den Nummern IV–VII, IX–XII und XIV–XX ihrer über 20 Arbeiten mit dem Obertitel *Graph Minors*. Diese Arbeiten erscheinen seit 1983 im *Journal of Combinatorial Theory B*. Eine Gesamtdarstellung des Beweises plant auch B.A. Reed, *The Graph Minors Project* (in Vorbereitung).

Von den in unserem Kapitel zitierten Resultaten ist Satz 10.3.6 aus Graph Minors IV, Satz 10.4.3 aus Graph Minors V, und Satz 10.4.4 aus Graph Minors I. Einige Beweise der Reihe sind später wesentlich gestrafft worden. Der gegenwärtig kürzeste Beweis von Satz 10.4.3 findet sich in R. Diestel, K.Yu. Gorbunov, T.R. Jensen & C. Thomassen, *Highly connected sets and the excluded grid theorem*, *J. Combin. Theory B* **75** (1999), 61–73; er ist in der zweiten englischen Ausgabe dieses Buchs (1999) wiedergegeben. Unser Beweis von Satz 10.4.4 stammt aus R. Diestel, *Graph Minors I: a short proof of the path width theorem*, *Combinatorics, Probability and Computing* **4** (1995), 27–30.

Satz 10.3.8 stammt von P.D. Seymour & R. Thomas, *Graph searching and a min-max theorem for tree-width*, *J. Combin. Theory B* **58** (1993), 22–33; unser Beweis ist eine Vereinfachung des Originalbeweises. B.A. Reed, *Tree-width and tangles: a new connectivity measure and some applications*, in (R.A. Bailey, Hrsg.): *Surveys in Combinatorics*, Cambridge University Press 1997, 87–162, gibt eine hilfreiche – wenn auch leider nicht immer fehlerfreie – Einführung in die Minorentheorie mit besonderem Augenmerk auf Baumzerlegungen, einschließlich algorithmischer Gesichtspunkte. Der Satz 10.3.9 über schlanke Baumzerlegungen ist von R. Thomas, *A Menger-like property of tree-width. The finite case*, *J. Combin. Theory B* **48** (1990), 67–76.

Die 35 bei Einbettungen in die Projektive Ebene verbotenen Minoren wurden bestimmt von D. Archdeacon, *A Kuratowski theorem for the projective plane*, *J. Graph Theory* **5** (1981), 243–246. Eine obere Schranke für die Anzahl der verbotenen Minoren zu beliebiger gegebener Fläche gibt P.D. Seymour, *A bound on the excluded minors for a surface*, *J. Combin. Theory B* (to appear). B. Mohar, *Embedding graphs in an arbitrary surface in linear time*, *Proc. 28th Ann. ACM STOC* (Philadelphia 1996), 392–397, hat zu jeder Fläche einen linearen Algorithmus entwickelt, der die Einbettbarkeit eines Input-Graphen in diese Fläche entscheidet. Als Korollar ergibt dies einen unabhängigen und konstruktiven Beweis des “allgemeinen Kuratowski-Satzes”, Korollar 10.5.4. Einen unabhängigen kurzen Beweis dieses Korollars, der lediglich auf Graph Minors IV & V aufbaut, gibt C. Thomassen, *A simpler proof of the excluded minor theorem for higher surfaces*, *J. Combin. Theory B* **70** (1997), 306–311.

Graph Minors XIII gibt zu jedem gegebenen Graphen  $X$  einen expliziten kubischen Algorithmus an, der die Frage  $X \preceq G$  für Input-Graphen  $G$  entscheidet. Die Konstanten in dem Polynom, das die Laufzeit dieses Algorithmus

beschränkt, hängen von  $X$  ab, sind aber jeweils konstruktiv nach oben beschränkt. Eine Übersicht über die algorithmische Aspekte der Minorentheorie gibt D. Johnson in seiner NPC-Kolumne im *J. Algorithms* **8** (1987), 285–303.

Der Begriff einer *guten Charakterisierung* einer Grapheneigenschaft wurde geprägt von J. Edmonds, Minimum partition of a matroid into independent subsets, *J. Research of the National Bureau of Standards (B)* **69** (1965) 67–72. In der Sprache der Komplexitätstheorie ist eine Charakterisierung *gut*, wenn sie zu gegebenem Graphen  $G$  die Äquivalenz von zwei Aussagen über  $G$  zum Inhalt hat, von denen die eine die Existenz eines Zertifikats für eine Eigenschaft von  $G$  behauptet, die andere die Nichtexistenz eines Zertifikats für die entgegengesetzte Eigenschaft. Eine gute Charakterisierung hat also stets zum Korollar, daß das Entscheidungsproblem, ob ein Graph die charakterisierte Eigenschaft hat, in  $\text{NP} \cap \text{co-NP}$  liegt.



# Lösungshinweise für alle Übungen

---

Die hier gegebenen Hinweise sollen all denjenigen den Einstieg in eine mögliche Lösung der jeweiligen Aufgabe doch noch ermöglichen, die sich bereits eine zeitlang vergebens mit dieser Aufgabe beschäftigt haben. Ohne solch vorheriges eigenes Bemühen wird in der Regel der Hinweis nicht allzu verständlich sein. Überdies haben gerade die interessanteren Aufgaben meist mehrere mögliche Lösungen; wer voreilig in den Hinweisen stöbert, wird auf die schönste Lösung vielleicht nicht mehr kommen. . .

## Hinweise zu Kapitel 0

1. – Wieviele Kanten gehen von jeder Ecke aus?
2. Durchschnittsgrad und Kantenzahl: welche Eckengrade kommen vor? Durchmesser: wie kann man den Abstand zwischen Ecken im Graphen durch Betrachten der entsprechenden 0–1-Folgen bestimmen? Taillenweite: besitzt der Graph einen Kreis der Länge drei? Umfang: Zerlege den  $n$ -dimensionalen Würfel in zwei  $(n - 1)$ -dimensionale Würfel und benutze Induktion.
3. Betrachte, wie  $P$  und  $C$  einander schneiden. Wo treten hier Kreise auf?
4. – Existieren Graphen  $G$ , für die in Proposition 0.3.2 Gleichheit gilt?
5. Schätze die Abstände in  $G$  mittels einer zentralen Ecke ab.
6. – Sonst entsteht ein Widerspruch zu der Definition – wie genau?
7. – Offenbar reicht es zu zeigen, daß der Graph zwei unabhängige Wege zwischen zwei fest gewählten Ecken enthält. Dies gelingt besonders leicht bei geschickter Wahl der beiden Ecken.

8. (i) Benutze die Definitionen.  
(ii) Zeige mit Induktion nach  $n$ , daß  $\kappa \geq n$  ist: Zerlege den  $n$ -dimensionalen Würfel in zwei  $(n-1)$ -dimensionale Würfel und zeige induktiv, daß jeder durch Löschung von  $< n$  Ecken entstehende Teilgraph noch zusammenhängend ist.
9. Für die erste Ungleichung betrachte die Endecken der Kanten einer trennenden Kantenmenge der Ordnung  $\lambda(G)$ . Die zweite Ungleichung folgt direkt aus der Definition von  $\lambda(G)$ .
- 10.<sup>-</sup> Suche Gegenbeispiele für  $k = 1$ .
11. Formuliere (i) und (ii) als Existenzaussagen zweier Funktionen  $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ . Um ihre Äquivalenz zu zeigen, drücke jeweils die eine Funktion mittels der anderen aus. Zeige, daß (iii) häufiger gilt als (i) und (ii), und finde eine Zusatzbedingung zu (iii), die dem abhilft.
- 12.<sup>+</sup> Versuche, den Induktionsbeweis allein mit der Annahme von  $\varepsilon \geq 2k$  durchzuführen. Woran scheitert das?
13. Zeige (i)  $\Rightarrow$  (ii)  $\Rightarrow$  (iii)  $\Rightarrow$  (iv)  $\Rightarrow$  (i) aus den Definitionen der auftretenden Begriffe.
14. Betrachte Wege, die eine Ecke maximalen Grades als gemeinsame Endecke haben.
15. Satz 0.5.1.
16. Induktion.
17. Am einfachsten geht's mit Induktion nach  $|T|$ ; was für eine Ecke könnte man im Induktionsschritt am besten fortlassen?
18. Eine Möglichkeit, aber nicht die einzige, ist Induktion nach  $|T|$ .
19. Zähle die Kanten.
20. Wie gewinnt man aus einem nicht induzierten Kreis ungerader Länge einen induzierten Kreis ungerader Länge?
- 21.<sup>+</sup> Benutze Proposition 0.2.2. Zerlege den gefundenen Teilgraphen so in zwei Teile, daß jede Ecke viele Nachbarn im anderen Teil hat.
22. Die Antisymmetrie folgt im endlichen Fall aus Anzahlgründen – und damit hapert es in der Unendlichkeit ja gelegentlich. Hier auch?
23. Versuche, den Beweis von Satz 0.8.1 nachzuahmen.
- 24.<sup>-</sup> Benutze Proposition 0.9.2.
25. Weshalb erzeugen *alle* Schnitte der Form  $E(v)$  den Schnittraum? Können wir dann einen davon fortlassen? Oder sogar zwei?
26. Betrachte zunächst den Fall, daß der Graph ein Kreis ist.
27. Eckengrade.
28. Induktion nach  $|D \cap E(T)|$  zu gegebenem Schnitt  $D$ .
29. Verwende Satz 0.9.6.

## Hinweise zu Kapitel 1

1. Vergleiche die gegebene Paarung mit einer Paarung maximaler Mächtigkeit.
2. Suche Verbesserungswege zu den Ecken, die noch nicht gepaart sind.
- 3.<sup>+</sup> Ist  $S \subsetneq S' \subseteq A$  mit  $|S| = |N(S)|$ , so sichert die Heiratsbedingung im endlichen Fall, daß entsprechend  $N(S) \subsetneq N(S')$  gilt: wächst die Menge  $S$ , so bekommt sie auch mehr Nachbarn. Gilt dies auch im Unendlichen?
4. Benutze den Heiratssatz.
5. Konstruiere einen bipartiten Graphen, in dem geeignet viele Kopien der Mengen  $A_i$  die eine Partitionsmenge bilden und  $A$  die andere Partitionsmenge ist. Definiere die Kanten des Graphen so, daß eine Anwendung des Heiratssatzes das gewünschte Ergebnis liefert.
- 6.<sup>+</sup> Zur Konstruktion der im Tip genannten Ketten finde mit dem Heiratssatz für jedes  $k < n/2$  eine Injektion  $\varphi$  von der Menge  $A$  der  $k$ -elementigen in die Menge  $B$  der  $(k+1)$ -elementigen Teilmengen von  $X$  mit  $Y \subseteq \varphi(Y)$  für alle  $Y \in A$ .
7. Entscheide zuerst, wo die Blätter unterzubringen sind: in faktorkritischen Komponenten oder in  $S$ ?
8. Unterscheide zwischen den Fällen  $|S| \leq 1$  und  $|S| \geq 2$ .
9. Der Fall  $S = \emptyset$  ist einfach. Im anderen Fall suche eine Ecke, die von jeder Paarung maximaler Mächtigkeit getroffen wird. Was folgt hieraus für die anderen Ecken?
10. Für die Rückrichtung nimm an, daß  $G$  keine  $k$  unabhängigen Kanten enthält, und wende den Satz 1.2.1 von Tutte auf  $G * K^{|G|-2k}$  an. Alternativ verwende die nach Satz 1.2.3 angestellten Überlegungen.
- 11.<sup>-</sup> Korollar 1.2.2.
12. Es sei  $G$  bipartit mit Eckenpartition  $(A, B)$  und erfülle die Heiratsbedingung. Reduziere zuerst auf den Fall  $|A| = |B|$ . Um die Voraussetzung des Tutte-Satzes nachzuweisen, schätze  $|S|$  nach unten ab durch die Anzahl der Komponenten von  $G - S$  ungerader Ordnung, die mehr Ecken aus  $A$  als aus  $B$  enthalten bzw. umgekehrt.
- 13.<sup>-</sup> Betrachte eine Wegüberdeckung minimaler Mächtigkeit.
14. Richte alle Kanten von  $A$  nach  $B$ .
- 15.<sup>-</sup> Benutze den Satz von Dilworth.
- 16.<sup>-</sup> Beginne mit der Menge aller minimalen Elemente von  $P$ .
17. Betrachte die Elemente von  $A$  als unterhalb ihrer Nachbarn in  $B$  liegend.
- 18.<sup>+</sup> Definiere  $(x, y) \leq (x', y')$  als  $(x \leq x'$  und  $y \leq y')$ .

