Ausgewählte Aufgaben zum Grundbereich
des Staatsexamens in Mathematik

Wahrscheinlichkeitstheorie

zusammengestellt von

Sabine Giese, Josef Heringlehner, Birgit Mielke,

Hans Mielke und Ralph-Hardo Schulz

50 Aufgaben, davon 31 mit Lösungen.
Fassung vom 31. März 2003

Die Lösungen bzw. Lösungshinweise wurden sorgfältig erstellt, trotzdem können wir keine Gewähr übernehmen. Kommentare sind willkommen (z.B. per E-mail an schulz@math.fu-berlin.de).
An dieser Stelle möchten wir uns herzlich bei Christoph Kapsch für Beiträge zur Aufgabensammlung und bei Jennifer Eisfeldt, Sonja Ernst, Prof. Dr. Rudolf Gorenflo, Prof. Eberhard Letzner, Veronika Liebich, Julian Pfab, Gregor Schulz und Ariane Weigandt für Hinweise auf Fehler bzw. Druckfehler, auf missverständliche Formulierungen oder fehlerhafte Interpretationen von Aufgabenstellungen in früheren Fassungen dieser Aufgabensammlung bedanken.

Aufgaben

Aufgabe WTh1:

In einem Fabrikationsprozess werden Schrauben hergestellt, deren Länge normalverteilt sei mit Mittelwert $\mu = 5$cm und Standardabweichung $\sigma = 0,5$mm. Eine Schraube muss als Ausschussstück angesehen werden, wenn ihre Länge um mehr als 1mm vom Mittelwert (=Sollwert) μ abweicht. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine Schraube kein Ausschussstück ist?

Aufgabe WTh2:

Sei X eine stetig verteilte Zufallsvariable, deren Dichte f auf dem Intervall $[a,b]$ konstant sei (gleichförmige Verteilung):

$$f(t) = \begin{cases} k & \text{für } t \in [a,b] \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

(a) Bestimmen Sie k.

(b) Welchen Erwartungswert hat X?

(c) Bestimmen Sie die Verteilungsfunktion $F(t) := P(X \leq t)$ von X.

(d) Welche Varianz hat X im Falle $[a,b] = [0,1]$?

Aufgabe WTh3:

Sei die Zufallsvariable X geometrisch verteilt, d.h. $P(X = k) = (1-p)^{k-1} \cdot p$ für $k \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass die geometrische Verteilung die sogenannte „Markoffeigenschaft“ für diskrete Verteilungen besitzt, d.h. es gilt

$$P(X > k + m | X > k) = P(X > m) \text{ für alle } k,m \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

Aufgabe WTh4:

Die Personen X, Y und Z treffen eine fliegende Tontaube mit den Wahrscheinlichkeiten $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$ und $\frac{3}{4}$. Eine Tontaube fliegt vorbei, und sie schießen gleichzeitig. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Tontaube getroffen wird?

Aufgabe WTh5:

Vier Kisten stehen nebeneinander in einer Reihe. Zwei verschiedenfarbige Bälle werden in die Luft geworfen und jeder der Bälle landet – unabhängig von dem anderen – in einer der vier Kisten mit der Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{4}$. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die beiden Bälle in zwei nebeneinander liegende Kisten fallen?

Aufgabe WTh6:

Seien $X_1, X_2, \dots, X_n$ unabhängige Zufallsvariablen mit gleichem Erwartungswert $E(X_i) = \mu$ und gleicher Varianz σ^2. Sei ferner $\overline{X} := \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$. Zeigen Sie:

(a) Varianz$(\overline{X}) := E([\overline{X} - \mu]^2) = \frac{1}{n}\sigma^2$

(b) Für $T := \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \mu)^2 - \frac{n}{n-1}(\overline{X} - \mu)^2$ gilt $E(T) = \sigma^2$.

