KORREKTUREN ZU

Funktionalanalysis

(Springer-Verlag, 8. Auflage 2018)

Dirk Werner

Im folgenden dokumentiere ich die mir bekannt gewordenen mathematischen Tipp- und sonstigen Fehler in chronologischer Reihenfolge. „Reine“ Tippfehler werden nicht extra aufgezählt.

Seite 129. In der drittletzten Zeile von Beispiel (e) muss es $\ldots = \|x_{n_k}\|_p^{p/q} \to \|x_0\|_p^{p/q} = \ldots$ heißen; der Exponent p/q fehlt.

Entdeckt von Sebastian Steinhäuser, Juni 2018.

Seite 378. In Zeile 4 von Beispiel (e) lies $\lambda = -\overline{\gamma}(e-\gamma)/(\overline{e-\gamma})$.

Entdeckt von Cornelius Endres, August 2019.

Seite 381. In Beispiel (h) muss man voraussetzen, dass es keine Atome unendlichen Maßes gibt, z.B. dass μ ein σ-endliches Maß ist; sonst kann man die Menge E auf Seite 382, Zeile 4, nicht wählen. Ohne diese Vorausetzung kann man Beispiele konstruieren, wo $1 \in \rho(M_f)$ ist, aber auch im wesentlichen Wertebereich von f liegt, und die Ungleichung $|h| \le \|M_h\|$ f.ü. braucht nicht zu gelten.

Entdeckt von Cornelius Endres, August 2019.

Seite 436. Die Abschätzung $\operatorname{Re} y'(y) \le p_U(y)$ im Beweis von Lemma VIII.2.10 stimmt im komplexen Fall im Allgemeinen nicht. Man muss, wie in Lemma III.2.3, den Beweis zuerst im reellen Fall führen und dann, wie dort, Lemma III.1.3 anwenden, um die komplexe Version zu erhalten.

Entdeckt von Julian Wüste-Rieback, Oktober 2019.

Seite 378. In Beispiel (d) lies nach der Formelzeile: Beachte, dass [...] auch für $\varphi \in L^2(\mathbb{R}^n)$ mit $\mathcal{F}^{-1}\varphi \in W^2(\mathbb{R}^n)$ gilt.

Entdeckt von Cornelius Endres, November 2019.

Seite 77. In (II.14) muss es $\|T_t f - f\|_p$ statt $\|T_t f - f\|_p^p$ heißen.

Entdeckt von Alexander Graf, März 2020.

Seite 79. In Zeile 7 muss es „von $L^q(\mathbb{R})$ nach $L^r(\mathbb{R})$“ statt „von $L^q(\mathbb{R})$ nach $L^p(\mathbb{R})$“ heißen. – In Zeile 17 muss es $\int_{\mathbb{R}} [\ldots] \|f\|_q^r \, ds$ statt $\int_{\mathbb{R}} [\ldots] \|f\|_q \, ds$ heißen.

Entdeckt von Alexander Graf, März 2020.

Seite 389. In (VII.21) lies $u^{(0)}$ statt $u(0)$.

Entdeckt von Cornelius Endres, November 2020.

Seite 393f. In Beispiel (d) am Ende muss es $\varphi'(0) = \ell(\varphi)$ statt $\varphi(0) = \ell(\varphi)$ heißen. – Das Argument in diesem Beispiel ist etwas knapp; hier die Details.

Ist nämlich zunächst $\varphi \in \mathrm{dom}(A)$, so folgt aus (VII.22)

$$(A\varphi)(s) = \lim_{h\to 0} \frac{T_h\varphi(s) - \varphi(s)}{h} = \begin{cases} \dfrac{d^+\varphi}{dt}(s) & -\sigma \leq s < 0, \\ \ell(\varphi) & s = 0. \end{cases} \tag{1}$$

Da $A\varphi$ stetig ist, muss φ auf $[-\sigma, 0)$ (beidseitig) stetig differenzierbar sein (vgl. das Argument in Beispiel (b)). Mit Hilfe des Mittelwertsatzes sieht man, dass φ auch bei 0 (linksseitig) differenzierbar ist, denn

$$\frac{\varphi(-\tau) - \varphi(0)}{-\tau} = \varphi'(\tilde{s}) = A\varphi(\tilde{s}) \to A\varphi(0) = \ell(\varphi)$$

mit $\tau \to 0$, wo $\tilde{s} \in (-\tau, 0)$ geeignet zu wählen ist. Andererseits ist dieser Grenzwert definitionsgemäß $\varphi'(0)$. Insgesamt zeigt diese Überlegung $\varphi'(0) = \ell(\varphi)$, $A\varphi = \varphi' \in C[-\sigma, 0]$ und somit $\varphi \in C^1[-\sigma, 0]$.

Nun zur Umkehrung. Sei $\varphi \in C^1[-\sigma, 0]$ mit $\varphi'(0) = \ell(\varphi)$. Sei $\varepsilon > 0$. Es ist die Existenz eines $\delta > 0$ zu zeigen, so dass

$$|(T_t\varphi)(s) - \varphi(s) - t\varphi'(s)| \leq 4t\varepsilon \qquad \text{für alle } s \in [-\sigma, 0] \text{ und } 0 < t \leq \delta \tag{2}$$

gilt (die 4 erscheint aus technischen Gründen – wer $t\varepsilon$ zum Schluss haben möchte, muss im folgenden Argument ε durch $\varepsilon/4$ ersetzen).