## Hinweise zu Kapitel 2

- 1.− Wie sind “Komponente” und “trennen” definiert?
2. Fasse in Worte, was die Abbildung nahelegt.
3. Für die erste Frage verwende Übung 1. Die zweite ist eine einfache Rechenaufgabe, die schon die Abbildung nahelegt.
4. Nur der erste Teil der Aufgabe erfordert Nachdenken; der zweite folgt dann durch Symmetrie aus dem ersten. Für den ersten Teil betrachte eine Komponente von  $G - X$ , die von  $X'$  nicht getroffen wird, und beachte hierzu Übung 1. Wo liegt dann  $X'$ ? Kann  $X'$  noch die in der Aufgabe vorausgesetzten Eigenschaften haben?
- 5.− Angenommen, ein Block ist kein maximaler 2-zusammenhängender Teilgraph: woran kann dies scheitern? Was folgt dann weiter?
6. Leite den Zusammenhang des Block-Graphen vom Zusammenhang des Graphen selbst ab, seine Kreislosigkeit von der Maximalität der Blöcke.
7. Beweise die Aussage induktiv mit Proposition 2.1.2. Alternativ dazu wähle einen Kreis, der die eine der beiden Ecken enthält und zur anderen einen möglichst geringen Abstand hat. Zeige dann, daß dieser Abstand nicht positiv sein kann.
8. Im gleichen Block zu liegen ist eine Äquivalenzrelation für Kanten; siehe Übung 5.
9. Induktion gemäß Proposition 2.1.2.
10. Ist  $G/xy$  nicht 3-zusammenhängend, dann betrachte getrennt die Fälle, daß  $v_{xy}$  innerhalb bzw. außerhalb eines höchstens 2-elementigen Trenners liegt.
11. (i) Betrachte die mit einem kleineren Trenner inzidenten Kanten.  
(ii) Daß jeder wie angegeben konstruierte Graph kubisch und 3-zusammenhängend ist, folgt induktiv entlang der Konstruktion. Für die andere Richtung betrachte einen maximalen Teilgraphen  $TX \subseteq G$ , so daß  $X$  konstruierbar ist, und zeige  $H = G$ .
- 12.+ Wenn die Behauptung wahr ist, so können wir fast jeden 3-zusammenhängenden Graphen in einen kleineren 3-zusammenhängenden Graphen verwandeln, indem wir eine geeignete Ecke löschen und dadurch entstehende Ecken des Grades 2 unterdrücken. (Warum?) Für welche Graphen ist dies möglich?
- 13.− Sind sogar alle nach dem Satz von Menger naheliegenden Wahlen von  $X$  und  $\mathcal{P}$  geeignet?
14. Prüfe die Induktion.
15. Löse die vorige Übung zuerst.
16. Wähle die disjunkten  $A$ - $B$ -Wege in  $L(G)$  minimal.
17. Betrachte einen längsten Kreis. Wie sind die Ecken außerhalb des Kreises mit ihm verbunden?
18. Betrachte einen Kreis, der möglichst viele der gegebenen  $k$  Ecken enthält. Können wir eine ausgelassene Ecke mit in den Kreis einbinden?

19. Betrachte den Graphen aus dem Tip. Zeige, daß es zu einer Menge von Ecken dieses Graphen, die alle  $H$ -Wege trifft (aber  $H$  nicht), eine entsprechende Teilmenge von  $E(G) \setminus E(H)$  in  $G$  gibt. Zeige dann, daß man aus zwei kreuzungsfreien  $H$ -Wegen im neuen Graphen zwei kantendisjunkte  $H$ -Wege in  $G$  gewinnen kann.
20. <sup>-</sup> Zu wievielen Wegen kann jeder  $K^{2m+1}$  beitragen?
21. Es reicht, die Grade der Ecken aus  $B$  gekonnt zu wählen.
22. <sup>+</sup> Wähle als  $H$  den (kantenlosen) Graphen auf den neuen Ecken. Betrachte die Mengen  $X$  und  $F$ , die nach dem Satz von Mader existieren, falls der neue Graph nicht mindestens  $|G|/2$  kreuzungsfreie  $H$ -Wege enthält. Hat  $G$  keinen 1-Faktor, so zeige, daß  $X$  die Rolle der Menge  $S$  im Satz von Tutte spielen kann.
23. Klein ist schön.
24. <sup>-</sup> Werden zwei Ecken  $s, t$  durch weniger als  $2k - 1$  Ecken getrennt, dann erweitere  $\{s\}$  and  $\{t\}$  zu  $k$ -Mengen  $S$  und  $T$ , die  $G$  als nicht  $k$ -verbunden erweisen.

## Hinweise zu Kapitel 3

1. Bette die Ecken induktiv ein. Wo darf die neue Ecke *nicht* liegen?
2. <sup>-</sup> Abbildung 0.6.2.
3. Zum Induktionsschritt betrachte den letzten Schritt in der Konstruktion des betrachteten 2-zusammenhängenden Graphen.
4. <sup>-</sup> Wer hierzu einen Hinweis braucht, hat Induktion durch Manipulation von Summenformeln gelernt statt durch den Beweis von Aussagen. (Stimmt's?) Überlege noch einmal genau, was in einem Induktionsbeweis zu zeigen ist, und welche Rolle dabei die Induktionsannahme spielt.
5. <sup>-</sup> Mache den gegebenen Graphen zusammenhängend.
6. Dies ist eine Verallgemeinerung von Korollar 3.2.10.
7. Satz 2.5.4.
8. Folge dem Beweis von Korollar 3.2.10.
9. Proposition 3.2.7.
10. <sup>-</sup> Formuliere die Andersartigkeit der beiden Zeichnungen formal als Aussage über Ecken und Gebiete, sowie deren Inzidenz.
11. Kombinatorisch: benutze die Definition. Topologisch: drücke das "Nebeneinanderliegen" der beiden kurzen bzw. langen Endstücke in  $G'$  auf eine Weise aus, die durch einen topologischen Isomorphismus auf  $G$  übertragen werden müßte (aber dort einen Widerspruch ergibt).
12. Reflexiv, symmetrisch, transitiv.
13. Suche einen Graphen, bei dem alle Zeichnungen gleich aussehen aber einen Automorphismus zulassen, der nicht zu einem Homöomorphismus der Ebene auf sich selbst fortsetzbar ist. Deute diesen Automorphismus als  $\sigma_2 \circ \sigma_1^{-1}$ .



- 14.<sup>+</sup> Sternförmigkeit: jedes Innengebiet enthält einen Punkt, der alle Punkte auf dem Rand des Gebietes sehen kann.
15. Betrachte ebene Graphen.
16. (i) Es wird nicht verlangt, daß  $\mathcal{X}$  endlich sein muß.  
(ii) Ist  $Y$  ein  $TX$ , dann ist jedes  $TY$  auch ein  $TX$ .
- 17.<sup>-</sup> Nach der folgenden Übung kann ein Gegenbeispiel immer durch zwei Ecken getrennt werden.
18. Verstärke die Induktionsannahme des Beweises entsprechend. Es kann dabei hilfreich sein, Winkel von 180 Grad in den Polygonen nicht zu gestatten.
- 19.<sup>-</sup> Kantenzahlen.
20. Benutze, daß jeder maximal plättbare Graph 3-zusammenhängend ist, und daß die Nachbarn jeder Ecke einen Kreis induzieren.
21. Ist  $G = G_1 \cup G_2$  mit  $G_1 \cap G_2 = \overline{K^2}$ , so entsteht ein Problem. Dieses verschwindet, wenn man etwas mehr einbettet als nötig.
22. Simuliere die Outerplanarität durch eine geeignete Modifikation des betrachteten Graphen  $G$ .
23. Benutze, daß  $\mathcal{C}(G)$  die direkte Summe von  $\mathcal{C}(G_1)$  und  $\mathcal{C}(G_2)$  ist.
- 24.<sup>+</sup> Euler.
25. Die Gebietsränder erzeugen  $\mathcal{C}(G)$ .
- 26.<sup>-</sup> Überlege, welchen Gebiete  $e^*$  (als Polygonzug betrachtet) treffen kann.
- 27.<sup>-</sup> Wieviele Ecken hat das Dual?
- 28.<sup>-</sup> Verbinde zwei gegebene Ecken des Duals zunächst durch eine Strecke in der Ebene. Gewinne aus dieser einen Weg im Dual.
- 29.<sup>+</sup> Um die Existenz zu zeigen, definiere die erforderlichen Bijektionen  $F \rightarrow V^*$ ,  $E \rightarrow E^*$  und  $V \rightarrow F^*$  nacheinander in dieser Reihenfolge, und konstruiere gleichzeitig  $G^*$ . Zeige, daß Zusammenhang notwendig ist, weil sonst eine dieser drei Abbildungen nicht bijektiv definiert werden kann.
30. Löse die vorige Übung zuerst.
31. Benutze die zu den Dualen  $G_1^*$  und  $G_2^*$  gehörigen Bijektionen, um den gesuchten Isomorphismus zu definieren und als kombinatorisch zu erweisen.
32. Benutze den Satz von Menger und Proposition 3.6.1. Für (iii) betrachte einen 4-zusammenhängenden Graphen auf 6 Ecken.
33. Induktion nach  $n$ , mit Teil (i) der vorigen Übung als Induktionsanfang.
34. Satz 0.9.5.
35. Zur Vorwärtsrichtung betrachte  $G' := G^*$ ; zur Rückrichtung verwende ein geeignetes Planaritätskriterium.

## Hinweise zu Kapitel 4

1. <sup>-</sup> Dualität.
2. <sup>-</sup> Treffen sich mehr als 3 Länder in einem Punkt, dann verändere die Karte lokal an der Stelle.
3. Wo im Beweis des Fünffarbensatzes wird benutzt, daß  $v$  höchstens so viele Nachbarn hat, wie es Farben gibt?
4. Wie können die Färbungen verschiedener Blöcke einander beeinflussen?
5. <sup>-</sup> Benutze eine Färbung von  $G$ , um eine geeignete Aufzählung zu finden.
6. Wie kann man Kanten so löschen, daß die vom Greedy-Algorithmus benötigte Zahl der Farben steigt?
7. Wie könnte man den neuen Algorithmus genauer implementieren? Wie unterscheidet er sich dann vom Greedy-Algorithmus?
8. Vergleiche die Kantenzahl eines Teilgraphen  $H$  wie in 4.2.2 mit der Kantenzahl  $m$  von  $G$ .
9. Um  $f$  zu finden, konstruiere zu gegebenem Graphen kleiner Reihenzahl induktiv eine Zerlegung in wenige Wälder. Für  $g$  benutze Proposition 4.2.2 und die triviale Richtung von Satz 2.5.4.
10. <sup>-</sup> Mache den Graphen durch sukzessives Weglassen von Ecken kritisch  $k$ -chromatisch. Was können wir über den Grad der verbleibenden Ecken sagen?
11. Proposition 0.6.1.
12. <sup>+</sup> Verändere Färbungen der beiden Seiten eines etwaigen Schnittes aus weniger als  $k - 1$  Kanten so, daß sie zu einer  $(k - 1)$ -Färbung des gesamten Graphen kombiniert werden können (mit Widerspruch).
13. Proposition 0.3.1.
14. <sup>-</sup> Für welche Graphen mit hohem Minimalgrad liefert Proposition 4.2.2 eine besonders niedrige Schranke?
15. <sup>+</sup> (i) Wie werden am Anfang  $v_1$  und  $v_2$  gefärbt, wie am Ende  $v_n$ ?  
(ii) Betrachte den Untergraphen auf den Nachbarn von  $v_n$ .
16. Zum Induktionsanfang berechne  $P_G(k)$  für  $|G| = n$  und  $\|G\| = 0$  explizit.
17. <sup>+</sup> Leite aus der Form des gegebenen Polynoms die Kantenzahl und die Anzahl der Komponenten des Graphen ab; siehe dazu die vorige Übung.
18. Imitiere den Beweis von Satz 4.2.5.
19. Färbe zuerst das äußere Fünfeck.
20. <sup>-</sup>  $K_{n,n}$ .
21. Was haben Kantenfärbungen mit Paarungen zu tun?
22. Finde einen bipartiten  $\Delta(G)$ -regulären Graphen, der  $G$  als Teilgraphen enthält. Dabei kann es notwendig sein, auch neue Ecken hinzuzufügen.
23. <sup>+</sup> Induktion nach  $k$ . Beim Induktionsschritt  $k \rightarrow k + 1$  könnte es helfen, mehr als ein Exemplar des Graphen für  $k$  zu verwenden.
24. <sup>-</sup> Eckengrade.

25.  $K_{n,n}$ . Um  $n$  so zu wählen, daß  $K_{n,n}$  nicht einmal  $k$ -listenfärbbar ist, betrachte Listen aus  $k$ -elementigen Teilmengen einer  $k^2$ -elementigen Menge.
- 26.<sup>-</sup> Vizing.
27. Außer den Definitionen, Proposition 4.2.2, und einem Standardargument aus Kapitel 0.2 wird nichts weiter gebraucht.
- 28.<sup>+</sup> Damit der Induktionsschritt glatt durchgeht, sollte es möglich sein, ein Paar Ecken und nur eine Farbe aus den Listen der anderen Ecken zu löschen. Was können wir über die Listen sagen, wenn das unmöglich ist? Diese Information allein wird es uns ermöglichen, den Graphen zu färben, ohne ihn auch nur noch einmal anzuschauen.
29. Zeige zunächst  $\chi''(G) \leq \text{ch}'(G) + 2$ , und leite dann damit aus der Listenfärbungsvermutung die Ungleichung  $\chi''(G) \leq \Delta(G) + 3$  her.
- 30.<sup>-</sup> Haben bipartite Graphen einen Kern?
- 31.<sup>+</sup> Eine Menge  $S$  von Ecken eines gerichteten Graphen  $D$  sei ein *Schwamm*, wenn  $D$  für jede Ecke  $v \in D - S$  einen gerichteten Weg von  $v$  nach  $S$  enthält. Gibt es zusätzlich in  $D$  keinen gerichteten Weg zwischen zwei Ecken von  $S$ , so heiße  $S$  ein *Schwämmchen*. Zeige zunächst, daß jeder Schwamm ein Schwämmchen enthält. Definiere dann induktiv eine Partition von  $V(D)$  in "Schichten"  $S_0, \dots, S_n$ , so daß  $S_i$  für gerade  $i$  ein geeignetes Schwämmchen in  $D_i := D - (S_0 \cup \dots \cup S_{i-1})$  ist und für ungerade  $i$  aus den Ecken von  $D_i$  besteht, die eine Kante nach  $S_{i-1}$  schicken. Zeige, daß die geraden Schichten zusammen einen Kern von  $D$  bilden, wenn  $D$  keinen gerichteten Kreis ungerader Länge enthält.
- 32.<sup>+</sup> Suche die für die Anwendung von Lemma 4.4.3 erforderliche Orientierung schrittweise: hat eine gegebene Orientierung noch Ecken  $v$  mit  $d^+(v) \geq 3$ , so ändere die Richtung einer Kante an  $v$  und fange die Auswirkung dieser Änderung eventuell durch weitere Richtungsänderungen auf. Sollte es nötig werden, den Durchschnittsgrad eines bipartiten plättbaren Graphen zu beschränken, so sei an die Eulerformel erinnert.
- 33.<sup>-</sup> Beginne mit einem nicht perfekten Graphen.
34. Verwende Übung 13 aus Kapitel 2.
35. Betrachte das Komplement.
36. Definiere die Farbklassen eines gegebenen Untergraphen  $H \subseteq G$  induktiv, beginnend mit der Klasse aller minimalen Elemente.
37. (i) Können die Ecken eines induzierten Kreises einander als Intervalle enthalten?  
(ii) Benutze die natürliche Ordnung der reellen Zahlen.
38. Vergleiche  $\omega(H)$  mit  $\Delta(G)$ .
- 39.<sup>+</sup> Wie vermeidet man zumindest, daß Kreise ungerader Länge  $\geq 5$  als Untergraphen im Kantengraphen auftauchen? Zum Beweis, daß die Kanten eines Graphen  $G$  mit  $\omega(L(G))$  Farben gefärbt werden können, imitiere den Beweis des Satzes von Vizing.
40. Verwende die Menge  $A$  als Farbklasse.