Aufgabe WTh7:

In der Großgemeinde Kleinbach herrscht an 25% aller Tage Sonnenschein, an 50% aller Tage ist der Himmel bewölkt und an 25% aller Tage regnet es unaufhörlich. Franz Knolau schaut jeden Morgen, bevor er das Haus verlässt, nach dem Wetter. Wenn es regnet, nimmt er seinen Schirm mit Wahrscheinlichkeit 0,9 mit (er ist offensichtlich vergesslich), bei bewölktem Himmel mit Wahrscheinlichkeit 0,5 (er ist unentschlossen) und bei Sonnenschein mit Wahrscheinlichkeit 0,2 (er ist Pessimist).

(a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass Herr Knolau den Schirm zu Hause lässt?

(b) Wenn Herr Knolau morgens mit dem Schirm das Haus verlässt, wie groß ist dann die Wahrscheinlichkeit, dass die Sonne scheint?

Aufgabe WTh8:

An einer Würfelbude wird mit 3 Würfeln unter folgenden Bedingungen gespielt: Ein Spieler erhält DM 100,- für drei Sechsen und DM 1,- für zwei Sechsen, sonst nichts. Wie groß ist der Mindesteinsatz, den der Würfelbudenbesitzer fordern muss, damit das Spiel (von den Unkosten abgesehen) für ihn rentabel ist?

Aufgabe WTh9:

In einer Urne befinden sich zwei Münzen A und B. Münze A ist symmetrisch, so dass Wappen mit der Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2}$ fällt. Münze B ist so asymmetrisch, dass die Wahrscheinlichkeit für Wappen $\frac{1}{3}$ beträgt.
Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass es sich bei willkürlich gezogener und geworfener Münze mit dem Ergebnis „Wappen" um Münze A handelt? Konstruieren Sie das zugehörige wahrscheinlichkeitstheoretische Modell und berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit.

Aufgabe WTh10:

Eine Zielscheibe ist mit 3 konzentrischen Kreisen vom Radius 1, 3 und 5cm versehen. Man erhält 10, 5 bzw. 3 Punkte, wenn man die innere Kreisscheibe, den mittleren bzw. den äußeren Kreisring trifft. Die Wahrscheinlichkeit die große Kreisscheibe zu treffen sei gleich $\frac{1}{2}$. Jeder Punkt der Scheibe sei dabei mit gleicher Chance zu treffen.
Berechnen Sie den Erwartungswert der bei einem Schuss erreichten Punktezahl.

Aufgabe WTh11:

Eine ideale Münze wird zweimal geworfen. Man betrachte folgende Zufallsvariablen:
X gibt an, wie oft „Wappen“ auftritt.
Y gibt an, wie oft „Zahl“ auftritt.
$V = |X - Y|$.
$W = \begin{cases} 0 & \text{falls beim ersten Wurf „Wappen“ auftritt} \\ 1 & \text{sonst} \end{cases}$
Sind X, V bzw. X, W bzw. V, W unabhängig?
Lösungshinweis: Stellen Sie zunächst eine Wertetabelle der Zufallsvariablen X, V und W in Abhängigkeit von den Elementarereignissen $(ww), (z,w), (w,z)$ und (z,z) auf.

Aufgabe WTh12:

Eine radioaktive Quelle sendet in einer Zeiteinheit eine unbekannte Anzahl von α-Teilchen aus, und zwar genau n Teilchen mit der Wahrscheinlichkeit $p_n = e^{-\lambda}\frac{\lambda^n}{n!}$ für $n \geq 0$ (Poissonverteilung).
Falls genau n Teilchen ausgesandt wurden, registriert ein Messgerät genau m davon mit Wahrscheinlichkeit $b_{n,m} = \binom{n}{m} p^m (1-p)^{n-m}$ für $m = 0, \ldots, n$ (Binomialverteilung).
Wie groß ist

(a) die Wahrscheinlichkeit, dass in der Zeiteinheit genau m α-Teilchen registriert werden?