Wir wählen δ so klein, dass $|\varphi'(s_1) - \varphi'(s_2)| \leq \varepsilon$ für $|s_1 - s_2| \leq \delta$ (gleichmäßige Stetigkeit von φ') und $|\ell(T_\vartheta\varphi) - \ell(\varphi)| \leq \varepsilon$ für $0 \leq \vartheta \leq \delta$ (Stetigkeit dieser Funktion bei 0). Mit dieser Wahl von δ werden wir (2) beweisen und unterscheiden dazu, ob $s + t \leq 0$ oder $s + t > 0$.

Im ersten Fall ist die linke Seite von (2) so abzuschätzen, wenn $t \leq \delta$ ist (Mittelwertsatz!):

$$\begin{aligned} |(T_t\varphi)(s) - \varphi(s) - t\varphi'(s)| &= |\varphi(s+t) - \varphi(s) - t\varphi'(s)| \\ &= |t\varphi'(s+\lambda t) - t\varphi'(s)| \qquad (0 < \lambda < 1 \text{ geeignet}) \\ &= t|\varphi'(s+\lambda t) - \varphi'(s)| \leq t\varepsilon \end{aligned}$$

nach Wahl von δ.

Nun zum Fall $s + t > 0$. Zunächst ist für $0 \leq \vartheta \leq \delta$ (beachte $\varphi'(0) = \ell(\varphi)$)

$$|\ell(T_\vartheta\varphi) - \varphi'(-\delta + \vartheta)| \leq |\ell(T_\vartheta\varphi) - \ell(\varphi)| + |\varphi'(0) - \varphi'(-\delta + \vartheta)| \leq 2\varepsilon,$$

wieder nach Wahl von δ. Also ist

$$\Bigl| \int_0^{s+t} \ell(T_\vartheta\varphi)\, d\vartheta - \int_0^{s+t} \varphi'(-\delta + \vartheta)\, d\vartheta \Bigr| \leq 2\varepsilon(s+t) \leq 2t\varepsilon.$$

Wir können die linke Seite von (2) dann so abschätzen:

$$[\ldots] \;=\; \Bigl| \varphi(0) + \int_0^{s+t} \ell(T_\vartheta\varphi)\, d\vartheta - \varphi(s) - t\varphi'(s) \Bigr|$$

$$
\begin{aligned}
&\leq \left|\varphi(0) + \int_0^{s+t} \varphi'(-\delta+\vartheta)\,d\vartheta - \varphi(s) - t\varphi'(s)\right| + 2t\varepsilon \\
&= |\varphi(0) + \varphi(-\delta+s+t) - \varphi(-\delta) - \varphi(s) - t\varphi'(s)| + 2t\varepsilon \\
&= |(\varphi(0) - \varphi(s)) + (\varphi(-\delta+s+t) - \varphi(-\delta)) - t\varphi'(s)| + 2t\varepsilon \\
&= |-s\varphi'(s_1) + (s+t)\varphi'(s_2) - t\varphi'(s)| + 2t\varepsilon,
\end{aligned}
$$

mit geeigneten $s_1 \in (s,0)$ und $s_2 \in (-\delta, -\delta+s+t)$ nach dem Mittelwertsatz. Wegen $0 < s+t \leq t \leq \delta$ ist $-\delta \leq s \leq 0$ und $-\delta+s+t \leq 0$, also liegen s, s_1, s_2 im Intervall $[-\delta, 0]$, und nach Wahl von δ folgt

$$
\begin{aligned}
[\ldots] &\leq |s|\,|\varphi'(s_1) - \varphi'(s_2)| + t|\varphi'(s_2) - \varphi'(s)| + 2t\varepsilon \\
&\leq |s|\varepsilon + t\varepsilon + 2t\varepsilon \leq 4t\varepsilon.
\end{aligned}
$$

Das war zu zeigen.

Entdeckt von Cornelius Endres, November 2020.

Seite 186. In Zeile 2 lies „quasikonvexe Funktion“ statt „konvexe Funktion“.

Entdeckt von mir, April 2021.

Seite 130. Die Begründung in der 1. Zeile könnte etwas ausführlicher ausfallen. Also: $\ldots$, da $\bigl||1+x|-(1+x)\bigr| = 0$ für $x \geq -1$ und $= |-2-2x| = |\frac{2}{x}+2||x| \leq 2|x|$ für $x < -1$ (denn $\frac{2}{x} \in (-2,0)$ in diesem Fall). Wählt man nun etc.

Entdeckt von mir, Mai 2021.

Seite 45. „Die Umstände, wie Banach seinen Doktortitel erlangte, sind kurios.“ Die Darstellung im Text, die nun folgt, findet sich in diversen Vorlagen; allerdings zeigen neuere Quellenstudien, dass nichts davon der Wirklichkeit entspricht. Man lese dazu D. Cieselska und K. Cieselski, Banach's doctorate: a case of mistaken identity, Math. Intelligencer 43, no. 3 (2021) 1–7.

Entdeckt von Olav Nygaard und mir, August 2021.

Seite 269. Aufgabe V.6.29, lies: Die Norm eines *reellen* Hilbertraums ist an jeder Stelle $x_0 \neq 0$ Fréchet-differenzierbar. (Zur Erinnerung: Die Generalvoraussetzung in Abschnitt III.5 war, dass der Skalarenkörper $\mathbb{R}$ ist.)

Entdeckt von Gerd Wachsmuth, Januar 2021.

Seite 444. Vor Theorem VIII.3.15 lies: $\ldots$, denn B_X ist keine $\sigma(X', X)$-Nullumgebung, wenn X unendlichdimensional ist.

Entdeckt von Cornelius Endres, Oktober 2022.

Seite 101. Zeile 2: Die Seitenzahlen sind falsch; statt 1303–1305 lies 974–977.

Entdeckt von Stefan Geiß, Februar 2024.