

Mathematische Gartenkunst im Projekt

„Offene Gärten 2027“:

Der Garten von Familie Behrends in Berlin-Lankwitz



1. Der Garten

Der Garten befindet sich in der Geraer Straße 69 in 12249 Berlin. Er ist knapp 100 Jahre alt und sorgfältig als Ziergarten angelegt. Eine bei der Anlage des Gartens gepflanzte Quitte trägt immer noch in jedem Jahr.

Um den Garten möglichst gut nutzen zu können, sind Gerätehaus und Fahrrad-schuppen, Pavillon und Wäschehaus geplant und realisiert worden.

Eine *Besonderheit* sind die *zahlreichen mathematischen Kunstwerke* im Garten, die im Laufe der letzten Jahrzehnte entstanden sind. Der Hintergrund: Der Hausherr ist Mathematikprofessor (seit einiger Zeit im Ruhestand) mit handwerklichen Ambitionen. Es ist zu hoffen, dass viele Besucherinnen und Besucher mit einem Bastelkeller angeregt werden, ihren Garten selber durch Kunstwerke zu verschönern.

2. Mathematische Gartenkunst

Hier eine Übersicht:

2.1 Nur von der Straße aus zu sehen

2.1.1 Eine unmögliche Figur

2.1.2 Penroseparkettierung am Schornstein

2.1.3 Kochkurve am Jalousienkasten (ein Fraktal)

2.2 Vorgarten

2.2.1 Steinskulptur

- 2.2.2 Tensegrity I
- 2.2.3 Sonnenuhr
- 2.2.4 Platonische Körper am Carport
- 2.2.5 Knoten
- 2.3 Terrasse
 - 2.3.1 Nachbau des „Ring of Peace“ (Lindau am Bodensee)
 - 2.3.2 Tensegrity II und Tensegrity III
 - 2.3.3 Gaußsche Glockenkurve als Sichtschutz.
- 2.4 Garten hinter dem Haus
 - 2.4.1 Tensegrity IV
 - 2.4.2 Möbius-Mobiles

2.1 Nur von der Straße aus zu sehen

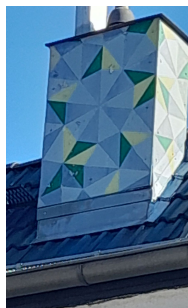
2.1.1 Eine unmögliche Figur



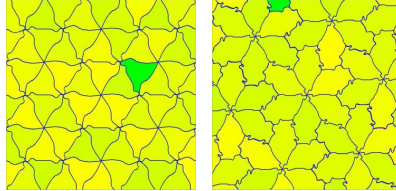
Mathematischer Hintergrund: Das gehört eher in den Bereich der Sinnestäuschung als in den Bereich der Mathematik: Das Auge weiß nicht so recht, wie es das Bild verstehen soll (zeigen die Säulen nun nach links oder nach rechts?). Der Künstler Escher hat dieses Prinzip oft verwendet.

Schwierigkeitsgrad beim Nachbau: Auch das ist eher einfach. Hier wurde ein Sichtschutz dekoriert. Die Grundfläche war blau gestrichenes Sperrholz, und die Figur wurde durch Aufnageln von dünnen quadratischen weiß gestrichenen Stangen realisiert.

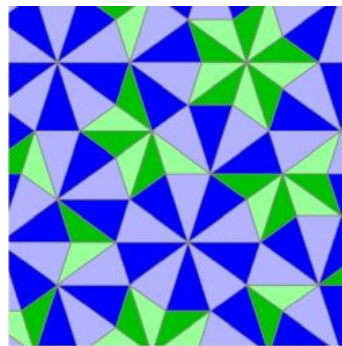
2.1.2 Penrose-Parkettierung am Schornstein



Mathematischer Hintergrund: Eine *Parkettierung* ist eine regelmäßige Ausfüllung der ganzen Ebene, wobei nur Flächen aus einem vorgegebenen Vorrat verwendet werden dürfen. Etwa so wie die Fliesen auf einem Badezimmerboden. Man kann es aber auch mit komplizierteren Formen machen, etwa so:



Es war lange ein offenes Problem, ob solche Parkettierungen immer *periodisch* sein müssen, ob sie also durch Verschieben in sich übergeführt werden können. Ein berühmtes Gegenbeispiel, also eine nichtperiodische Parkettierung, ist die *Penrose-Parkettierung*. Sie ist aus zwei Dreiecken aufgebaut, bei denen bei den Seitenlängen der goldene Schnitt eine wichtige Rolle spielt. Auf dem Schornstein sieht man einen winzigen Ausschnitt, im nachstehenden Bild ist mehr abgebildet, aber eigentlich ist die ganze Ebene ausgefüllt.