(b) die bedingte Wahrscheinlichkeit, dass n α-Teilchen ausgesandt wurden unter der Bedingung, dass m registriert wurden?

Hinweis: Sie dürfen ohne Beweis voraussetzen, dass ein (σ-additiver) Wahrscheinlichkeitsraum auf $\Omega = \{(n\text{Teilchen gesandt}; m\text{Teilchen registriert})\}$ existiert, der den angegebenen Voraussetzungen genügt.
Wo benutzen Sie die σ-Additivität?

Aufgabe WTh13:

In $n+1$ Urnen $U_0, U_1, \ldots, U_n$ liegen jeweils n Kugeln, die sich nur in der Farbe unterscheiden. In der Urne U_k, $k \in \{0, \ldots, n\}$ liegen k rote und $n-k$ grüne Kugeln. Eine Urne wird zufällig ausgewählt und aus ihr eine Kugel gezogen.

(a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die gezogene Kugel rot ist?

(b) Wenn eine rote Kugel gezogen wird, mit welcher Wahrscheinlichkeit stammt sie aus der Urne U_k?

Aufgabe WTh14:

X sei eine Zufallsvariable, deren Dichte f gegeben ist durch:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x \ln 3} & \text{falls } x \in [1,3] \\ 0 & \text{falls } x \in \mathbb{R} \setminus [1,3] \end{cases}$$

Berechnen Sie den Erwartungswert und die Varianz der Zufallsvariablen X.

Aufgabe WTh15:

Gegeben sind drei Urnen:
Urne A enthalte genau 3 rote und 5 weiße Kugeln,
Urne B enthalte genau 2 rote und 1 weiße Kugel,
Urne C enthalte genau 2 rote und 3 weiße Kugeln.
Eine Urne wird zufällig ausgewählt, und aus ihr wird eine Kugel gezogen. Wenn diese rot ist, wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass sie aus Urne A kommt?

Aufgabe WTh16:

Eine Waschmittelfirma will für ihr neues Waschmittel „SOREIN“ werben. Zu diesem Zweck wird jedem Paket ein Buchstabe des Wortes „SOREIN“ beigefügt und zwar so, dass insgesamt jeder Buchstabe gleich häufig verteilt ist.
Jedem Kunden, der den Namen des Waschmittels aus den den Paketen beiliegenden Buchstaben zusammensetzen kann, wird ein Gratispaket versprochen.
Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit w dafür, dass ein Verbraucher nach dem Kauf von 7 Paketen das Wort „SOREIN“ bilden kann?
Hinweis: Geben Sie auch den zugehörigen Wahrscheinlichkeitsraum (mit kurzer Begründung) an. Als Ergebnis für w reicht hier ein Bruch; eine Dezimaldarstellung ist nicht nötig.
Lösung siehe Seite: 14.

Aufgabe WTh17:

Urne A enthält x rote Kugeln und y weiße Kugeln (und keine weiteren Kugeln), Urne B enthält z rote und v weiße Kugeln (und keine weiteren).

(a) Eine Kugel wird aus Urne A genommen und in Urne B gelegt. Anschließend wird eine Kugel aus Urne B gezogen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die zweite gezogene Kugel rot ist?

(b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass beim ersten Zug gemäß (a) eine weiße Kugel genommen wurde, wenn beim zweiten Zug eine rote gezogen wurde?

Aufgabe WTh18:

Durch Befragen von n „repräsentativen“ Wählern soll der Prozentsatz p der Wähler einer Partei A geschätzt werden. Die Wahrscheinlichkeit eines Irrtums um mehr als 1 Prozentpunkt soll nicht größer sein als 0,05. Die Gesamtzahl der Wähler sei „sehr groß“. Wie groß muss n sein? Was setzen Sie bei der Berechnung über die Stichproben voraus?
Hinweis: Den Satz von Moivre-Laplace dürfen Sie ohne Beweis verwenden. Eine Fehlerbetrachtung ist nicht verlangt. Erwartungswert und Standardabweichung der Binomialverteilung dürfen als bekannt vorausgesetzt werden, ebenso Eigenschaften der Verteilungsfunktion ϕ der Standardnormalverteilung. $\phi^{-1}(0,975) \approx 1,96$. Beachten Sie auch $p \cdot (1-p) \leq \frac{1}{4}$.

