In jeder Analysisvorlesung kommt der Satz vor, dass eine stetige Funktion auf einem kompakten Intervall Riemann-integrierbar ist – zumindest in jeder Vorlesung, die das Riemann-Integral behandelt. Der kanonische Beweis fußt auf der gleichmäßigen Stetigkeit einer solchen Funktion; dass es aber auch anders geht, hat Erhard Schmidt in seinen Vorlesungen vorgeführt (*Vorlesungen über Differential- und Integralrechnung* [aus dem Wintersemester 1948/49], Akademie-Verlag 1992, insbesondere Seite 132).

Schmidt erklärt in bekannter Weise Ober- und Untersummen einer beschränkten Funktion $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ sowie das Ober- und Unterintegral $\int_a^{*b} f(t)\,dt$ bzw. $\int_{*a}^{b} f(t)\,dt$. Sein nächster Schritt ist, mit dem üblichen Argument zu zeigen, dass die durch $F_o(x) = \int_a^{*x} f(t)\,dt$ bzw. $F_u(x) = \int_{*a}^{x} f(t)\,dt$ definierten Funktionen an einer Stelle x_0 differenzierbar mit Ableitung $f(x_0)$ sind, falls f bei x_0 stetig ist.

Sei jetzt f eine stetige Funktion auf $[a,b]$; wir wissen dann also, dass $F_o' = F_u' = f$ ist. Daher unterscheiden sich F_o und F_u nur um eine Konstante, die wegen $F_o(a) = 0 = F_u(a)$ null sein muss. Das liefert insbesondere $F_o(b) = F_u(b)$; mit anderen Worten ist Oberintegral = Unterintegral, und f ist Riemann-integrierbar auf $[a,b]$.

In der letzten Nummer der DMV-Mitteilungen habe ich an dieser Stelle einen Beweis der Riemann-Integrierbarkeit stetiger Funktionen vorgestellt, der ohne die gleichmäßige Stetigkeit auskommt und den ich in Erhard Schmidts Buch *Vorlesungen über Differential- und Integralrechnung* gefunden hatte. Herr Pickert aus Gießen hat mich freundlicherweise darauf hingewiesen, dass diese Beweisvariante bereits in E. Landaus *Einführung in die Differential- und Integralrechnung* aus dem Jahre 1934 vorkommt (ebd. S. 254) und daher wesentlich älter ist. Landau schreibt, er habe den Beweis „aus einer Arbeit von Poli gelernt“. Eine Suchanfrage im *Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik* (`www.emis.de/MATH/JFM/JFM.html`) ergibt, dass damit Cino Polis Arbeit *Sulla dimostrazione dell' integrabilità delle funzioni continue* (Torino Atti 49 (1914), 132–134) gemeint ist. Eine noch frühere Quelle eines solchen Beweises hat Robert Burckel (Manhattan, KA) entdeckt; nämlich G. Kowalewskis *Grundzüge der Differential- und Integralrechnung* aus dem Jahr 1909 (dort Seite 174–176).