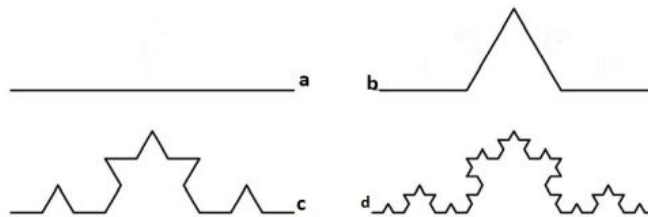
Schwierigkeitsgrad beim Nachbau: Das sollte machbar sein, im Prinzip kann jede Fläche in jeder Größe damit dekoriert werden. Man könnte sich ja Schablonen aus einer starken Vergrößerung des vorstehenden Bildes herstellen und damit die zu füllende Fläche durch Hilfslinien vorbereiten. Die vier benötigten Farben sind natürlich Geschmackssache.

2.1.3 Kochkurve am Jalousienkasten (ein Fraktal)



Mathematischer Hintergrund: Die Kochkurve¹ ist eines der ersten *Fraktale*. Das sind stark „zerklüftete“ Gebilde, die in der Mathematik eine wichtige Rolle spielen und in den siebziger Jahren durch den Mathematiker Mandelbrot eine gewisse Popularität erreichten.

Sie entsteht so wie im nächsten Bild skizziert:



- Man beginnt mit einer Strecke: (a).
- Die wird in drei gleiche Teile geteilt, das mittlere Drittel wird ersetzt durch zwei Stücke, die als gleichseitiges Dreieck oben drauf gesetzt werden: (b)
- Man hat nun vier Strecken. Jede einzelne wird behandelt wie in (b): in drei Teile teilen, das mittlere durch ein Hütchen ersetzen: (c).
- So wird das fortgesetzt, als nächstes entsteht (d), und dann geht es im Prinzip weiter bis ins Unendliche. So entsteht eine wild gezackte Kurve.

Die so entstehende Kurve hat eine merkwürdige Eigenschaft. Welche Länge hat sie denn? Das erste Stück (die Strecke in (a)) soll der Einfachheit die Länge Eins haben. In (b) hat sie schon die Länge $4/3 = 1.333 \dots$, in (c) dann $(4/3)^2 = 16/9 = 1.777 \dots$. Und es wird von Schritt zu Schritt immer mehr: Falls wir noch zwei weitere Schritte Geduld gehabt hätten, wären wir schon bei $(4/3)^4 = 3.160 \dots$. Und nach und nach wird jede Grenze überschritten. Kurz:

Die Kochkurve hat eine unendliche Länge, obwohl sie auf einer endlichen Fläche Platz findet.

Das hat die Mathematiker fasziniert!

Schwierigkeitsgrad beim Nachbau: Ziemlich niedrig. Es wurde DC-Fix-Folie verwendet,, Darauf wurde die Kurve aufgezeichnet und dann wurde sie ausgeschnitten. Die Farbechtheit ist bewundernswert (die Kurve wurde vor vielen Jahrzehnten angebracht).

Eine kleine *Erinnerung an die Geometrie der Schulzeit* kann hilfreich sein: Ein gleichseitiges Dreieck konstruiert man mit einem Zirkel, den man auf die Länge der Grundlinie einstellt. Mit dieser Länge zieht man Kreise, wobei der Zirkel ins linke und dann ins rechte Ende der Grundlinie eingestochen wird. Der Schnittpunkt der Kreise liefert die Dreiecksspitze.

¹Benannt nach dem schwedischen Mathematiker Helge Koch, der diese Kurve Anfang des 20. Jahrhunderts untersuchte.

2.2 Vorgarten

2.2.1 Steinskulptur



Mathematischer Hintergrund: Diese Skulptur wurde von dem Steinkünstler Klaus Becker als Teil der Serie „Annäherung an die Kugel“ geschaffen. Er hat sie Familie Behrends anlässlich des mathematischen Weltkongresses 1998 in Berlin geschenkt. Wie kann man die Kugelgestalt durch einen durch Flächen begrenzten Körper annähern?