Aufgabe WTh19:

Eine Lady behauptet bei einer Tasse Tee mit Milch entscheiden zu können, ob zuerst Milch oder zuerst Tee in die Tasse gegeben wurde.
Um ihre Behauptung zu testen werden ihr 10 Tassen Tee mit Milch vorgesetzt, die sie nacheinander probiert. Sie soll mindestens 7 Tassen richtig klassifizieren.
Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit w dafür, dass die Lady den Test besteht, wenn sie jeweils nur zufällig tippt?
Hinweis: Geben Sie auch den Wahrscheinlichkeitsraum an (mit kurzer Begründung).

Aufgabe WTh20:

Wie groß ist näherungsweise die Wahrscheinlichkeit w, bei 600 Würfen mit einem idealen Würfel zwischen 90 und 100-mal eine Sechs zu erhalten?
Hinweis: Sie dürfen den Satz von Moivre-Laplace sowie Erwartungswert und Varianz der Binomialverteilung ohne Beweis verwenden. In dem Ergebnis für w darf ein(!) Ausdruck der Form $\phi(a)$ enthalten sein, wobei ϕ die Verteilungsfunktion der Standard-Normalverteilung bezeichnet und a durch eine Wurzel dargestellt ist.

Aufgabe WTh21:

(a) Geben Sie die Definition eines Wahrscheinlichkeitsraums an.

(b) Beweisen Sie:

$$P(A\cup B\cup C) = P(A)+P(B)+P(C)-P(A\cap B)-P(A\cap C)-P(B\cap C)+P(A\cap B\cap C).$$

Lösung siehe Seite: 14.

Aufgabe WTh22:

Ein Schütze hat die Treffsicherheit $\frac{1}{2}$. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass er bei zehn Schüssen mindestens drei Treffer erzielt?
Lösung siehe Seite: 15.

Aufgabe WTh23:

$M = \{P_j | 1 \le j \le 10\}$ ist eine Menge von 10 Personen. Jede Person wählt zufällig zwei der anderen als 'Freunde' aus. Eine Person, die von niemandem ausgewählt wird, nennen wir einsam.

(a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass P_7 einsam bleibt?

(b) Wie groß ist die mittlere Anzahl der Einsamen (d.h. der Erwartungswert der Anzahl der Einsamen)?

(c) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass niemand einsam bleibt?

Wünschenswert ist die Angabe numerischer Näherungswerte für die gefragten Wahrscheinlichkeiten. Diese Näherungswerte berechnet man am besten mit einem Taschenrechner.
Lösung siehe Seite: 16.

Aufgabe WTh24:

In einer Urne befinden sich 1000 Kugeln, dezimal dreistellig numeriert der Reihe nach mit 000, 001, 002, 003, $\ldots$, 997, 998, 999.

(a) Eine Kugel wird zufällig gezogen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit p_1 dafür, dass in ihrer Nummer die Ziffer 7 nicht vorkommt?

(b) Die gezogene Kugel wird in die Urne zurückgelegt, und die Urne wird gut durchgeschüttelt. Nun werden zwei Kugeln gleichzeitig zufällig gezogen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit p_2 dafür, dass in beiden Nummern die Ziffer 7 nicht vorkommt?

Lösung siehe Seite: 16.

Aufgabe WTh25:

Ein Würfel werde jeweils viermal hintereinander gewürfelt; die vier Augenzahlen seien in dieser Reihenfolge als Ergebnis der Stichprobe notiert.