- 41.<sup>+</sup> (i) ist ganz einfach mit Induktion.  
(ii) Nehmen wir an,  $G$  enthalte keinen  $P^3$ , aber in einem Untergraphen  $H$  gebe es eine maximale unabhängige Eckenmenge  $A$  und einen dazu disjunkten maximalen vollständigen Teilgraphen  $K$ . Zu jeder Ecke von  $K$  betrachte die Menge ihrer Nachbarn in  $A$ . Wie schneiden diese Nachbarmengen einander? Gibt es unter ihnen eine kleinste?
- 42.<sup>+</sup> Betrachte als Anfangskandidaten für die Menge  $\mathcal{O}$  irgendeine Menge von Eckenmengen maximaler vollständiger Teilgraphen, die  $G$  überdecken. Enthält jede Menge aus  $\mathcal{O}$  genau  $\omega(G)$  Ecken, so folgt die Existenz von  $\mathcal{A}$  aus der Perfektion von  $G$  – wie? Sind einige Mengen aus  $\mathcal{O}$  kleiner, so versuche, sie so zu Eckenmengen der Größe  $\omega(G)$  aufzufüllen, daß der erweiterte Graph wiederum perfekt ist. Für diesen gibt es dann die erwünschte Menge  $\mathcal{A}$  nach dem schon behandelten Fall. Wie läßt diese sich in eine Menge  $\mathcal{A}$  für  $G$  verwandeln?
- 43.<sup>+</sup> Führe den allgemeinen Fall auf den Fall zurück, daß nur eines der  $G_x$  nicht trivial ist. Ahme den Beweis von Lemma 4.5.4 nach.
44. Jeder Untergraph eines perfekten Graphen ist nach Definition wiederum perfekt.

## Hinweise zu Kapitel 5

- 1.<sup>-</sup> Überführe schrittweise die Ecken von der  $\bar{S}$ -Seite auf die  $S$ -Seite des Schnittes. Wie verändert sich dabei die Größe  $f(S, \bar{S})$ ?
2. (i) Versuche den Algorithmus dazu anzustiften, die mittlere Kante in jedem Schritt in anderer Richtung zu benutzen.  
(ii) Betrachte für jede Ecke  $v$  den kürzesten gerichteten  $s$ - $v$ -Weg, der als Anfangsstück eines Verbesserungsweges geeignet wäre. Zeige für jedes  $v$ , daß die Länge eines solchen  $s$ - $v$ -Weges sich während des gesamten Algorithmus nie verringert. Betrachte dann eine Kante, die zweimal in der gleichen Richtung für einen Verbesserungsweg benutzt wird. Zeige, daß der zweite Verbesserungsweg länger ist als der erste, und leite daraus die erwünschte Schranke ab.
- 3.<sup>+</sup> Für die Kantenversion definiere die Kantenkapazitäten so, daß ein Fluß der größtmöglichen Stärke es erlaubt, genügend viele kantendisjunkte  $s$ - $v$ -Wege zu konstruieren. Für die Eckenversion spalte jede Ecke  $x$  in zwei benachbarte Ecken  $x^-$ ,  $x^+$  auf, so daß Fluß durch die neue Kante  $x^-x^+$  die Benutzung von  $x$  durch einen Weg simuliert.
- 4.<sup>-</sup>  $H$ -Flüsse sind nach Definition nirgends null.
- 5.<sup>-</sup> Benutze die Definition und Proposition 5.1.1.
- 6.<sup>-</sup> Sind auch Teilgraphen Minoren?
- 7.<sup>-</sup> Betrachte nacheinander  $k = 2, 3, \dots$ . Um einen  $k$ -Fluß zu suchen, lege zunächst den Fluß durch eine Kante versuchsweise fest und sieh dann, was daraus für benachbarte Kanten folgt.
8. Zum Beweis der Eindeutigkeit betrachte einen geeigneten Schnitt.

9. Drücke  $G$  als Vereinigung von Kreisen aus.
10. Kombiniere  $\mathbb{Z}_2$ -Flüsse auf Teilgraphen zu einem Fluß auf ganz  $G$ .
11. Sende zunächst etwas Fluß durch jede Kante außerhalb von  $T$ .
12. Betrachte  $G$  als Vereinigung geeigneter Kreise.
13. Korollar 5.3.2 und Proposition 5.4.1.
- 14.<sup>-</sup> Dualität.
15. Betrachte einen Graphen  $H$  mit bekannt hoher Flusszahl. Kann man diese durch Hinzufügen neuer Kanten verringern?
16. Euler.
- 17.<sup>+</sup> Satz 5.5.3.
- 18.<sup>-</sup> Suche unter den kleinen kubischen Graphen.
19. Satz 5.5.3.
20. (i) Satz 5.5.3.  
(ii) Man kann. Zeige zum Beweis durch Betrachtung eines minimalen Gegenbeispiels, daß mit jedem 3-zusammenhängenden auch jeder brückenlose kubische plättbare Multigraph 3-kantenfärbbar ist (und somit einen 4-Fluß hat).
- 21.<sup>+</sup> Für die Vorwärtsrichtung benutze Proposition 5.1.1. Umgekehrt betrachte einen Rundfluß  $f$  auf  $G$  mit Werten in  $\{0, \pm 1, \dots, \pm(k-1)\}$ , der die gegebene Orientierung respektiert (also in Kantenrichtung jeweils positiv ist) und auf möglichst wenigen Kanten null ist. Zeige wie folgt, daß  $f$  nirgends null ist: ist  $f$  null auf  $e = st \in E$ , und ist  $e$  in  $D$  von  $t$  nach  $s$  gerichtet, so definiere ein Netzwerk  $N$  mit Quelle  $s$  und Senke  $t$ , für das jeder Fluß durch  $N$  positiver Stärke der Wahl von  $f$  widerspricht, und jeder Schnitt in  $N$  der Kapazität null der vorausgesetzten Eigenschaft von  $D$  widerspricht.
- 22.<sup>-</sup> Wandle den gegebenen Multigraphen in einen Graphen mit den gleichen Flußeigenschaften um.

## Hinweise zu Kapitel 6

- 1.<sup>-</sup> Verwende die Definition.
- 2.<sup>-</sup> Lege bei der Konstruktion dieser Graphen zuerst die Farbklassen fest.
3. Proposition 0.7.2 (ii).
4. Proposition 0.2.2 und Korollar 0.5.4.
- 5.<sup>+</sup> Wieviele Kanten kann ein Graph der Struktur aus Satz 1.2.3 höchstens haben, wenn er keine  $k$  unabhängige Kanten enthält? Wie verteilt man am günstigsten die Ecken von  $G$  auf  $S$  und die Komponenten von  $G - S$ ? Existieren auch Graphen, deren Kantenzahlen die entsprechende Schranke erreichen?
6. Wähle  $k$  und  $i$  so daß  $n = (r-1)k + i$  mit  $0 \leq i < r-1$ . Behandle erst den Fall  $i = 0$  und zeige dann allgemein, daß stets  $t_{r-1}(n) = \frac{1}{2} \frac{r-2}{r-1} (n^2 - i^2) + \binom{i}{2}$  gilt.

7. Die beiden Schranken des Tips sind die Kantenzahlen besonders einfacher Turangraphen. Welcher?
- 8.<sup>+</sup> Wie wählt man  $v$  so, daß die Kantenzahl mit Sicherheit nicht sinkt? Wo im Graphen kann man dann die Operation wiederholen, und ab wann passiert dabei nichts Neues mehr?
9. Suche unter den  $m$  Ecken  $s$  Ecken, denen nach der Kantenlöschung möglichst wenige Kanten fehlen.
10. Zum Beweis der ersten Ungleichung verdopple die Eckenmenge eines extremalen  $K_{s,t}$ -freien Graphen, um einen bipartiten Graphen mit doppeltsovielen Kanten aber weiterhin ohne  $K_{s,t}$  zu erhalten.
11. Nimm an, die obere Kantendichte sei größer als  $1 - \frac{1}{r-1}$ . Was heißt dies genau, und was folgt dann mit dem Satz von Erdős & Stone?
12. Korollar 0.5.4 und Proposition 0.2.2.
13. Vollständige Graphen.
- 14.<sup>-</sup> Durchschnittsgrad.
15. Erzwingen  $\frac{1}{2}(k-1)n$  Kanten einen Teilgraphen von hinreichend hohem Minimalgrad?
16. Betrachte einen längsten Weg  $P$  in  $G$ . Wo liegen die Nachbarn seiner Endecken? Kann  $G[P]$  einen Kreis auf  $V(P)$  enthalten?
- 17.<sup>+</sup> Wie bettet man am besten einen  $TK^{2r}$  in einen  $K_{s,s}$  ein, wenn man  $s$  klein halten will?
18. Beachte, wie sich die beiden Lemmas zum Beweis von Satz 6.2.1 ergänzen.
- 19.<sup>+</sup> Welche Graphen beispielsweise haben besonders hohen Durchschnittsgrad bei niedriger chromatischer Zahl? Welche Bäume finden sich induziert darin? Gibt es eine Ursache dafür, daß man gerade diese Bäume immer induziert in Graphen hohen Durchschnittsgrads und niedriger chromatischer Zahl finden wird?
20. Zum Induktionsschritt zerlege die Eckenmenge des betrachteten Graphen  $G$  so in disjunkte Teile  $V_1$  und  $V_2$ , daß Färbungen von  $G[V_1]$  und  $G[V_2]$  zu einer Färbung von  $G$  kombinierbar sind.
21. Imitiere den Beginn des Beweises von Lemma 6.2.3.
22. Erzwingt hohe chromatische Zahl hohen Durchschnittsgrad? Siehe Kapitel 4.
- 23.<sup>-</sup> Was hat Plättbarkeit mit Minoren zu tun?
- 24.<sup>-</sup> Betrachte einen geeigneten Obergraphen.
- 25.<sup>-</sup> Durchschnittsgrad.
- 26.<sup>+</sup> Zeige mit Induktion nach  $|G|$ , daß sich in einem Graphen  $G \not\cong K^4$  jede 3-Färbung eines induzierten Kreises auf ganz  $G$  fortsetzen läßt.
- 27.<sup>+</sup> Führe die Aussage auf kritisch  $r$ -chromatische Graphen zurück und verwende den Satz von Vizing.

28. (i) ist einfach. Im ersten Teil von (ii) unterscheide die Fälle, daß  $G$  durch einen  $K^{\chi(G)-1}$  getrennt wird oder nicht. Beweise den zweiten Teil mit Induktion nach der chromatischen Zahl. Im Induktionsschritt zerlege die Eckenmenge in zwei Teile.
29. Induktion nach der Anzahl der Konstruktionsschritte.
30. Induktion nach  $|G|$ .
31. Beachte die vorige Übung.
32. Welche der wie in Satz 6.4.4 konstruierten Graphen haben den höchsten Durchschnittsgrad?
33. Welche der wie im Tip konstruierten Graphen haben den höchsten Durchschnittsgrad?
34. Betrachte den Nachbarschaftsgraphen der Ecke  $x$  in  $G$ .
- 35.− Warum wäre es ungünstig, wenn z.B. einelementige Mengen  $X, Y$  mit in den Vergleich einbezogen würden?
- 36.− Rechne.
37. Magere Graphen haben wenige Kanten. Welchen Einfluß hat das auf die Durchschnittsgradbedingung in der Definition der  $\epsilon$ -Regularität?

## Hinweise zu Kapitel 7

- 1.− Kann man die Kanten des  $K^5$  derartig rot und grün färben, daß weder ein rotes noch ein grünes Dreieck entsteht? Wird Entsprechendes für den  $K^6$  gelingen?
- 2.− Induktion nach  $c$ : fasse im Induktionsschritt zwei Farben zu einer zusammen.
- 3.− Dieser Satz ist noch einfacher als Satz 7.1.1.
4. Ist die chromatische Zahl eines Graphen klein, so enthält er einen großen kantenlosen Untergraphen. Warum? Wie groß ist dieser mindestens?
- 5.+ Wähle eine Wohlordnung auf  $\mathbb{R}$ , und vergleiche sie mit der natürlichen Ordnung. Benutze, daß jede abzählbare Vereinigung abzählbarer Mengen abzählbar ist.
- 6.+ Die beiden ersten Fragen sind einfach. Zum Beweis des Satzes von Erdős & Szekeres benutze Induktion nach  $k$  für festes  $\ell$ , und betrachte im Induktionsschritt die letzten Elemente aufsteigender Teilfolgen der Länge  $k$ . Alternativ verwende den Satz von Dilworth.
7. Verwende den Satz, daß  $n \geq 4$  Punkte genau dann ein konvexes Polygon aufspannen, wenn je vier von ihnen es tun.
8. Zu gegebener Partition von  $\{1, \dots, n\}$  in  $k$  Teilmengen definiere eine geeignete  $k$ -Färbung der Kanten des  $K^n$ .
9. (i) ist einfach. Für (ii) benutze die Existenz von  $R(2, k, 3)$ .
10. Finde zuerst unendlich viele Mengen, deren paarweise Schnitte alle gleich groß sind.

