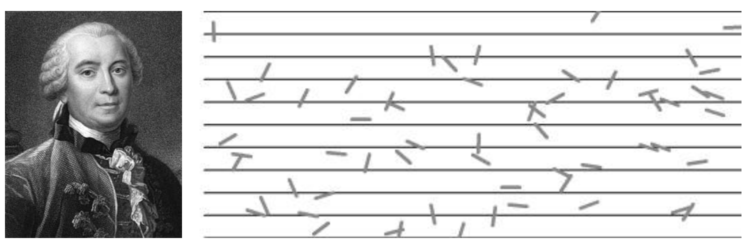
Buffon: Hat er Stöckchen geworfen oder hat er nicht?

Ehrhard Behrends, Freie Universität Berlin

Der Comte George Louis Leclerc de Buffon (1707 – 1788) ist berühmt für das folgende „Experiment“:

> Man suche sich einen Raum mit Dielenfußboden, die Breite der Dielen sei a. Es wird dann noch ein Stöckchen gebraucht; die Länge $2r$ soll kleiner als a sein. Diese Bedingung garantiert, dass das Stöckchen höchstens eine der Dielenkanten trifft, wenn es auf den Boden geworfen wird.



Buffon und das „Nadelexperiment“.

> Die Wahrscheinlichkeit P, dass das passiert (dass es also nicht auf einer einzigen Diele liegt), ist dann $4r/(\pi a)$. In dieser Formel ist π enthalten, und so ergibt sich die Möglichkeit, diese Zahl „experimentell“ zu bestimmen. Man muss das Stöckchen nur „sehr oft“ werfen, etwa n-mal. Wenn es dabei k-mal eine Dielenkante trifft, sollte k/n nach den Gesetzen der großen Zahlen eine gute Näherung von P sein, und damit hätte man durch Auflösen der Gleichung $P = 4r/(\pi a)$ nach π eine Approximation von π gefunden.

(Statt Dielen und Stöckchen kann man natürlich auch einfach liniertes Papier und Nadeln oder Streichhölzer nehmen; der Abstand der Linien muss nur groß genug sein.)

Das ist nach allgemeiner Überzeugung das erste Monte-Carlo-Verfahren der Mathematikgeschichte. Darunter versteht man Verfahren, bei denen der Zufall eingesetzt wird, um Probleme wenigstens näherungsweise lösen zu können: Integrale über hochdimensionalen Definitionsbereichen, Zählprobleme usw.

Buffons Familie war durch eine Erbschaft sehr reich geworden, und so war er schon in jungen Jahren finanziell unabhängig. Wie viele seiner Zeitgenossen war er von den sich damals rasant entwickelnden Naturwissenschaften fasziniert. Er hat sich für alle interessiert; seine Studien führten zu der auf 50 Bände angelegten Enzyklopädie „Histoire naturelle, générale et particulière“ („Naturgeschichte, im Allgemenen und im Besonderen“), von der 36 Bände veröffentlicht wurden. Von 1739 an war er Verwalter des königlichen Gartens in Paris („Jardin

Royal“, heute „Jardin des Plantes“). Diese Tatsache hat auch bis in die Gegenwart Spuren hinterlassen: Im 5. Arrondissement, als südliche Begrenzung des Jardin des Plantes, in der Nähe des Universitätscampus Jussieu, gibt es eine Rue Buffon.

Die Rue Buffon.

Es war geplant, dass diese Straße im November 2013 eine wichtige Rolle bei einer Aktion zur Popularisierung der Mathematik spielen sollte. Das rpa-Komitee (rpa = “raising public awareness”) der European Mathematical Society (EMS) traf sich nämlich in diesem Monat in Paris, und die Idee kam auf, das Buffonexperiment in der Rue Buffon „nachzustellen“. Die Voraussetzungen konnten besser nicht sein, denn die hier relevante Mathematik ist auch für Laien verständlich (aber auch nicht zu trivial), und mit etwas Glück und professioneller Vorbereitung konnte man auf eine gute Medienresonanz hoffen und so für die Mathematik werben.