(a) Man gebe einen geeigneten Stichprobenraum R an und bestimme $|R|$.

(b) Die Ereignisalgebra S sei die Menge aller Teilmengen von R. Man bestimme $|S|$.

(c) $A \in S$ sei das Ereignis 'Die Augenzahl ist bei jedem Wurf größer als beim Vorhergehenden'. Man gebe $P(A)$ an!

(d) $B \in S$ sei das Ereignis 'Die Augensumme ist größer als 20'. Man gebe $|B|$ an.

Lösung siehe Seite: 17.

Aufgabe WTh26:

Aus einer Urne mit w weißen und s schwarzen Kugeln werden nacheinander solange Kugeln herausgenommen, bis eine weiße Kugel erscheint. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit p_k dafür, dass die Anzahl der dabei gezogenen schwarzen Kugeln gleich k ist ($k \in \{0, 1, \ldots, s\}$)? Man prüfe die Beziehung $\sum\limits_{k=0}^{s} p_k = 1$ auf direktem Wege nach.

Lösung siehe Seite: 18.

Aufgabe WTh27:

In einer Kiste befinden sich 40 Bücher, davon 10 Mathebücher und 30 Schundromane. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit ein Mathebuch zu bekommen, wenn man zufällig drei Bücher herausgreift?

Lösung siehe Seite: 18.

Aufgabe WTh28:

Einer Gruppe von 1000 Personen wird die Frage gestellt, ob sie jemals in ihrem Leben Ladendiebstahl begangen haben. Da bei einer direkten Frage keine ehrliche Antwort zu erwarten ist, werden die Testpersonen gebeten, aus einer Menge von 10 Karten eine Karte zu ziehen. Vier der 10 Karten stellen die Frage 'Haben Sie schon einmal

Ladendiebstahl begangen?', die anderen sechs Karten stellen die Frage 'Haben Sie noch nie Ladendiebstahl begangen?'. Die Wahrscheinlichkeit für die Antwort 'Ja' ist 55%. Außerdem wird davon ausgegangen, dass alle Personen die Wahrheit sagen. Wie groß ist nun die Wahrscheinlichkeit dafür, dass eine willkürlich ausgewählte Person schon einmal Ladendiebstahl begangen hat?
Lösung siehe Seite: 19.

Aufgabe WTh29:

Die Wahrscheinlichkeit, dass in ihrem Lieblingssender an einem Sonntag Orgelmusik ertönt, beträgt 20%. An jedem anderen Wochentag beträgt sie 5%. Wenn Sie nicht wissen, welcher Wochentag ist: Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass Sonntag ist, wenn Sie anschalten und Orgelmusik ertönt?
Lösung siehe Seite: 19.

Aufgabe WTh30:

Eine unter einer Million Münzen hat fehlerhaft 'Zahl' auf beiden Seiten, die übrigen Münzen sind gut, d.h. sie haben nur auf einer Seite 'Zahl'. Eine zufällig ausgewählte Münze wird zwanzig mal geworfen und ergibt zwanzig mal 'Zahl'. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass sie trotzdem gut ist?
Es wird vorausgesetzt, dass jede Seite der Münze mit gleicher Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2}$ oben zu liegen kommt. Die Angabe eines numerischen Näherungswerts ist erwünscht.
Lösung siehe Seite: 20.

Aufgabe WTh31:

Neben einer Urne, in der sich tausend mit den natürlichen Zahlen $1,2,3,\ldots,999,1000$ numerierte Kugeln befinden, stehen Erich und Erika, Erika mit verbundenen Augen. Erich zieht aus der Urne eine Kugel und sagt Erika wahrheitsgemäß, dass die auf dieser Kugel stehende Zahl durch 4 teilbar ist. Wie groß ist nach dieser Mitteilung für Erika die Wahrscheinlichkeit dafür, dass diese Zahl auch durch 10 teilbar ist?
Lösung siehe Seite: 21.