11. Die Aufgabe enthält ein Überangebot an Information. Kapitel 6.2 gibt Aufschluß darüber, was davon relevant ist.
12. Betrachte einen Hilfsgraphen, dessen Ecken gefärbte endliche Teilgraphen des gegebenen Graphen sind.
13. Ahme den Beweis von Proposition 7.2.1 nach.
14. Die untere Schranke ist einfach. Für die obere Schranke betrachte zu gegebener Färbung die Nachbarn einer Ecke mittels der Kanten einer geeigneten Farbklasse.
- 15.<sup>-</sup> Aus gegebenen  $H_1$  und  $H_2$  konstruiere ein  $H$ , für das der Graph  $G$  aus Satz 7.3.1 die Eigenschaft (\*) besitzt.
16. Zeige  $\omega(G^k) = \omega(H)$  induktiv für  $k = 0, \dots, m$ .
17. Zum Induktionsschritt bilde  $G(H_1, H_2)$  aus der disjunkten Vereinigung  $G(H_1, H_2) \cup G(H'_1, H_2)$  durch geeignete Anbindung einiger neuer Ecken.
18. Unendlichkeitslemma.
- 19.<sup>-</sup> Was genau geht mit Proposition 7.4.1 schief, wenn wir dort den  $K^r$  fortlassen?
20. Zu zeigen ist folgendes: Ist  $\mathcal{G}$  eine beliebige Menge 3-zusammenhängender Graphen mit der Eigenschaft, daß zu jedem  $r \in \mathbb{N}$  alle hinreichend großen 3-zusammenhängenden Graphen einen Minor der Ordnung mindestens  $r$  in  $\mathcal{G}$  haben, dann enthält  $\mathcal{G}$  beliebig große Räder und beliebig große  $K_{3,r}$ .

## Hinweise zu Kapitel 8

1. Betrachte die Vereinigung zweier Farbklassen.
2. Geht der Beweis von Proposition 8.1.2 auch unter der Annahme von  $\chi(G) \geq |G|/k$  statt  $\alpha(G) \leq k$  durch? Wie sehen  $k$ -zusammenhängende Graphen aus, die die erste dieser Bedingungen erfüllen aber nicht die zweite?
3. Untersuche eine Kante, die in einer Folge hinzugefügt wird, in einer anderen aber nicht.
4. Abbildung 8.1.1.
5. Induktion nach  $k$  für festes  $n$ ; zum Induktionsschritt betrachte  $\overline{G}$ .
- 6.<sup>-</sup> Benutze die Definition eines hamiltonschen Tupels.
- 7.<sup>-</sup> Für welche Ecken fordert die Chvátal-Bedingung überhaupt etwas? Um die Gültigkeit der Bedingung für  $G$  zu überprüfen, finde zunächst eine solche Ecke.
8. Wie unterscheidet sich ein beliebiger zusammenhängender Graph von den Graphen, deren Quadrat nach dem Satz von Fleischner einen Hamiltonkreis enthält? Wie könnte dieser Unterschied die Existenz eines Hamiltonkreises stören?
- 9.<sup>+</sup> Zum Induktionsschritt betrachte einen minimalen Schnitt.



10. Die Bedingung (\*).
11. Induktion.
- 12.<sup>+</sup> Wie kann man aus einem Hamiltonweg  $P \in \mathcal{H}$  einen anderen gewinnen? Auf wieviele Weisen? Was hat das mit dem Grad in  $G$  der letzten Ecke von  $P$  zu tun?

## Hinweise zu Kapitel 9

- 1.<sup>-</sup> Betrachte  $m$  fest gewählte Kanten auf  $\{0, \dots, n-1\}$ . Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß die Kantenmenge von  $G \in \mathcal{G}(n, p)$  aus genau diesen Kanten besteht?
2. Betrachte geeignete charakteristische Zufallsgrößen, wie im Beweis von Lemma 9.1.5.
3. Betrachte geeignete charakteristische Zufallsgrößen.
4. Erdős.
5. Welches Maß hätte dann die Menge  $\{G\}$  für festes  $G$ ?
6. Betrachte die Komplementäreigenschaften.
- 7.<sup>-</sup>  $\mathcal{P}_{2,1}$ .
8. Verwende Lemma 9.3.2.
9. Induktion nach  $|H|$  mit Hilfe von Übung 6.
- 10.<sup>+</sup> (i) Berechne zu gegebenen  $U$  und  $U'$  die Wahrscheinlichkeit, daß jede andere Ecke  $v$  falsch an  $U \cup U'$  angebunden ist. Wie groß ist dann die Wahrscheinlichkeit, daß dies für *irgendein* Paar  $U, U'$  passiert?  
(ii) Konstruiere einen Isomorphismus  $G \rightarrow G'$  schrittweise entlang einer gemeinsamen Eckenaufzählung von  $G \cup G'$ .
11. Ahme den Beweis von Lemma 9.2.1 nach.
12. Ahme den Beweis von Proposition 9.3.1 nach. Bei der Abschätzung der Wahrscheinlichkeiten verwende die Ungleichung  $1 - x \leq e^{-x}$  wie im Beweis von Lemma 9.2.1.
- 13.<sup>+</sup> (i) Berechne die zu erwartende Anzahl isolierter Ecken und verwende Lemma 9.4.2 ähnlich wie im Beweis von Satz 9.4.3.  
(ii) Linearität.
- 14.<sup>+</sup> Kapitel 6.3, der Satz von Erdős, und ein bißchen Tschebyshev.
15. Für die erste Aufgabe ändere eine monotone Eigenschaft ein wenig ab, so daß sie nicht mehr monoton ist aber ihre Schwellenfunktion behält. Für die zweite finde eine monotone Eigenschaft, deren Wahrscheinlichkeit gar nicht wirklich von  $p$  abhängt.
16. Permutationen auf  $V(H)$ .
- 17.<sup>-</sup> Dies ist ein Resultat aus dem Text in Verkleidung.
18. Ausgewogenheit.
19. Für  $p/t \rightarrow 0$  verwende Lemmas 9.1.4 und 9.1.5. Für  $p/t \rightarrow \infty$  verwende Korollar 9.4.4.

20. Es gibt nur endlich viele Bäume der Ordnung  $k$ .
- 21.<sup>+</sup> Zeige zunächst, daß eine hypothetische Schwellenfunktion  $t = t(n)$  nicht für  $n \rightarrow \infty$  gegen null gehen kann. Leite hieraus mit Hilfe von Übung 12 einen Widerspruch ab.

## Hinweise zu Kapitel 10

- 1.<sup>-</sup> Zu einer Halbordnung gehört außer Reflexivität und Transitivität auch Antisymmetrie.
2. Proposition 10.1.1.
3. Zum Beweis von Proposition 10.1.1 betrachte eine unendliche Folge, in der jede echt absteigende Teilfolge endlich ist. In welcher Beziehung steht das letzte Element einer maximalen absteigenden Teilfolge zu den darauf folgenden Elementen? Zum Beweis von Proposition 10.1.2 zeige zunächst, daß zumindest ein Element mit unendlich vielen späteren Elementen ein gutes Paar bildet.
4. Ein möglicher Ansatz wäre, den Beweis von Lemma 10.1.3 für  $\leq'$  nachzumachen: wenn er schiefeht, woran liegt es? Alternativ kann man überlegen, ob sich jede durch Lemma 10.1.3 gelieferte Injektion nachträglich in eine ordnungserhaltende Injektion verwandeln läßt, unter Erhalt der Eigenschaft  $a \leq f(a)$  für alle  $a$ .
- 5.<sup>-</sup> Dies ist eine handwerkliche Präzisionsaufgabe: "Sieht man doch" ist kein Beweis!
6. Wie können zwei Bäume  $T, T'$  mit  $|T| < |T'|$  aber  $T \not\leq T'$  aussehen? Iteriere ein geeignetes Beispiel zu einer Folge immer größerer aber paarweise unvergleichbarer Bäume.
7. Wird im ursprünglichen Beweis jemals eine Abbildung benutzt, die eine Wurzel auf eine gewöhnliche Ecke abbildet?
- 8.<sup>+</sup> Bei der Einbettung eines Graphen  $TG$  in einen Graphen  $H$  kommen als Bilder der Verzweigungsecken des  $TG$  zuweilen nur ganz bestimmte Ecken von  $H$  infrage. Vergrößere  $G$  zu einem ähnlichen Graphen  $H$ , der  $G$  nur deshalb nicht als topologischen Minor enthält, weil diese Ecken in  $H$  ungünstig zueinander liegen. Iteriere dann das Beispiel zu einer unendlichen Antikette.
- 9.<sup>+</sup> Sie ist's. Ein möglicher Beweis verwendet normale Spannbäume und folgt dem Beweis des Satzes von Kruskal.
10. Warum gibt es keinen Kreis der Baumweite 1?
11. Für die Vorwärtsrichtung benutze Korollar 0.5.2. Zur Rückrichtung verwende Induktion nach  $n$ .
12. Zum Beweis von (T2) betrachte die Kante  $e$  in Abbildung 10.3.1. Der Nachweis von (T3) ist ganz einfach.
13. Zur ersten Frage beachte Proposition 10.3.5. Für die zweite versuche, eine Baumzerlegung von  $G$  in eine des  $TG$  umzuwandeln, ohne ihre Weite zu erhöhen.

14. Lemma 10.3.1 setzt die Trennungseigenschaften eines Graphen  $G$  in Beziehung zu denen seines Zerlegungsbaumes  $T$ . Diese Übungsaufgabe beleuchtet die gleiche Beziehung unter dem dualen Aspekt des Zusammenhangs: wie entsprechen die zusammenhängenden Teilgraphen von  $G$  denen von  $T$ ?
15. Die im Anschluß an Satz 10.3.8 besprochenen Kreuze liefern eine Baumweite von mindestens  $k - 1$ . Modifiziere das Beispiel, um  $k - 1$  auf  $k$  zu erhöhen.
- 16.<sup>-</sup> Dies ist nur eine Umformulierung von Satz 10.3.8.
17. Die Existenz ist bereits im Satz 10.3.8 bewiesen; zu zeigen ist also nur die Eindeutigkeit.
- 18.<sup>+</sup> Beschreibe die Mengen  $W'_t$  explizit, entsprechend der Definition der  $W_t$ , und vergleiche dann die beiden Definitionen.
19. Induktion.
20. Induktion.
- 21.<sup>+</sup> Verwende die vorige Übung und einen Satz aus Kapitel 6.4. Und verzweifle nicht an einem Teilgraphen von  $W$ !
- 22.<sup>+</sup> Beweise, daß die Teile der konstruierten Baumzerlegung genau die maximalen irreduziblen Untergraphen von  $G$  sind.
- 23.<sup>+</sup> Übung 14.
24. Zur Vorwärtsrichtung deute die Teilwege des Zerlegungsweges als Intervalle. Welcher Teilweg entspricht einer Ecke von  $G$  in natürlicher Weise?
25. Gehe ähnlich vor wie im Beweis des Korollars.
- 26.<sup>-</sup> Induktion nach  $r$ .
27. Beweise  $\leq$  mit Induktion entlang der Konstruktion der Mengen aus  $\mathcal{B}_n$ .
- 28.<sup>-</sup> Suche einen Graphen hoher Wegbreite, der einfach deswegen keinen  $F$ -Minor hat, weil er zu klein ist.
- 29.<sup>+</sup> Verwende als Verzweigungsmengen parallele Wege im Gitter.
30. Betrachte minimale Mengen wie  $\mathcal{X}_G$  in Proposition 10.5.1.
31. Zum ersten Teil finde für jeden verbotenen Minor  $X$  endlich viele Graphen, deren Verbot als topologischer Minor äquivalent ist zum Verbot von  $X$  als Minor. Zur zweiten Frage beachte Übung 8.
32. Was enthalten denn Graphen hoher chromatischer Zahl so alles? Siehe Kapitel 6.3.
33. Beweise den Minorensatz zuerst für zusammenhängende Graphen.
34.  $K^5$ .

# Register

---

Kursiv gesetzte Seitenzahlen verweisen auf Definitionen; bei Namen verweisen sie auf Sätze des genannten Autors. Den Übersetzungen der graphentheoretischen Fachwörter liegt die in der englischen Ausgabe dieses Buches verwendete Terminologie zugrunde; dies ist eine weithin akzeptierte englische Terminologie, aber nicht die einzige.