Der Plan wurde aber ersatzlos gestrichen. Als sich nämlich Mitglieder des Komitees mit dem Mathematikhistoriker Bernard Bru aus Paris in Verbindung setzten, um sich über historische Einzelheiten zu informieren, stellte sich heraus, dass es bis heute keine historischen Belege dafür gibt, dass Buffon einen Zusammenhang seiner theoretischen Überlegungen zur approximativen Berechnung von π gesehen geschweige denn sein „Experiment“ wirklich durchgeführt hat. Es handelt sich um ein interessantes Beispiel dafür, dass historische Tatsachen und „allgemein anerkanntes Wissen“ durchaus nicht übereinstimmen müssen. Diese Diskrepanz soll nun etwas näher beleuchtet werden.

Wir beginnen mit den gesicherten Fakten.

1. Wirklich hat Buffon im Jahr 1733 eine Arbeit bei der königlichen Akademie eingereicht (in die er dann auch 1734 aufgenommen wurde), in der er korrekt die Wahrscheinlichkeit dafür berechnet, dass ein zufällig geworfener Stab der Länge $2r$ eine von mehreren parallelen Linien trifft, die den gegenseitigen Abstand a haben (mit $2r < a$).

> „Sur un plancher qui n’est formé que de planches égales & parallèles, on jette une Baguette d’une certaine longueur, & qu’on suppose sans largeur. Quand tombera-t-elle sur une seule planche?“ (Frei übersetzt: „Man wirft einen Stab einer gewissen Länge, dessen Dicke zu vernachlässigen ist, auf einen Fußboden, der aus parallelen Dielen

gleicher Breite besteht. Wann wird er auf nur eine einzige Diele fallen?“) (Vgl. [1].)

Er weist auch darauf hin, dass man mit seiner Formel dasjenige a bestimmen kann, bei dem die Chance 50 Prozent ist, eine Kante zu treffen: „Il y a donc une certaine largeur de la planche qui rendroit le pari ou le jeu égal“ (Frei übersetzt: „Es gibt folglich eine gewisse Dielenbreite, bei der die Wette – oder das Spiel – fair ist.“).

2. Diese Untersuchungen wurden – in einer ausführlicheren Version – 1777 in seiner„Histoire naturelle“ veröffentlicht. Da wird noch deutlicher, dass die Hauptmotivation seiner Bemühungen darin besteht, die Chancen für Spieler auszurechnen:

> „Je suppose que, dans une chambre dont le parquet est simplement divisé par des points parallèles, on jette en l'air une baguette, et que l'un des joueurs parie que la baguette ne croisera aucune des parallèles du parquet, et que l'autre au contraire parie que la baguette croisera quelques-unes des ces parallèles; on demande le sort de ces deux joueurs. (On peut jouer ce jeu sur un damier avec une aiguille à coudre ou une épingle sans tête.)“ (Frei übersetzt: „Ich nehme an, dass man in einem Zimmer, in dem das Parkett einfach durch parallele Punkte unterteilt ist, einen Stab in die Luft wirft, dass der eine Spieler wettet, dass der Stab keine der Parallelen des Parketts kreuzt, dass der andere Spieler aber wettet, dass er eine der Parallelen kreuzen wird; man fragt nach den Chancen dieser beiden Spieler. (Man kann dieses Spiel auch auf einem Damebrett mit einer Nähnadel oder einer Stecknadel ohne Kopf spielen.)“) (Vgl. [2], ab Seite 411.)

3. Später hat er auch Experimente zum Petersburger Paradoxon duchgeführt. Dabei geht es um ein Spiel, bei dem eine faire Münze so oft geworfen wird, bis sie zum ersten Mal „Kopf“ zeigt. Wenn das im k-ten Versuch passiert, erhält der Spieler 2^k Taler/Dukaten/... Der Erwartungswert des Gewinns ist Unendlich, *das* sollte sinnvoller Weise die Gebühr sein, das Spiel spielen zu dürfen.