Schwierigkeitsgrad beim Nachbau: Das ist das einzige nicht selbst hergestellte Kunstwerk in diesem Garten. Vom Versuch eines Nachbaus ist allen abzuraten, die sich nicht mit der Bearbeitung von Steinen auskennen.

2.2.2 Tensegrity I



Mathematischer Hintergrund: Das ist eines der vier Tensegrities in diesem Garten. Das Wort „Tensegrity“ ist ein Kunstwort, zusammengesetzt aus „Tension“ (Spannung) und Integrity (Festigkeit). Es realisiert eine scheinbar unmögliche Konstruktion: Feste Teile (hier: Stangen) können zu einem stabilen Gesamtgebilde dadurch zusammengefügt werden, dass sie mit Schnüren (hier: Drahtseilen) verbunden werden, ohne sich gegenseitig zu berühren. Erfunden wurde es von dem Architekten Buckminster Fuller (viel mehr dazu im Internet). Es hat Architekten zu fragilen Dächern und Künstler zu spektakulären Kunstwerken angeregt.

Schwierigkeitsgrad beim Nachbau: Dieses Tensegrity besteht aus Aluminiumrohren, die durch ummantelten Stahldraht verbunden sind. Die Stangen wurden mit einer Flex eingekerbt, dann wurden die Drähte mit Stellringen eingeklinkt.

Es ist eines der einfachsten Tensegrities in diesem Garten, aber immer noch ziemlich anspruchsvoll.

Wer sich erst einmal an den Schwierigkeitsgrad herantasten möchte, könnte sich am allereinfachsten Tensegrity versuchen:



Da wird die Stabilität durch einfache Schnüre hergestellt.

2.2.3 Sonnenuhr



Mathematischer Hintergrund: Hier ist nur wichtig, den schattengebenden Stab (hier eine dünne Alu-Stange) in demjenigen Winkel auszurichten, der der geografischen Breite des zukünftigen Standorts entspricht. Dann muss sie exakt nach Süden zeigen. Es ist auch ein Hinweis angebracht, wie man bei Sommer- bzw. Winterzeit abzulesen hat.

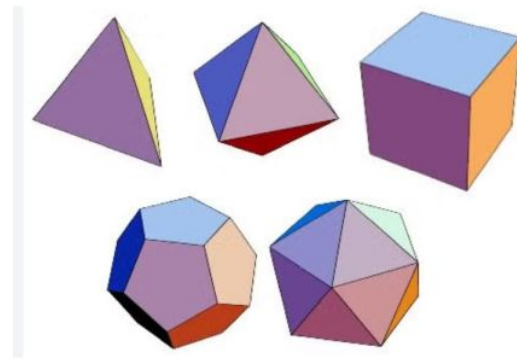
Schwierigkeitsgrad beim Nachbau: Das ist recht einfach. Die Uhr besteht aus angestrichenem Sperrholz, die Stundenstreifen sind aus Folie ausgeschnitten.

2.2.4 Platonische Körper am Carport



Mathematischer Hintergrund: Die Oberfläche eines *platonischen Körpers* besteht aus regelmäßigen Vielecken, so dass an jeder Ecke die gleiche Anzahl dieser Vielecke zusammenstößt. Ein erstes bemerkenswertes Ergebnis in der Frühzeit der Mathematik war die Erkenntnis, dass es genau fünf platonische Körper gibt: Das wurde vor über 2000 Jahr bewiesen.

Die fünf platonischen Körper sind Tetraeder (Seiten: Dreiecke), Oktaeder (Seiten: Dreiecke), Würfel (Seiten: Quadrate), Dodekaeder (Seiten: Fünfecke), Ikosaeder (Seiten: Dreiecke),

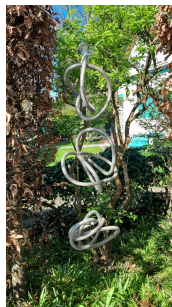


Hier am Carport sind Oktaeder und Ikosaeder als Mobile realisiert.

Schwierigkeitsgrad beim Nachbau: Diese Mobiles sind recht einfach herzustellen: Man sägt dünne Alu-Rohre zurecht und bindet sie durch innen verlaufende Nylonsehnur zusammen. Jede Größe ist dabei möglich.