- abgeschlossen (*closed*)
  - bzgl.  $\geq$ , 274
  - bzgl. Addition, 133
  - bzgl. Minoren, 123, 150, 258
  - bzgl. Obergraphen, 241
  - bzgl. Teilgraphen, 123
  - bzgl. Untergraphen, 115
- Abstand (*distance*), 9
- abstrakter Graph, 3, 74, 80, 238
- adjazent (*adjacent*), 3
- Adjazenzmatrix (*adjacency matrix*), 26
- Ahuja, R.K., 151
- algebraische
  - Färbungstheorie, 125
  - Flußtheorie, 133–149, 151
  - Graphentheorie, 21–26, 30
  - Plättbarkeitskriterien, 89–91
- algorithmische Graphentheorie, 151, 273
- Alon, N., 110, 125, 249, 250
- alternierend (*alternating*)
  - Kantenzug, 54
  - Weg, 31
- Anfangscke (*initial vertex*)
  - einer gerichtete Kante, 26
  - eines Weges, 7
- Antikette (*antichain*), 42, 44, 252
- Appel, K., 124
- Äquivalenz von Einbettungen in die Ebene, 80–84, 83, 94
- Arborizität (*arboricity*), 63, 94, 103, 121
- Archdeacon, D., 278
- Artikulation (*cutvertex*), 11, 46
  - auf (*on*), 2
  - aufspannen (*to span*), 3–4
  - ausgewogen (*balanced*), 244
- Außengebiet (*outer face*), 74, 81
- Automorphismus (*automorphism*), 3, 29
- Baum (*tree*), 13–15
  - als erzwungene Teilstruktur, 14, 167, 179, 180
  - Schwellenfunktion für, 247, 249
  - Überdeckung durch Bäume, 63
  - Wohlquasiordnung von Bäumen, 253–255
- Baumordnung (*tree-order*), 14, 254
- Baumweite (*tree-width*), 258–265
  - Dualitätssatz, 259
  - eines Gitters, 261, 275
  - eines Minors, 258
  - und verbotene Minoren, 263–270
  - resp. Vernetzungsgrad, 275
  - einer Unterteilung, 275
  - eines Waldes, 275
- Baumzerlegung (*tree-decomposition*), 182, 255–263, 275, 276
  - auf Minoren vererbt, 257

- schlanke, 261–262  
 simpliziale, 262, 272, 276  
 benachbart (*adjacent*), 3  
 Berge, C., 120  
 berühren (*touch*), 258  
 Biggs, N.L., 30  
 bipartit (*bipartite*), 15–17, 29, 99  
   ebene Graphen, 96  
   Flußzahl, 138  
   Kantenfärbungen, 107  
   Listenfärbungen, 113, 123  
   Paarungen, 31–36, 43  
   in Ramseytheorie, 199–200  
 Birkhoff, G.D., 124  
 Blatt (*leaf*), 13, 29  
 Block (*block*), 46, 66  
 Block-Graph (*block graph*), 46, 66  
 Böhme, T., 69  
 Bollobás, B., 68, 69, 158, 182, 208, 227,  
   241, 242, 249, 250  
 Bondy, J.A., 227  
 Breite (*width*)  
   einer Wegzerlegung, 265  
 Brooks, R.L., 103, 121  
 Brücke (*bridge*), 11, 38, 129, 140, 213  
 Burr, S.A., 208  
  
 Catlin, P.A., 183  
 Cayley, A., 124, 249  
 charakteristische Zufallsgröße (*indicator  
   random variable*), 234  
 chordal (*chordal*), 116–117, 123, 262–  
   263, 276  
 $k$ -chromatisch (*k-chromatic*), 99  
 chromatische Zahl (*chromatic number*),  
   99, 128  
   Dreieck erzwingend, 122, 206  
   und Durchschnittsgrad, 105, 110, 167,  
   180  
   und extreme Graphen, 156, 179  
   als globales Phänomen, 105, 115  
   fast aller Graphen, 240  
   und Kantenzahl, 102  
   und  $K^r$ -Teilgraph, 105, 115  
   kurze Kreise erzwingend, 105, 237  
   resp. listenchromatische Zahl, 110  
   und Minimalgrad, 102, 105  
   und Maximalgrad, 103  
   und Minoren, 169–172, 180  
   und Tailenweite, 105, 237  
   Teilgraphen erzwingend, 105, 167,  
   207  
   und Zusammenhang, 105  
   chromatischer Index (*chromatic index*),  
   100, 108  
   bipartiter Graphen, 107, 122  
   resp. listenchromatischer Index, 110  
   und Maximalgrad, 107–109  
 chromatisches Polynom (*chromatic  
   polynomial*), 121, 122  
 Chvátal, V., 191, 213, 214, 226, 227  
 Cliquenzahl (*clique number*), 3, 115–  
   120, 263  
   Schwellenfunktion, 247  
   Wahrscheinlichkeit, 232  
*cycle double cover conjecture*, 150  
  
 darstellbar durch verbotene Minoren,  
   263–264, 271, 273  
 de Bruijn, N.G., 208  
 Deltasystem, 207  
 Deuber, W., 193  
 Dichte (*density*), 173  
   eines Netzes (*order of a bramble*),  
   258  
 Diestel, R., 182, 278  
 Dilworth, R.P., 42, 44  
 Dirac, G.A., 116, 125, 183, 212, 225,  
   226  
 disjunkte Graphen (*disjoint graphs*), 3  
 Doppelkante (*double edge*), 27  
 Doppelrad, 205  
 doppelte Kreisüberdeckung (*cycle dou-  
   ble cover*), 150  
 doppeltes Zählen, 79, 97, 119, 234, 244  
 Drehsinn, 141–142  
 Dreieck (*triangle*), 3  
 Dreiecksgraph, ebener (*plane triangula-  
   tion*), 77, 79  
 Dreifarbensatz, 102  
 Dreiflußvermutung, 146, 150  
 Dual (*dual*)  
   kombinatorisches, 93  
   topologisches, 91–92, 96  
   und Zusammenhang, 96  
 Dualität  
   Baumzerlegungen und Netze, 259  
   ebener Multigraphen, 91–93, 96  
   Flüsse und Färbungen, 140–145  
   Kreise und Schnitte, 24–25, 92–93,  
   141–142  
 Durchmesser (*diameter*), 9, 248  
   und Radius, 9, 28  
   und Tailenweite, 9, 28  
 Durchschnittsgrad (*average degree*), 5  
   und bipartite Teilgraphen, 29

- und chromatische Zahl, 105, 110, 166–167, 180
- und Kantenzahl, 5
- und Listenfärbung, 110
- und Minimalgrad, 6
- Minoren erzwingend, 167, 180
- und Ramseyzahlen, 208
- und Regularitätslemma, 174, 181
- und Tailleweite, 238
- Teilgraphen erzwingend, 248
- topologische Minoren erzwingend, 63, 158–165
- und Zusammenhang, 12
- eben (*plane*)
  - Dreiecksgraph, 77, 79, 94, 150
  - Graph, 74–80
  - Multigraph, 91–93, 140–145
  - von hoher Tailleweite, 94
- Ecke (*vertex*), 2
  - eines ebenen Graphen, 74
- eckenchromatische Zahl (*vertex-chromatic number*), 99
- Eckenfärbung (*vertex colouring*), 99, 102–107
- Eckengrad, 5–6
- Eckenraum (*vertex space*), 21
- Eckenüberdeckung (*vertex cover*), 32, 258
- Eckenverdopplung, 117
- Eckenzusammenhang (*vertex-connectivity*), 11
- Edmonds, J., 44, 279
- Eigenschaft (*property*), 238
  - $\mathcal{P}_{i,j}$ , 239, 248
  - fast aller Graphen, 238–242
- Einbettung (*embedding*)
  - bipartiter Graphen (Ramseytheorie), 199–202
  - in die Ebene, 80, 84–97
  - in höhere Flächen, 94, 97, 271, 272–273, 278
  - in  $\mathbb{R}^3$ , 94
- einfarbig (*monochromatic*) (in der Ramseytheorie)
  - (Ecken-) Menge, 187–189
  - Teilgraph, 190–193
  - Untergraph, 193–204
- Einsfaktorsatz, 37, 67
- Endecke
  - einer Kante (*end*), 2
  - einer gerichteten Kante (*terminal vertex*), 26
  - eines Weges, 7
- Endpunkte eines Polygonzuges, 71
- entweder...oder, 1
- Entwicklung der Zufallsgraphen, 241
- erbliche Grapheneigenschaft (*hereditary graph property*), 264, 277
  - algorithmische Entscheidbarkeit, 273
- Erdős, P., 156, 177, 182, 183, 194, 206, 208, 213, 227, 229, 237, 244
- Erdős-Sós-Vermutung, 157, 179, 180
- Ereignis (*event*), 231
- erster Punkt auf dem Rand, 72
- Erwartungswert (*expected value*), 233
- Erzwingung
  - Baum, 14, 167, 179
  - Dreieck, 122, 206
  - hohe chromatische Zahl, 105
  - kurze Kreise, 167–169, 237
  - lange Kreise, 8, 28, 211–228
  - lange Wege, 8
  - Minor hohen Minimalgrades, 162, 168
  - $MK^r$ , 167, 169–172, 182
  - $TK^r$ , 63, 158–166
  - Verbundenheit, 63–65, 69, 159–162
  - hohen Zusammenhang, 12
- Euler, L., 20–21, 78
  - Polyederformel, 78, 94
- eulersch (*Eulerian*)
  - Graph, 20
  - Kantenzug, 20
- Existenzbeweis, probabilistischer, 233, 235–238
- extremal (*extremal*)
  - Graphentheorie, 153, 182
  - Graph, 153–155
  - ohne  $TK^4$ , 170–171
  - ohne  $TK^5$ , 172, 181
  - ohne  $MK^5$ , 171
  - ohne  $TK_{3,3}$ , 181
  - ohne  $K_{s,t}$ , 179
  - ohne  $k$  unabhängige Kanten, 179
  - resp. kantenmaximal, 154, 171, 179
- Fächer (*fan*), 57
- Fächerform des Satzes von Menger, 57
- Fajtlowicz, S., 183
- Faktor (*factor*), 31
  - 1-Faktor, 31–41, 67
  - 1-Faktor-Satz, 37, 67
  - 2-Faktor, 35
  - $k$ -Faktor, 31
- faktorkritisch (*factor-critical*), 38, 44
- $k$ -färbbar (*k-colourable*), 99
- 3-Farben-Satz, s. *Dreifarbensatz*
- 4-Farben-Satz, s. *Vierfarbensatz*

- 5-Farben-Satz, s. *Fünffarbensatz*  
 Farbklasse (*colour class*), 102  
 Färbung (*colouring*), 99–126  
   Algorithmen, 102, 113, 121  
   ebener Graphen, 100–101, 140–145  
   und Flüsse, 140–145  
   in der Ramseytheorie, 187  
 fast alle/jeder/kein (*almost all/every/no*), 238, 248  
 Fleischner, H., 217  
 Fluß (*flow*), 127–151, 130  
   *k*-Fluß, 135–140, 145–149, 151  
   2-Fluß, 138  
   3-Fluß, 138, 146  
   3-Fluß-Vermutung, 146  
   4-Fluß, 139–140, 146, 150  
   4-Fluß-Vermutung, 146, 147  
   5-Fluß-Vermutung, 145, 147  
   6-Fluß-Satz, 147–149, 151  
   *H*-Fluß, 133–137  
   in ebenen Graphen, 140–145  
   und Färbungen, 140–145  
   ganzzahliger (*integral*), 130, 132  
   gruppenwertiger (*group-valued*), 133–137  
   in Netzwerk (*network flow*), 130  
   und Orientierung, 151  
   Stärke (*value*), 131  
 Flußpolynom (*flow-polynomial*), 135  
 Flußzahl (*flow-number*), 135–140, 145, 150  
 Ford, L.R. Jr., 131, 151  
 Frank, A., 68, 151  
 Fulkerson, D.R., 126, 131, 151  
 Fünffarbensatz, 100, 124, 125, 147  
   Listenversion, 111, 125  
 Fünfflußvermutung, 145, 147  
 Gallai, T., 41, 44, 69  
 Galvin, F., 113  
 ganzzahlig (*integral*), 130  
   Fluß, 132  
   Zufallsvariable, 242  
 Gebiet  
   eines ebenen Graphen (*face*), 74–80  
   einer offenen Punktmenge (*region*), 72–73  
   auf  $S^2$ , 73  
 gepaart (*matched*), 31  
 Gerüst, 11, 14  
 gerade (*even*)  
   Eckengrad, 21, 22  
   Graph, 138, 140  
   Kreislänge, 16, 96  
   gerichtet (*directed*)  
     Graph, 26, 112–113  
     Kante, 26  
     Kreis, 123  
     Weg, 41  
   Geschlecht (*genus*), 277  
   geschlossener Kantenzug (*closed walk*), 10, 20  
 Gilmore, P.C., 123  
 Gitter (*grid*), 95, 259, 278  
   Baumweite, 261, 275  
 Godsil, C., 30  
 Golumbic, M.C., 126  
 Gorbunov, K.Yu., 278  
 Göring, F., 68, 69  
 Grad (*degree*), 5–6  
 Gradsequenz (*degree sequence*), 214  
 Graham, R.L., 207  
 Graph (*graph*), 2–4, 28  
   ebener, 74–80, 91–93, 100–101, 111–112, 140–145  
 Grapheneigenschaft (*graph property*), 238  
 Grapheninvariante (*graph invariant*), 3  
 Graphenprozeß, 250  
 graphentheoretischer Isomorphismus, 82  
 Graphentheorie, 1–279  
   algebraische, 30  
   algorithmische, 151  
   extremale, 153, 182  
   probabilistische, 249–250  
   topologische, 97  
 Greedy-Algorithmus, 102, 121  
 Grötzsch, H., 101, 146–147, 150  
 Grünwald, T., 69  
 gruppenwertiger Fluß, 133–137  
 gut  
   Charakterisierung, 270, 279  
   Folge, 252  
   Paar, 252  
 Guthrie, F., 124  
 Hadwiger, H., 170, 182  
   Vermutung, 169–172, 180, 181, 182, 183  
 Hajós, G., 106, 183  
   Operation, 106  
 Hajnal, A., 194, 208  
 Haken, W., 124  
 Halbordnung, 42, 44  
   auf der Klasse aller Graphen, 3, 17, 19  
 Halin, R., 30, 68, 227, 277, 278  
 Hall, P., 33, 44

- Hamilton, W.R., 227  
 Hamilton-Abschluß (*H. closure*), 226  
 Hamiltonkreis (*H. cycle*), 211–228  
   in fast allen Graphen, 241  
   und 4-Fluß, 150, 214  
   in  $G^2$ , 216–225, 226  
   in  $G^3$ , 226  
   und Gradsequenz, 214–216, 226  
   und Minimalgrad, 212  
   in plättbaren Graphen, 214  
   Potenz von, 225  
   und Vierfarbensatz, 214  
 Hamiltonweg (*Hamilton path*), 211, 226  
 hamiltonsch (*hamiltonian*)  
   Graph, 211  
   Tupel, 214, 226  
 Handelsreisender (*travelling salesman*),  
   227  
 Harant, J., 69  
 Heawood, P.J., 124, 150  
 Heesch, H., 124  
 Heiratssatz, 33, 35, 43, 44  
 Higman, D.G., 277  
 Hoffman, A.J., 123  
 Hypergraph (*hypergraph*), 26  
  
 in (*in*), 8  
 induziert (*induced*)  
   Kreis, 8, 22, 49, 77, 120  
   in Ramseytheorie, 193–204  
   Teilgraph, 3  
 Innengebiet (*inner face*), 74  
 innere Ecke (*inner vertex*), 7  
 Intervallgraph (*interval graph*), 123,  
   276  
 Invariante (*invariant*), 3  
 inzident (*incident*), 2  
 Inzidenzfunktion, 27  
 Inzidenzmatrix (*incidence matrix*), 26  
 irreduzibel, 276  
 isolierte Ecke (*isolated vertex*), 5  
 isomorph (*isomorphic*), 3  
 Isomorphismus (*isomorphism*), 3  
   ebener Graphen, 80–84, 94  
  