Buffon beschreibt das Spiel in [2] ab Seite 394, und auf Seite 399 erfährt man, dass er dazu Experimente gemacht hat:

> „J'ai donc fait deux mille quarante-huit expériences sur cette question, c'est-à-dire j'ai joué deux mille quarante-huit fois ce jeu, en faisant jeter la pièce par un enfant.“ (Frei übersetzt: „Ich habe folglich 2048 Experimente zu dieser Frage durchgeführt, d.h., ich habe dieses Spiel 2048 Mal gespielt, indem ich die Münze durch ein Kind habe werfen lassen.“)

4. Laplace greift das Buffonproblem wieder auf, und er betont ausdrücklich, dass man die theoretischen Rechnungen zur experimentellen approximativen Bestimmung von π verwenden kann. Nach der Berechnung der Wahrscheinlichkeit, dass eine Linie getroffen wird, schreibt er:

„Si l'on projette un grand nombre de fois ce cylindre, le rapport du nombre de fois où le cylindre rencontrera l'une des divisions du plan au nombre total des projections sera, à très peu près, la valeur de $4r/(a\pi)$, ce qui fera connaître la valeur de la circonférence 2π." (Frei übersetzt: „Wenn man diesen Zylinder sehr oft wirft, so wird das Verhältnis der Zahl der Versuche, bei denen der Stab eine der Teilungen der Ebene trifft, zur Gesamtzahl ungefähr den Wert $4r/(a\pi)$ haben, was einem gestatten wird, den Wert des Kreisumfangs 2π zu ermitteln." (vgl. [6]).

5. Im 19. Jahrhundert gab es dann viele dokumentierte wirkliche Experimente zum Buffonproblem, bei denen Tausende von Nadeln/Stöckchen/... auf parallele Linien geworfen wurden (siehe z.B. [4]). Die Theorie sagt, dass nur Ergebnisse des folgenden Typs zu erwarten sind: Wenn man n-mal wirft und dabei k-mal eine Linie trifft, so erhält man unter Verwendung von k/n für die Approximation von π ein Ergebnis, das mit Wahrscheinlichkeit p bis auf ε mit π übereinstimmt. Dabei darf man sich p (nahe bei Eins) und ε (klein) wünschen, und ein geeignetes n lässt sich daraus – zum Beispiel mit der Tschebycheff-Ungleichung – ermitteln. Leider ist n schon für mäßig große p und nicht sehr kleine ε astronomisch groß, und deswegen ist das Buffonverfahren sicher sehr wenig geeignet, etwas über die Ziffern von π zu erfahren. Erwähnenswert sind in diesem Zusammenhang die Experimente eines gewissen Lazzerini, der 3408 Stöckchen geworfen hat und behauptet, damit π bis auf 6 (!) Stellen genau ermittelt zu haben ([7], Seite 120). Ob die Daten da ein bisschen manipuliert wurden ...?

In bemerkenswertem Kontrast zu den historisch gesicherten Belegen steht der Eindruck, dass Buffon nach allgemeiner Überzeugung π mit seinem „Experiment" approximativ berechnen wollte und das auch wirklich ausgeführt hat:

1. In den Lehrbüchern zur Stochastik wird das Buffonproblem regelmäßig behandelt. Ich habe in den deutschen und englischen Büchern zum Thema keins gefunden, in dem die Aussage „Buffon hat π mit seinem Experiment approximativ berechnen wollen" kritisch hinterfragt wird. (Das gilt – leider – auch für mein eigenes Buch „Elementare Stochastik", Springer Spektrum, 2012.)

2. Die Lehrbuchautoren befinden sich in guter Gesellschaft, denn auch in Büchern zur Geschichte der Wahrscheinlichkeitsrechnung wird ohne Quellenangabe behauptet, dass Buffon experimentiert hat. Hier zwei Beispiele:

- „It was originally performed with a needle" ([5], S. 75).
- „Many investigators (including Buffon) used this result for the experimental determination of π" ([7], S. 120).

(Andere Bücher zur Geschichte lassen den Zusammenhang zur approximativen π-Berechnung wenigstens offen.) Nach Meinung von Herrn Bru beruht diese Situation auf einer Verwechslung: Die Experimente zum Petersburger Paradoxon wurden irgendwann einmal zu π-Experimenten extrapoliert, und das wurde dann immer wieder ungeprüft übernommen.

3. Das Internet ist auch keine große Hilfe. Auf der von mir sehr geschätzten und oft besuchten Seite `http://turnbull.mcs.st-and.ac.uk/history/`, Mac Tutor History of Mathematics, heißt es zu Buffon an der entsprechenden Stelle: „His most notable contribution to mathematics was a probability experiment which he carried out calculating π by throwing sticks over his shoulder onto a tiled floor and counting the number of times the sticks fell across the lines between the tiles."[1]

Es ist noch zu bemerken, dass das Buffonsche „Experiment" zu vielen interessanten Verallgemeinerungen Anlass gibt. Hier einige Beipiele:

- Was ist, wenn der Stock länger ist als der Linienabstand? (Das wurde schon von Laplace berechnet. Für aktuellere Untersuchungen vgl. die Arbeit [3] von P. Diaconis.