Aufgabe WTh32:

In einem Großunternehmen soll vom Verwaltungsrat ein neuer Generaldirektor gewählt werden. Es stehen vier Direktoren D_1, D_2, D_3, D_4 in Konkurrenz, die Wahrscheinlichkeiten, dass sie gewählt werden, seien

$$\omega(D_1) = 0.3, \quad \omega(D_2) = 0.2, \quad \omega(D_3) = 0.4, \quad \omega(D_4) = 0.1$$

Die erste Aufgabe des neuen Generaldirektors könnte die Einführung der Mitarbeiteraktie sein (Ereignis M). Die Wahrscheinlichkeit der Einführung der Mitarbeiteraktie ist je nach Wahlergebnis verschieden:

$$\omega(M|D_1) = 0.35, \quad \omega(M|D_2) = 0.85, \quad \omega(M|D_3) = 0.45, \quad \omega(M|D_4) = 0.15$$

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass man im Unternehmen die Mitarbeiteraktie einführt?
Lösung siehe Seite: 21.

Aufgabe WTh33:

Mit einem ehrlichen Spielwürfel wird fünfmal geworfen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit (a) dafür, dass im ersten Wurf mehr geworfen wird als in den vier anderen Würfen zusammen, (b) dafür, dass in jedem Wurf mehr geworfen wird als im vorhergehenden?
Lösung siehe Seite: 21.

Aufgabe WTh34:

Von drei Karten ist eine beiderseits schwarz, die andere beiderseits weiß, die dritte hat eine schwarze und eine weiße Seite. Eine Karte wird zufällig gezogen und auf den Tisch gelegt. Ihre obere Seite ist schwarz. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die untere Seite weiß ist?
Lösung siehe Seite: 23.

Aufgabe WTh35:

Die Produktion eines bestimmten Werkstücks wird in einer Fabrik von drei Maschinen M_1, M_2 und M_3 übernommen. Die Maschine M_k stellt q_k% der Gesamtproduktion her, alle $q_k > 0$, $q_1 + q_2 + q_3 = 100$. Von der Produktion der Maschine M_k ist α_k% Ausschuss. Aus der Gesamtproduktion werde zufällig ein Werkstück ausgewählt, das sich als fehlerhaft herausstellt. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit p_k, dass es von der Maschine M_k stammt ($k \in \{1,2,3\}$)? Berechnen Sie für den Fall

$$q_1 = 10, \quad q_2 = 70, \quad q_3 = 20$$

$$\alpha_1 = 1, \quad \alpha_2 = 2, \quad \alpha_3 = 4$$

die numerischen Werte der Wahrscheinlichkeiten p_1, p_2, p_3.
Lösung siehe Seite: 23.

Aufgabe WTh36:

Sie werfen einen roten und einen blauen Spielwürfel (sechsseitiger Würfel) und bekommen die Summe der beiden Würfelwurfergebnisse in Pfennigen ausbezahlt. Wie groß sollte Ihr Einsatz sein, damit dies ein gerechtes Spiel ist (d.h. damit ihre Nettogewinnerwartung = 0 Pfennige ist)?
Lösung siehe Seite: 23.

Aufgabe WTh37:

Eine Zufallsgröße X sei im Intervall $[0,b] \subset \mathbb{R}$ gleichverteilt $(0 < b)$. Bestimmen Sie ihren Erwartungswert und ihre Standardabweichung.
Lösung siehe Seite: 24.

Aufgabe WTh38:

Auf $\Omega = \{1,2,\ldots 8\}$ mit der Gleichverteilung betrachte man

$$X(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{falls } \omega \text{ gerade} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad \text{und} \quad Y(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{falls } \omega \in \{4,8\} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Sind X und Y unabhängig?
Lösung siehe Seite: 25.

Aufgabe WTh39:

X sei eine stetige Zufallsvariable mit Dichtefunktion

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & \text{für } x \in [a,b] \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Bestimmen Sie ihren Erwartungswert und ihre Standardabweichung.
Lösung siehe Seite: 25.