 Jaeger, F., 151  
 Jensen, T.R., 124, 151, 278  
 Johnson, D., 279  
 Jordan, C., 72, 73  
 Jung, H.A., 64  
 Jungnickel, D., 151  
  
 Kahn, J., 125  
 kanonischer Homomorphismus, 135  
 Kante (*edge*), 2  
   ebene, 74  
   gerichtete, 26  
   eines Multigraphen, 27  
   parallele, 26  
 kantenchromatische Zahl (*edge-chroma-  
 tic number*), s. *chrom. Index*  
 Kantendichte, 5, 174  
   und Durchschnittsgrad, 5  
   obere, 179  
   Teilgraphen/Minoren erzwingend,  
     153–167, 173–178  
   und Regularitätslemma, 174, 181  
 kantendisjunkte Spannbäume, 60–63,  
   67–68  
 Kantenfärbung (*edge colouring*), 100,  
   107–109  
   eindeutige, 225  
   und Flußzahl, 140  
   in Ramseytheorie, 187  
 Kantengraph (*line graph*), 4, 100, 123,  
   180  
 Kantenkontraktion (*edge contraction*),  
   17  
   in Multigraph, 27  
   und Minorenbildung, 18  
   und 3-Zusammenhang, 48  
 kantenmaximal (*edge-maximal*), 4  
   ohne  $TK^4$ , 170–171, 181  
   ohne  $MK^5$ , 171  
   ohne  $TK^5$ ,  $TK_{3,3}$ , 88  
   resp. extremal, 154, 171, 179  
 Kantenraum (*edge space*), 21, 29, 89  
 Kantenüberdeckung (*edge cover*), 123  
 Kantenzug (*walk*), 10, 29  
   alternierender, 54  
 Kantenzusammenhang (*edge-connecti-  
 vity*), 11, 28, 57, 59, 60–62, 66,  
   121  
 $\ell$ -kantenzusammenhängend ( *$\ell$ -edge-  
 connected*), 11  
 Kapazität (*capacity*), 130  
 Kapazitätsfunktion (*capacity function*),  
   130  
 Kempe, A.B., 124  
 Kern (*kernel*), 113, 123  
 Kette (*chain*), 14, 42, 44  
 Kirchhoff-Regel, 127, 129  
 Klasse 1/2 (*class 1/2*), 109  
 Klein'sche Vierergruppe, 140  
 Kleitman, D.J., 125  
 Knoten (= Ecke) (*node*), 2



- knotenfreie Einbettung (*knotless embedding*), 273–274
- Knotentheorie, 151
- kombinatorisch (*combinatorial*)
- Dual, 93, 96
  - Isomorphismus, 81, 82, 94, 95
  - Mengenlehre, 208
- Komlós, J., 158, 183, 225
- Kompaktheitsschluß, 188, 207, 208
- Komplement (*complement*)
- eines Graphen, 4
  - einer Eigenschaft, 264
  - und Perfektion, 117
- Komplexitätstheorie, 273–274, 279
- Komponente (*component*), 10, 28
- ungerade, 36–41
- König, D., 30, 32, 44, 54, 107, 123, 188, 208
- Königsberger Brücken, 20
- $k$ -konstruierbar (*k-constructable*), 105–106, 122
- Kontraktion (*contraction*), 17–19
- in Multigraphen, 27
  - und 3-Zusammenhang, 47–48
- konvexe Gebiete, 84, 95, 97
- konvexes Polygon, 206
- Kostochka, A.V., 125, 167
- Kreis (*cycle*), 8–9
- mit Drehsinn, 141–143
  - gerichtet, 122
  - Hamilton, 211–228
  - induziert, 8, 22, 49, 77, 90, 120
  - kurzer, 105, 167–169, 237–238
  - Länge, 8
  - langer, 8, 28
  - mittlere Anzahl, 234
  - in Multigraphen, 27
  - auf  $S^2$ , 73
  - nicht trennender, 49, 77, 90
  - Schwellenfunktion für, 247, 249
  - (un)gerader Länge, 16, 96, 103, 120
- kreislos (*acyclic*), 13
- Kreuz in einem Gitter, 259
- kreuzungsfreie Wege (*independent paths*), 7–8, 58–59, 67
- kritisch  $k$ -chromatisch (*critically k-chromatic*), 121
- Krone, 205–206
- Kruskal, J.A., 253
- kubisch (*cubic*), 5
- Flußzahl, 138, 140
  - 1-Faktoren, 38
- Kuratowski, C., 84–89, 270
- artige Charakterisierung, 95, 271, 278
- Länge (*length*)
- eines Kantenzuges, 10
  - eines Kreises, 8
  - eines Weges, 7, 8
- Larman, D.G., 64
- Lateinisches Quadrat (*Latin square*), 122
- leerer Graph (*empty graph*), 2
- listenchromatischer Index (*list-chromatic index*), 109–110, 112–115
- listenchromatische Zahl (*choice number; list-chromatic number*) 109
- bipartiter plättbarer Graphen, 123
  - und Durchschnittsgrad, 110
  - und Reihenzahl, 122
- $k$ -listenfärbbar (*k-choosable; k-list-colourable*), 109
- Listenfärbung (*list-colouring*), 109–115, 122, 123
- Listenfärbungsvermutung, 112
- asymptotisch, 125
  - für bipartite Graphen, 113–115
- Logarithmus, 1
- Logik, 208
- löschen (*delete*), 4
- Lovász, L., 44, 117, 125
- Luczak, T., 250
- MacLane, S., 89, 97
- Mader, W., 12, 59, 63, 67, 69, 166, 172, 180, 183
- Magnanti, T.L., 151
- Mani, P., 64
- Markov-Ungleichung, 234
- matching, 30, 31
- Máté, A., 208
- Matroidtheorie, 69, 97
- Max-Flow Min-Cut Theorem, 131, 149
- maximal (*maximal*), 4
- eben, 77, 84, 94
  - kreislos, 13
  - plättbar, 84, 89, 95
- Maximalgrad (*maximal degree*), 5
- und chromatische Zahl, 103
  - und chromatischer Index, 107–109
  - und listenchromatischer Index, 115
  - und Radius, 9, 28
  - und Ramseyzahlen, 191–192
- Mehrfachkante (*multiple edge*), 26, 27
- Menger, K., 44, 52–57, 66, 149

- Milgram, A.N., 41, 44  
 minimal (*minimal*), 4  
 nicht plättbar, 95  
 $k$ -zusammenhängend, 68  
 Menge verbotener Minoren, 271  
 zusammenhängend, 13
- Minimalgrad (*minimal degree*), 5  
 Bäume erzwingend, 14  
 und chromatische Zahl, 102–103  
 und Durchschnittsgrad, 6  
 Hamiltonkreis erzwingend, 212  
 kurze Kreise erzwingend, 167–169, 238  
 lange Kreise erzwingend, 8  
 und Taillenweite, 168, 238  
 und Umfang, 8  
 lange Wege erzwingend, 8  
 und Zusammenhang, 11, 28
- Minor (*minor*), 17–19, 18  
 (siehe auch topologischer Minor)  
 $K_{3,3}$ , 89, 97, 181  
 $K^4$ , 170–171, 264  
 $K^5$ , 171–172, 276  
 $K^5$  und  $K_{3,3}$ , 84–89  
 $K^6$ , 172  
 $K^r$ , 170, 277  
 großer 3- oder 4-zusammenhängender Graphen, 205–206  
 erzwungener, 162, 167–172, 180  
 von Multigraphen, 27  
 als Ordnungsrelation, 19, 29  
 Petersen-Graph, 146  
 und Plättbarkeit, 84–89, 95  
 resp. topologischer Minor, 19, 85  
 unendlicher Graphen, 277  
 verbotener, 170–172, 263–274, 277  
 von WQO, 251–274  
 von Zufallsgraphen, 249
- Minorensatz, 251, 271, 277  
 Beweis, 272–273
- Mittelwert (*expected value*), 233
- Möbiuskrone, 205
- Mohar, B., 97, 125, 278
- Moment (*moment*)  
 zentrales, 243  
 zweites, 242–247
- monotone Eigenschaft (*monotonic property*), 241–242, 249, 250
- Multigraph (*multigraph*), 27, 128  
 ebener, 91
- Murty, U.S.R., 227
- Nachbar (*neighbour*), 3
- Nash-Williams, C.St.J.A., 60, 63, 277
- Nešetřil, J., 207, 208
- Netz (*screen; bramble*), 258
- Netzwerk (*network*), 129–132, 130  
 Theorie, 151  
 nirgends null (*nowhere zero*), 133  
 normaler Baum (*normal tree*), 14, 29, 150
- obere Kantendichte, 179
- Obergraph (*supergraph*), 3
- Oktaeder (*octahedron*), 12, 16
- Oporowski, B., 205, 206
- Ordnung (*order*) eines Graphen, 2
- Ordnungsrelationen für Graphen, 3, 17, 19
- Orientierbarkeit, 142
- orientierter Graph (*oriented graph*), 26
- Orientierung (*orientation*), 26, 112–113, 151
- Orlin, J.B., 151
- outerplanar, 95
- Oxley, J.G., 97, 205, 206
- paar (*bipartite*), 15
- paarbar (*matchable*), 38
- Paarung (*matching*), 31–44  
 in allgemeinen Graphen, 36–41  
 in bipartiten Graphen, 31–36, 43  
 einer Eckenmenge, 31  
 und extremale Graphen, 179  
 und Zusammenhang, 43
- Palmer, E.M., 249
- parallele Kanten (*parallel edges*), 26, 27
- Parität (*parity*), 6, 226
- $r$ -partit (*r-partite*), 15
- Partition (*partition*), 1
- Partitionskante, 60
- Pelikán, J., 181
- Perfect Graph Conjecture*, 120
- Perfect Graph Theorem*, 117, 125–126
- perfekt (*perfect*), 115–120, 123, 124, 206
- Petersen, J., 35, 38
- Petersen-Graph, 122, 145–146
- Physik, 151
- plättbar (*planar*), 84–93, 96, 270
- Plättbarkeitskriterien  
 Kuratowski, 88–89  
 MacLane, 89  
 Tutte, 90  
 Whitney, 93
- Plummer, M.D., 44
- Polyederformel, 78

- Polygon (*polygon*), 71  
 Polygonzug (*polygonal arc*), 71, 72–73  
 Pósa, L., 194, 225  
 Potenz (*power*)  
   eines Graphen, 216  
 Pregel, 20  
 probabilistische Methode, 229, 235–238, 249–250  
 projektive Ebene, 278  
  
 Quadrat (*square*)  
   eines Graphen, 216  
   lateinisches, 122  
 Quasiordnung (*quasi-ordering*), 252  
   äquivalent in, 274  
  
 Rad (*wheel*), 49  
 Radius (*radius*), 9  
   und Durchmesser, 9  
   und Maximalgrad, 9, 28  
 Rado, R., 208  
 Ramsey, F.P., 186–190  
 Ramseygraph, 193–194  
 Ramsey-minimal, 192–193  
 Ramseytheorie, 185–206  
   induziert, 193–204  
   und Zusammenhang, 204–206  
   unendlich, 188, 206  
 Ramseyzahl (*Ramsey number*), 187, 190–193, 207, 233  
 Rand (*boundary*)  
   einer Punktmenge, 72  
   eines Gebietes, 72, 74–77, 82, 96  
 reduzierbare Konfiguration, 124  
 Reed, B., 278  
 regulär (*regular*), 5, 35  
    $\epsilon$ -regulär, 173, 181  
 Regularitätsgraph (*regularity graph*), 175  
 Regularitätslemma, 156, 173–178, 181, 183, 191  
 Reihenzahl (*colouring number*), 102, 121, 122  
 Rényi, A., 244  
 Repräsentantensystem, 41, 43  
 Richardson, M., 123  
 Richtung (*direction*)  
   einer Kante, 128  
 Říha, S., 227  
 Robertson, N., 69, 125, 151, 172, 182, 258–274, 278  
 Rödl, V., 191, 194, 208, 209  
 Rothschild, B.L., 207  
  
 Royle, G.F., 30  
 Rundfluß (*circulation*), 129, 142  
  
 Sanders, D.P., 125, 151  
 Sárközy, G.N., 225  
 Satz erster Ordnung, 240  
 schlanke Baumzerlegung (*lean tree-decomposition*), 261  
 schlechte Folge (*bad sequence*), 252  
 schlicht (*simple*)  
   Basis, 89, 95, 97  
   Graph, 28  
   Kantenmenge, 89  
 Schlinge (*loop*), 26, 27  
 Schnitt (*cut*), 23  
   minimal, 24, 92–93  
   in Netzwerk, 130  
 Schnittgraph (*intersection graph*)  
   einer Mengenfamilie, 276  
 Schnitttraum (*cut space*), 23–26, 89, 93  
   Basis, 23, 25, 29  
   Dimension, 30  
 Schoenfies, A.M., 73  
 Schrijver, A., 151  
 Schur, I., 206  
 Schwamm, 288  
 Schwellenfunktion (*threshold function*), 241–247, 249, 250  
 Scott, A.D., 167, 207  
 Sechsfußsatz, 147, 151  
 Sehne (*chord*), 8  
 self-minor conjecture, 277  
 series-parallel, 181  
 Seymour, P.D., 69, 125, 147, 151, 172, 182, 225, 258–274, 277, 278  
 Simonovits, M., 182, 183  
 simpliziale Baumzerlegung (*simplicial tree-decomposition*), 262, 272, 276  
 Slivnik, T., 125  
 Snark (*snark*), 146, 150, 213  
 Spannbaum (*spanning tree*), 14  
   kantendisjunkte, 60–62  
   mittlere Anzahl, 249  
 Spencer, J.H., 207, 249  
 Sperner-Lemma, 43  
 Stärke eines Flußes (*value of a flow*), 131  
 stabil (*stable*), 3  
 Stabilitätszahl (*stability number*), 3  
 Standardbasis, 21, 22  
 Steinitz, E., 97  
 stereographische Projektion, 73  
 Stern (*star*), 16, 180, 193  
 Stiebitz, M., 125