- Kann man Stöckchen durch Flächen ersetzen, kann man zum Beispiel Bierdeckel werfen? (Formeln für die Wahrscheinlichkeit findet man immer, aber es hängt von der Fläche ab, ob in der Formel die Zahl π vorkommt.) So eignen sich zum Beispiel quadratische Bierdeckel zur approximativen π-Berechnung, kreisförmige aber nicht.)

- Wie sind die Modifikationen, wenn man ein Stöckchen durch ein gebogenes Kurvenstück der Ebene ersetzt? (Siehe dazu die Arbeit über „Buffon's Noodles" [8].)

Es ist unwahrscheinlich, dass noch neue Dokumente gefunden werden, die uns Erkenntnisse über die hier behandelten Fragen geben könnten. Deswegen ist allen Autoren zukünftiger Lehrbücher zur Stochastik zu empfehlen, Herrn Buffon an der entsprechenden Stelle keine Stöckchen oder Ähnliches werfen zu lassen.

Ein Nachtrag: Das Buffonexperiment kann übrigens mit Computerhilfe leicht realisiert werden, und dabei sind gigantische Versuchsanzahlen möglich. Man muss nur „Abstand des Mittelpunkts des Stöckchens zur nächstgelegenen" Linie" und „Drehwinkel" gleichverteilt erzeugen und prüfen, ob bei dieser Wahl eine Linie geschnitten wird. Man sollte das allerdings so programmieren, dass es nicht zirkulär wird. Wenn man nämlich den zufälligen Winkel durch $\pi\cdot$`random` erzeugt, hat man die genaue Kenntnis von π schon für die recht ungenaue Approximation von π vorausgesetzt, und das ist sicher nicht sinnvoll. Logischer wäre es, einen zufälligen Winkel dadurch zu generieren, dass man einen gleichverteilten Zufallspunkt im Einheitskreis durch Normalisieren in einen gleichverteilten Zufallspunkt auf dem Rand des Kreises transformiert. Dazu muss man sich nur x=`random` und y=`random` mit $x^2 + y^2 \leq 1$ verschaffen.

[1] Vor vielen Jahren las man da übrigens noch etwas anders. Da hatte er keine „sticks" geworfen, sondern „white loaves of bread". Man kann nur vermuten, wie das zustande gekommen ist. Sehr wahrscheinlich sind die „baguettes" in Buffons Originaltext (s.o) als Stangenweißbrot angesehen worden. Doch „la baguette" hat im Französischen eine Fülle von Bedeutungen. Unter anderem heißt es auch „Stab", und das würde schon viel besser passen. Ich hatte die Betreiber der Seite damals gebeten, das zu überprüfen, und bald darauf wurde es geändert.

Abschließend möchte ich den Kollegen Bernard Bru (Paris) und Eberhard Knobloch (Berlin) für ihre Hilfe bei der Erhellung der hier beschriebenen Fragestellungen danken.

Literatur

[1] Buffons Beitrag für die Akademie. Aus den Berichten der Akademie, Jahrgang 1733, ab Seite 43:
`http://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k3530m/f51.image`

[2] Leclerc de Buffon: „Essai d'Arithmétique morale“ 1777.

[3] P. Diaconis: "Buffon's Problem with a long Needle", J. of Applied Probability 13, 1976, 614 – 618.

[4 Ph. Holgate: „Buffon's Cycloid“, Biometrika 68, 1981, 712 – 716.

[5] A. C. King und C. B. Read: „Pathways to Probability“, 1963.

[6] P.-S. Laplace: „Théorie Analytique des Probabilités“, 1812; vgl. S. 366 von Band VII der gesammelten Werke.

[7] L. E. Maistrov: „Probability Theory, a historical sketch“, 1974, S. 120.

[8] J F. Ramaley: „Buffon's Noodle Problem“, American Mathematical Monthly 76, 1969, 916 – 918.

Ehrhard Behrends
Mathematisches Institut, Freie Universität Berlin
Arnimallee 6
D-14 195 Berlin
e-mail: behrends@math.fu-berlin.de