Am einfachsten wäre der Bau eines Tetraeders. Würfel und Dodekaeder empfehlen sich weniger, denn da müsste man noch die Winkel an den Ecken stabilisieren. (Zum Beispiel durch ein innen verlaufendes stabiles Drahtstück.) Wenn die Seitenflächen Dreiecke sind, ist das einfacher, denn ein Dreieck ist durch seine Seitenlängen eindeutig bestimmt. Das stimmt für Vier- und Fünfecke nicht.

2.2.5 Knoten



Mathematischer Hintergrund: Knotentheorie ist ein schwieriges Teilgebiet der Mathematik. Hier sieht man ein Mobile, dass aus Knoten verschiedener Komplexität gebildet ist.

Schwierigkeitsgrad beim Nachbau: Mittel. Es sind die Hüllen verwendet worden, in denen Elektrokabel im Bau verlegt werden. Innen sind sie durch eine sehr starken Draht (Zaunspanner) stabilisiert.

2.3 Terrasse

2.3.1 Nachbau des „Ring of Peace“ (Lindau am Bodensee)



Mathematischer Hintergrund: In Lindau am Bodensee steht eine riesige Skulptur „Ring of Peace“ (knapp 10 Meter hoch). Sie soll ein *Möbiusband* darstellen.



Ein Möbiusband entsteht so: Man denke sich einen sehr schmales langes Rechteck aus Papier. Es wird um die schmale Achse einmal um 180 Grad gedreht und dann werden die Enden zusammengeklebt. Bemerkenswert ist dann, dass dieses Gebilde nur eine einzige Fläche als Oberfläche hat, ein vorne und hinten gibt es nicht. Sie wurde von dem Mathematiker Möbius im 19. Jahrhundert entdeckt.

Die Skulptur in Lindau wurde anlässlich eines Kirchentags für viele Kirchen dieser Welt aufgestellt. Dass es im Grunde nur eine einzige Religion gibt, sollte durch das Möbiusband dargestellt werden.

Möbiusbänder findet man recht oft in Logos und in Schmuckstücken.

Schwierigkeitsgrad beim Nachbau: Recht hoch, es sollten nur ambitionierte Handwerker versuchen.

2.3.2 Tensegrity III und Tensegrity IV



Mathematischer Hintergrund: Der Hintergrund wurde schon in Abteilung 2.2.2 beschrieben.

Schwierigkeitsgrad beim Nachbau: Auch bei hoher Frustrationstoleranz kann der Nachbau nicht empfohlen werden. Tensegrity IV ist das schwierigste Kunstwerk, das in diesem Garten zu sehen ist.

2.3.3 Die Gaußsche Glockenkurve als Sichtschutz



Mathematischer Hintergrund: Die Gaußsche Glockenkurve spielt eine fundamentale Rolle in Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik. Alle Zufälle dieser Welt richten sich nach dieser Kurve, wenn sich mehrere Zufälle des gleichen Typs überlagern. (Das muss hier leider etwas vage bleiben.)

Die Wichtigkeit wurde auch gewürdigt, als das Design für den früheren 10DM-Schein entworfen wurde: Man sieht den Mathematiker Gauß und diese Kurve.



Schwierigkeitsgrad beim Nachbau: Das ist nicht besonders schwierig. Man muss allerdings sehr sorgfältig arbeiten, da Ungenauigkeiten bei parallelen Linien schnell auffallen.

2.4 Garten hinter dem Haus

2.4.1 Tensegrity IV



Mathematischer Hintergrund: Der Hintergrund wurde schon in Abteilung 2.2.2 beschrieben.

Schwierigkeitsgrad beim Nachbau: Das ist ähnlich schwierig wie Tensegrity I (also immer noch nicht ganz einfach). Das Bauprinzip ist wie bei Tensegrity I.

2.4.2 Möbius-Mobiles



Mathematischer Hintergrund: Der Hintergrund zu Möbiusbändern wurde schon in 2.3.1 erwähnt.

Schwierigkeitsgrad beim Nachbau: Hier sind ineinandergeschachtelte Möbiusbänder zu einem Mobile zusammengefasst worden. Material ist etwa 2 cm breites Kunststoffband aus dem Bauhaus, wie es für Kanten in Küchen verwendet wird.