- Stillwell, J., 97  
 Stone, A.H., 156, 177  
 Summe  
   von Flüssen, 137  
   von Kantenmengen, 21  
 symmetrische Differenz, 21–22, 31, 55  
 $\Delta$ -System, 207  
 Szekeres, G., 206  
 Szemerédi, E., 156, 158, 174, 183, 191, 225  
  
 Tailleweite (*girth*), 8  
   und chromatische Zahl, 105, 237  
   und Durchmesser, 9  
   und Durchschnittsgrad, 238  
   und Minimalgrad, 9, 168, 238  
   und Minoren, 168–169  
   und Zusammenhang, 238  
 Tait, P.G., 124, 227  
 Tarsi, M., 125  
 Teil (*part*)  
   einer Baumzerlegung, 256  
 Teilgraph (*subgraph*), 3  
   erzwungen durch Kantendichte, 153–157, 173–178, 248  
   erzwungen durch andere Invarianten, 14, 158  
   hohen Minimalgrades, 6, 103  
   hohen Zusammenhangs, 12  
   induziert, 3  
   und WQO von Bäumen, 274  
 Teilweg (*segment*) eines Weges, 7  
 Thomas, R., 125, 151, 172, 205, 206, 259, 262, 277, 278  
 Thomason, A.G., 69, 158, 167, 183, 242  
 Thomassen, C., 68, 97, 111, 125, 183, 227, 278  
 Tiefensuchbaum (*depth-first search tree*), 14, 29  
 Toft, B., 124, 151  
 Topologie, 71–73  
 topologischer Isomorphismus, 80, 82, 92, 94  
 topologischer Minor, 19  
   Baum (induziert), 167  
   erzwungen durch chromatische Zahl, 169, 171  
   erzwungen durch Durchschnittsgrad, 63, 158–166  
   induziert, 167  
   jedes großen 2-zusammenhängenden Graphen, 205  
    $K_{3,3}$ , 89, 97, 181  
    $K^4$ , 170–171, 181, 264  
    $K^5$ , 97, 172  
    $K^5_-$ , 181  
    $K^5$  und  $K_{3,3}$ , 84–89  
    $K^r$ , 63, 158–166  
   als Ordnungsrelation, 19  
   und Plättbarkeit, 80, 84–89, 95  
   resp. gewöhnlicher Minor, 19, 85  
   verbotener, 277  
   und WQO von allgemeine Graphen, 275  
   und WQO von Bäumen, 253  
 topologisches Dual (*geometric dual*), 91–92, 96  
 Torso, 276  
 Totalfärbung (*total colouring*), 122  
   Vermutung, 122, 125  
 transitiv (*transitive*), 43–44  
 trennen (*separate*)  
   die Ebene, 72–73  
   einen Graphen, 11, 52, 57  
 Trenner (*cut*), 11, 65–66, 67  
   trianguliert (*triangulated*), 116  
 trivialer Graph (*trivial graph*), 2  
 Trotter, W.T., 191  
 Tschebyschev-Ungleichung, 243  
 Turán, P., 155  
 Turángraph, 154–156, 179, 182  
 Turnier (*tournament*), 226  
 Tutte, W.T., 37, 48, 49, 60, 68, 69, 91, 133, 136, 144, 145–147, 151, 214, 227  
 Tutte-Polynom, 151  
 Tychonov, A.N., 208  
  
 Überdeckung (*cover*)  
   durch Antiketten, 44  
   durch Bäume, 63  
   durch Ecken, 32, 258  
   durch Kanten, 123  
   durch Ketten, 42–43, 44  
   durch Wege, 41–43  
 Umfang (*circumference*), 8, 28  
   und Minimalgrad, 8  
   und Unabhängigkeitszahl, 121  
   und Zusammenhang, 66, 67  
 unabhängig (*independent*), 3  
   Eckenmenge, 41, 115, 232  
   Ereignisse, 231  
   Kantenmenge, 31–41, 179  
 Unabhängigkeitszahl (*independence number*), 3, 115–120  
   und Hamiltonkreise, 213  
   Wahrscheinlichkeit von, 232

- und Wegüberdeckung, 41
- und Umfang, 121
- von Zufallsgraphen, 248
- und Zusammenhang, 213
- Unendlichkeitslemma (*Infinity Lemma*), 188, 207
- ungepaart (*unmatched*), 31
- ungerade
  - Grad, 6
  - Komponente, 36–41
  - Kreislänge, 16, 96
- Untergraph (*induced subgraph*), 3
  - erzwungener, 167, 180
  - fast aller Graphen, 238, 248
  - aller großen zusammenhängenden Graphen, 204
  - aller perfekten Graphen, 120, 124
  - in Ramseytheorie, 193–204
  - Schwellenfunktion für, 249
  - Wahrscheinlichkeit, 232
  - 2-zusammenhängender, 46–47
- Unterteilung (*subdivision*), 19
- Unterteilungsecke (*subdividing vertex*), 19
- Urquhart, A., 125
- Valenz (*valency*), 5
- Varianz (*variance*), 243
- Verbesserungsweg (*augmenting path*), 31, 43
- verbinden (Ecken)
  - durch Kante (*join*), 2, 71
  - durch Weg (*link*), 7, 45
- Verbindungswege gegebener Endecken, 63–65, 69, 158
- verbotene Minoren (*forbidden/excluded minors*), 263–274
  - darstellbar durch, 263, 271, 277
  - minimale Menge, 271
- verbunden (*linked*), 158
  - $k$ -verbunden, 63–65, 69
  - resp.  $k$ -zusammenhängend, 64, 68, 69
  - $(k, \ell)$ -verbunden, 158
- Vergleichbarkeitsgraph (*comparability graph*), 123
- Vernetzungsgrad (*bramble number*), 261, 275
- Verzweigungsecke (*branch vertex*), 19
- Verzweigungsmenge (*branch set*), 18
- Vierfarbenproblem, 120, 124, 182
- Vierfarbensatz, 100, 146–147, 150, 170, 171–172, 180, 213–214, 227
- Bewiesgeschichte, 124
- Vierflußvermutung, 146–147, 151
- Vizing, V.G., 108, 125
- Voigt, M., 125
- vollständig (*complete*), 3
  - bipartit, 15–16, 179
  - Minor, 167, 169–172, 272
  - multipartit, 15–16, 156
  - $r$ -partit, 15–16
  - Teilgraph, 105, 115, 153–155, 232
  - topologischer Minor, 158–165
  - trennender Untergraph, 248
- Wagner, K., 30, 89, 170, 171, 180, 182
- Wagner-Graph, 171–172, 262, 276
- Wald (*forest*), 13–15
  - Zerlegung in Wälder, 63
- Weg (*path*), 7–8
  - $a$ - $b$ -Wege, 57
  - $A$ - $B$ -Wege, 7, 52–57
  - $H$ -Wege, 8, 46–47, 58–59
  - als erzwungene Teilstruktur, 180
  - alternierend, 31, 54
  - disjunkt, 52–58
  - kantendisjunkt, 57, 59
  - kreuzungsfrei, 7–8, 58–59
  - Länge, 7
  - langer, 8
  - Verbindungswege, 63–65, 69, 158
- Wegbreite (*path-width*), 265, 276
- Weg-hamiltonsches Tupel, 216
- Wegüberdeckung (*path cover*), 41
- Wegzerlegung (*path-decomposition*), 265
  - in vollständige Teile, 276
- Weite (*width*)
  - einer Baumzerlegung, 258
- Welsh, D.J.A., 151
- Wheel Theorem, 49, 68
- Whitney, H., 69, 84, 93
- Winkler, P., 250
- Wirth, B., 125
- Wohlquasiordnung (*well-quasi-ordering*), 251–279, 252
- Würfel (*cube*), 28, 249
- Wurzel (*root*), 14
- Wurzelbaum (*rooted tree*), 14, 29, 254, 275
- Zeichnung (*drawing*), 80–84
  - geradlinig (*straight-line*), 94, 95
  - konvexe, 84, 95, 97
- zentral (*central*)
  - Ecke, 9
  - Moment, 243

- Zerlegung (*decomposition*)  
 in Wälder, 63
- Zufallsgröße (*random variable*), 233
- Zufallsgraph (*random graph*), 167, 229–250, 231  
 Entwicklung (*evolution*), 241  
 unendlicher, 248  
 zugänglicher Punkt, 72
- (1-) Zusammenhang (*connectedness*), 10, 13
- Zusammenhang (*connectivity*), 11–13, 45–69  
 2-Zusammenhang, 46–47, 66  
 3-Zusammenhang, 47–52, 66, 84, 94  
 und Darstellung in der Ebene, 84  
 und Durchschnittsgrad, 12  
 und Hamiltonkreise, 212–214, 225  
 und Kantenzusammenhang, 11, 28, 66  
 und Minimalgrad, 11, 28  
 und Paarungen, 43
- Ramseysätze bei gegebenem, 204–206  
 und Tailleweite, 238  
 und Umfang, 66, 67  
 und Verbundenheit, 68  
 eines Zufallsgraphen, 239
- zusammenhängend (*connected*), 10  
*k*-zusammenhängend, 11, 57, 68, 69  
 und Eckenauzahlung, 10, 14  
 minimal, 13  
 Zufallsgraph, 249
- Zusammenhang (*connectivity*), 11
- Zusammenkleben, 116, 170, 171
- zweites Moment, 242–247
- Zyklenraum (*cycle space*), 22, 24–25, 29, 49–52, 89, 93, 94, 97  
 Dimension, 30
- zyklomatische Zahl (*cyclomatic number*), 22
- Zyklus, 22, 29
- Zykov, A.A., 182



# Englisch-deutscher Index

---

Dieser Index enthält die gebräuchlichsten englischen Wörter all derjenigen Begriffe, die im Text definiert sind – zusammen mit ihrer deutschen Entsprechung und der Textstelle der Definition.

- acyclic* (kreislos), 13
- adjacency matrix* (Adjazenzmatrix), 26
- adjacent* (benachbart), 3
- almost all/every/no* (fast alle/jeder/kein), 238
- alternating* (alternierend), 31, 54
- antichain* (Antikette), 42
- arboricity* (Arborizität), 63
- arc* (Kante, eines gerichteten Graphen), 26
- articulation point* (Artikulation), 11
- augmenting path* (Verbesserungsweg), 31
- automorphism* (Automorphismus), 3
- average degree* (Durchschnittsgrad), 5
- balanced* (ausgewogen), 244
- biconnected* (2-zusammenhängend), 46
- bipartite* (bipartit), 15
- block* (Block), 46
  - cutvertex graph* (Block-Graph), 46
- bond* (minimaler nicht-leerer Schnitt), 23
  - space* (Schnitttraum), 23
- boundary* (Rand), 72
- bramble* (Netz), 258
  - number* (Vernetzungsgrad), 261
- branch set* (Verzweigungsmenge), 18
- branch vertex* (Verzweigungsecke), 19
- bridge* (Brücke), 11
- capacity* (Kapazität), 130
- center* (zentrale Ecke), 9
- chain* (Kette), 14, 42
- choice number* (listenchromatische Zahl), 109
- k-choosable* (*k*-listenfärbbar), 109
- chord* (Sehne), 8
- chordal* (chordal), 116
- chromatic* (chromatisch), 99
  - index* (Index), 100
  - number* (Zahl), 99
  - polynomial* (Polynom), 121
- circuit* (Kreis; auch geschlossener Kantenzug ohne Kantenwiederholung), 8
- circulation* (Rundfluß), 129
- circumference* (Umfang), 8
- claw* ( $K_{1,3}$ -Untergraph), 16
- clique* ( $K^n$ -Teilgraph, evtl. maximal), 3
  - number* (Cliquenzahl), 3
- closed walk* (geschlossener Kantenzug), 10
- cocycle space* (Schnitttraum), 23
- colour class* (Farbklasse), 102
- colour-critical* (kritisch), 121
- colouring* (Färbung), 99
  - number* (Reihenanzahl), 102
- comparability graph* (Vergleichbarkeitsgraph), 123



- complement* (Komplement), 4  
*complete* (vollständig)  
   *bipartite* (bipartit), 15–16  
   *graph* (Graph), 3  
   *matching* (Paarung der ganzen Eckenmenge), 31  
   *multipartite* (multipartit), 15–16  
   *r-partite* (*r*-partit), 15  
*complexity* (Komplexität), 273  
*component* (Komponente), 10  
*(k-) connected* (*(k-)* zusammenhängend), 10, 11  
*connectedness* (die Eigenschaft, zusammenhängend zu sein), 10  
*connectivity* (Zusammenhang), 11  
*k-constructable* (*k*-konstruierbar), 105–106  
*contraction* (Kontraktion), 17  
*cover* (Überdeckung), 32, 41, 258  
*critical* (kritisch), 121  
*(k-) cube* (*(k-*dimensionaler) Würfel), 28  
*cubic* (kubisch), 5  
*cut* (Schnitt), 23, 130  
   *space* (Schnittraum), 23  
   -*set* (trennende (meist Kanten-) Menge), 10–11  
   -*vertex* (Artikulation), 11  
*cycle* (Kreis; Zyklus), 8; 22  
   *double cover* (doppelte Kreisüberdeckung), 150  
   *space* (Zyklenraum), 22  
*cyclomatic number* (zyklomatische Zahl), 22  
*decomposition* (Zerlegung), 62, 182  
*k-degenerate* (ohne Teilgraph vom Minimalgrad  $> k$ ), 102  
*degree* (Grad), 5  
   *sequence* (Gradsequenz), 214  
*delete* (löschen), 4  
*density* (Dichte), 173  
*depth-first search tree* (Tiefensuchbaum), 14  
*diameter* (Durchmesser), 9  
*digon* (Doppelkante), 27  
*digraph* (gerichteter Graph), 26  
*directed* (gerichtet), 26  
*disconnected* (unzusammenhängend), 10  
*disconnect* (trennen), 11  
*disjoint* (disjunkt), 3  
*distance* (Abstand), 9  
*double edge* (Doppelkante), 27  
*drawing* (Zeichnung), 80  
*dual* (dual), 91  
*edge* (Kante), 2  
   *k-edge-choosable* (aus Listen von je *k* Farben stets kantenfärbbar), 109–110  
   -*chromatic number* (kantenchromatische Zahl), 100  
   *colouring* (Kantenfärbung), 100  
   *ℓ-edge-connected* (*ℓ*-kantenzusammenhängend), 11  
   -*connectivity* (Kantenzusammenhang), 11  
   *cover* (Kantenüberdeckung), 123  
   *cut* (Schnitt), 23  
   *independence number* (größte Mächtigkeit einer Paarung), 32  
   -*maximal* (kantenmaximal), 4  
   *space* (Kantenraum), 22  
*embedding* (Einbettung), 80  
*empty graph* (leerer Graph), 2  
*endblock* (Blatt des Block-Graphen), 46  
*end (-vertex)* (Endecke), 2  
*excluded minor* (verbotener Minor), 263  
*exterior face/region* (Außengebiet), 74  
*extremal* (extremal), 153  
*face* (Gebiet), 74  
*k-factor* (*k*-Faktor), 31  
*factor-critical* (faktorkritisch), 38  
*fan* (Fächer), 57  
*flow* (Fluß), 130  
   *number* (Flußzahl), 135  
   *polynomial* (Flußpolynom), 135  
*forbidden* (*subgraph*, *minor* etc.) (verboten), 153, 263  
*forcibly hamiltonian sequence* (hamiltonsches Tupel), 214  
*forest* (Wald), 13  
*four-colour theorem* (Vierfarbensatz), 100  
*genus* (Geschlecht), 277  
*geometric dual* (topologisches Dual), 91  
*girdle* (kürzester Kreis), 8  
*girth* (Tailleweite), 8  
*graph* (Graph), 2, 28  
*graphic sequence* (Gradsequenz irgendeines Graphen), 214  
*grid* (Gitter), 259  
*Hamilton*  
   -*closure* (Hamilton-Abschluß), 226  
   -*cycle* (Hamiltonkreis), 211  
   -*path* (Hamiltonweg), 211  
*hamiltonian* (hamiltonsch), 211  
*head* (Endecke  $ter(e)$ ), 26  
*hereditary* (erblich), 264

- homeomorphic graphs* (Graphen mit isomorphen Unterteilungen), 19  
*homomorphism* (adjazenzerhaltene Eckenabbildung), 3  
*hypergraph* (Hypergraph), 26  
*incidence matrix* (Inzidenzmatrix), 26  
*incident* (inzident), 2  
*independence number* (Unabhängigkeitszahl), 3  
*independent*  
   *paths* (kreuzungsfreie Wege), 7–8  
   *vertices/edges* (unabhängige Ecken/Kanten), 3  
*indicator random variable* (charakteristische Zufallsgröße), 234  
*induced* (induziert), 3  
   *subgraph* (Untergraph), 3  
*initial vertex* (Anfangsecke), 26  
*integral flow* (ganzzahliger Fluß), 130  
*interior* (im Innern), 7, 74  
*internal* (im Innern), 7  
   *internally disjoint* (kreuzungsfrei), 7–8  
*intersection* (Schnitt), 3  
   *graph* (Schnittgraph), 276  
*interval graph* (Intervallgraph), 123  
*invariant* (Invariante), 3  
*isolated vertex* (isolierte Ecke), 5  
*isomorphic* (isomorph), 3  
*isomorphism* (Isomorphismus), 3  
*isthmus* (Brücke), 11  
*join*  
   *operation* \* (\*-Produkt), 4  
   *vertices* (verbinden), 2  
*kernel* (Kern), 113  
*leaf* (Blatt), 13  
*lean* (schlank), 261  
*length* (Länge), 7  
*line* (Kante), 2  
   *graph* (Kantengraph), 4  
*link* (einfache Kante eines Multigraphen), 27  
*(k-) linked* ((k-) verbunden), 63, 158  
*list-chromatic index* (listenchromatischer Index), 109–110  
   *colouring* (Listenfärbung), 109  
*loop* (Schlinge), 26  
*map* (Landkarte), 99  
*match* (paaren), 31  
*matching* (Paarung), 31  
   *number* (größte Mächtigkeit einer Paarung), 31  
*maximal* (maximal, meist bzgl.  $\subseteq$ ), 4  
*maximum* (von max. Mächtigkeit), 4  
*minimal* (minimal, meist bzgl.  $\subseteq$ ), 4  
*minimum* (von min. Mächtigkeit), 4  
*minor* (Minor), 18  
*monochromatic* (einfarbig), 187, 193  
*monotone/monotonic* (monoton), 241  
*multigraph* (Multigraph), 27  
*multiple edge* (Mehrfachkante), 26  
*multiplicity* (Vielfachheit)  
*neighbour* (Nachbar), 3  
*network* (Netzwerk), 130  
*node* (Knoten, Ecke), 2  
*nowhere-zero* (nirgends null), 133  
*null* (leer), 2  
*octahedron* (Oktaeder), 12  
*order* (Ordnung), 2  
*orientation* (Orientierung), 27  
*parallel edges* (parallele Kanten), 26  
*r-partite* (r-partit), 15  
*path* (Weg), 7  
   *cover* (Wegüberdeckung), 41  
   *-decomposition* (Wegzerlegung), 265  
   *-width* (Wegbreite), 265  
*perfect* ()  
   *graph* (perfekter Graph), 115  
   *matching* (Paarung der ganzen Eckenmenge), 31  
*planar* (plättbar), 84  
   *embedding* (Einbettung in die Ebene), 80  
*plane* (eben), 74, 80, 91  
   *triangulation* (ebener Dreiecksgraph), 77  
*point* (Ecke), 2  
*polygon* (Polygon), 71  
*polygonal arc* (Polygonzug), 71  
*power* (Potenz), 216  
*projective plane* (projektive Ebene), 278  
*property* (Eigenschaft), 238  
*quasi-ordering* (Quasiordnung), 252  
*radius* (Radius), 9  
*Ramsey number* (Ramseyzahl), 187  
*random graph* (Zufallsgraph), 231  
*reducible* (reduzierbar), 124  
*region* (Gebiet), 74  
*regular* (regulär), 5  
*regularity graph* (Regularitätsgraph), 175  
*rigid-circuit* (chordal), 116  
*root* (Wurzel), 14  
*rooted tree* (Wurzelbaum), 14  
*saturated* (kantenmaximal), 4  
*segment of a path* (Teilweg), 7  
*separable* (eine Artikulation enthalten), 11

- separate* (trennen), 10–11, 72  
*separator* (Trenner), 11  
*sequential colouring algorithm* (Greedy-Algorithmus), 102  
*set system* (Hypergraph), 26  
*simple* (schlicht)  
   *basis* (Basis), 89  
   *graph* (Graph), 28  
*size* (Größe; Kantenzahl), 2  
*spanned* (aufgespannt), 3  
*spanning* (aufspannend), 3–4  
   *tree* (Spannbaum), 14  
*stability number* (Stabilitätszahl), 3  
*stable* (stabil), 3  
*star* (Stern), 16  
*subcontraction* (Minor), 18  
*subdivision* (Unterteilung), 19  
*subgraph* (Teilgraph), 3  
*supergraph* (Obergraph), 3  
*tail* (Anfangsecke  $\text{init}(e)$ ), 26  
*terminal vertex* (Endecke  $\text{ter}(e)$ ), 26  
*threshold function* (Schwellenfunktion), 241  
*topological  $G$*  (Unterteilung von  $G$ ), 19  
*total colouring* (Totalfärbung), 122  
*tournament* (Turnier), 226  
*trail* (Kantenzug ohne Kantenwiederholung), 10  
*transitive* (transitiv), 43  
*travelling salesman* (Handelsreisender), 227  
*tree* (Baum), 13  
   *-decomposition* (Baumzerlegung), 255  
   *-width* (Baumweite), 258  
*triangle* (Dreieck), 3  
*triangulated* (trianguliert), 116  
*triangulation* (Triangulierung)  
   *plane triangulation* (ebener Dreiecksgraph), 77  
*union* (Vereinigung), 3  
*unmatched* (ungepaart), 31  
*valence/valency* (Valenz), 5  
*value of a flow* (Flußstärke), 131  
*vertex* (Ecke), 2  
   *colouring* (Eckenfärbung), 99  
   *cover* (Eckenüberdeckung), 32  
   *cut* (trennende Eckenmenge), 10–11  
   *space* (Eckenraum), 21  
   *-transitive* (eckentransitiv), 43  
*walk* (Kantenzug), 10  
*well-quasi-ordering* (Wohlquasiordnung), 252  
*wheel* (Rad), 49  
*width* (Weite), 258

# Symbolverzeichnis

---

Die Einträge sind grob nach typographischen Gesichtspunkten gruppiert. Auf der ersten Seite finden sich reine Zeichen, lose nach Funktion geordnet; die auftretenden Buchstaben sind hier lediglich Variablen. Der Eintrag “[ ]” beispielsweise verweist ebenso auf induzierte Teilgraphen  $H[U]$  wie auf Gebietsränder  $G[f]$ . Auf der zweiten Seite sind die Symbole aufgelistet, die Buchstaben enthalten, innerhalb jeder typographischen Gruppe alphabetisch. Als Variablen auftretende weitere Buchstaben werden von der alphabetischen Sortierung ignoriert.

$\emptyset$	2	$\langle , \rangle$	22
$=$	3	$/$	17, 27
$\mathcal{R}$	3	$\mathcal{C}^\perp, \mathcal{F}^\perp, \dots$	22
$\cap$	3	$\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \dots$	1
$\subseteq$	254	$(n)_k, \dots$	234
$\simeq$	18	$E(v), E'(w), \dots$	3
$+$	4, 21, 133	$E(X, Y), E'(U, W), \dots$	2
$-$	4, 74, 133	$(e, x, y), \dots$	128
$\in$	2	$\vec{E}, \vec{F}, \vec{C}, \dots$	128, 141, 143
$\setminus$	74	$\bar{e}, \bar{E}, \bar{F}, \dots$	128
$\cup$	3	$f(X, Y), g(U, W), \dots$	129
$\cap$	3	$G^*, F^*, \bar{e}^*, \dots$	92, 140, 141
$*$	4	$G^2, H^3, \dots$	216
$[ ]$	1	$\overline{G}, \overline{X}, \overline{G}, \dots$	4, 128, 264
$[ ]$	1	$(S, \bar{S}), \dots$	130
$   $	2, 131	$xy, x_1 \dots x_k, \dots$	2, 7, 8
$\  \ $	2, 173	$xP, Px, xPy, xPyQz, \dots$	7
$[ ]$	3, 74, 76	$\dot{P}, \dot{x}Q, \dots$	7
$[ ]^k, [ ]^{<\omega}$	1, 252	$xTy, \dots$	13

$\mathbb{F}_2$	21	$d(G)$	5
$\mathbb{N}$	1	$d(v)$	5
$\mathbb{Z}_n$	1	$d^+(v)$	113
$\mathcal{C}_G$	36	$d_G(x, y)$	9
$\mathcal{C}(G)$	22	$d(X, Y)$	173
$\mathcal{C}^*(G)$	23	$\text{diam}(G)$	9
$\mathcal{E}(G)$	22	$\text{ex}(n, H)$	153
$\mathcal{P}_H$	244	$f^*(v)$	92
$\mathcal{G}(n, p)$	230	$g(G)$	8
$\mathcal{P}_{i,j}$	239	$\text{init}(e)$	26
$\mathcal{V}(G)$	21	$\log, \ln$	1
$C^k$	8	$\text{pw}(G)$	265
$E(G)$	2	$q(G)$	36
$E(X)$	233	$\text{rad}(G)$	9
$F(G)$	74	$t_{r-1}(n)$	154
$\text{Forb}_{\preceq}(\mathcal{X})$	263	$\text{ter}(e)$	26
$G(H_1, H_2)$	194	$\text{tw}(G)$	258
$K^n$	3	$v_e, v_{xy}, v_U$	17, 18
$K_{n_1, \dots, n_r}$	16	$v^*(f)$	92
$K_s^r$	16	$\Delta(G)$	5
$L(G)$	4	$\alpha(G)$	3
$MX$	18	$\delta(G)$	5
$N(v), N(U)$	5	$\varepsilon(G)$	5
$N^+(v)$	113	$\kappa(G)$	11
$P$	231	$\kappa_G(H)$	60
$P^k$	7	$\lambda(G)$	11
$P_G$	121	$\lambda_G(H)$	60
$R_s$	175	$\mu$	243
$R(k, c, r), R(H), \dots$	190	$\pi : S^2 \setminus \{(0, 0, 1)\} \rightarrow \mathbb{R}^2$	73
$S^n$	73	$\sigma_k : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}_k$	135
$TX$	19	$\sigma^2$	243
$T^{r-1}(n)$	154	$\varphi(G)$	135
$V(G)$	2	$\chi(G)$	99, 128
$\text{ch}(G)$	109	$\chi'(G)$	100
$\text{ch}'(G)$	110	$\chi''(G)$	122
$\text{col}(G)$	102	$\omega(G)$	3

**Reinhard Diestel** (\*1959) promovierte 1986 bei B. Bollobás an der Universität Cambridge, als Stipendiat und Knight-Preisträger des Trinity-College. Als Fellow von St. John's College blieb er bis 1989 in Cambridge und habilitierte sich während dieser Zeit (1987) in Hamburg. Nach Forschungsaufenthalten in den USA und in Bielefeld verbrachte er das Jahr 1993-94 als Heisenbergstipendiat in Oxford und wurde anschließend Professor für Mathematik an der TU Chemnitz. Seit 1999 lehrt er an der Universität Hamburg.

Reinhard Diestels Hauptforschungsgebiet ist die endliche und unendliche Graphentheorie; er veröffentlichte zahlreiche Artikel und eine Monographie, *Graph Decompositions* (1990).