Aufgabe WTh40:

Welche normalverteilten Zufallsvariablen haben die Eigenschaft, dass ihr Wert mit Wahrscheinlichkeit 0.95 betragsmäßig um weniger als 1 von ihrem Erwartungswert abweicht?
Lösung siehe Seite: 26.

Aufgabe WTh41:

Wie oft muss man 'im Durchschnitt' mit einem idealen Würfel würfeln, bis erstmals die Sechs erscheint?
Berechnen Sie hierzu die Wahrscheinlichkeit p_n dafür, dass die Sechs beim n-ten Wurf erstmals erscheint, und bestimmen Sie anschließend den Erwartungswert dieser zufälligen Anzahl n. Welche Standardabweichung hat n?
Falls Ihnen diese Berechnungen zu kompliziert sind, geben Sie bitte eine intuitive Antwort auf die am Anfang gestellte Frage und eine Begründung in Worten.
Lösung siehe Seite: 27.

Aufgabe WTh42:

Die diskrete Zufallsvariable X sei geometrisch verteilt mit dem Parameter $p \in (0,1]$, d.h. $Im\,X = \mathbb{N} \setminus \{0\}$ und $P(X = k) = p(1-p)^{k-1}$ für ein $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Zeigen Sie:

(a) p_X, definiert durch $p_X(k) = P(X = k)$, ist eine diskrete Dichte, d.h. es gilt

$$\sum_{k=1}^{\infty} p_X(k) = 1.$$

(b) Berechnen Sie den Erwartungswert von X.

Lösung siehe Seite: 28.

Aufgabe WTh43:

In einer kleinen Großstadt gibt es im Mittel pro Jahr zwei Brände. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass im nächsten Jahr mehr als vier Brände ausbrechen?
Lösung siehe Seite: 29.

Aufgabe WTh44:

n Kugeln werden zufällig in n Urnen verteilt. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass genau eine Urne leer bleibt? Zeigen Sie, dass diese Wahrscheinlichkeit im Falle $n = 4$ größer, im Falle $n = 5$ kleiner als $\frac{1}{2}$ ist.
Lösung siehe Seite: 30.

Aufgabe WTh45:

Aus der Menge der natürlichen Zahlen $\{1, 2, 3, \ldots, n\}$ werden nacheinander willkürlich ohne Zurücklegen zwei Zahlen gezogen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Differenz zwischen den beiden gezogenen Zahlen nicht kleiner als m ist $(n > m > 0)$?
Lösung siehe Seite: 30.

Aufgabe WTh46:

Die Wahrscheinlichkeit, dass ein Ereignis in einem Experiment eintritt, sei $\frac{1}{2}$. Ist die Wahrscheinlichkeit, dass dieses Ereignis in 900 unabhängigen Versuchen zwischen 405 und 495 Malen eintritt, größer als 0.88? Benutzen Sie für die Antwort

(a) die Tschebyscheff-Ungleichung.

(b) den Satz von Moivre-Laplace (Approximation der Binomialverteilung durch die Normalverteilung).

Lösung siehe Seite: 31.

Aufgabe WTh47:

Die Zufallsvariable X sei normalverteilt mit dem Erwartungswert μ und der Varianz σ^2.

1. Berechnen Sie $P(|X - \mu| \geq 2\sigma)$ und geben Sie zum Vergleich eine Abschätzung nach der Tschebyscheff-Ungleichung an.
2. Warum unterscheiden sich diese beiden Abschätzungen?

Lösung siehe Seite: 32.

Aufgabe WTh48:

Folgende Aufgabe ist als *3–Türen–Problem* (oder *Ziegenproblem* bekannt: In einer Talkshow steht hinter einer von 3 verschlossenen Türen [1] als Hauptgewinn ein Auto, während hinter den beiden anderen je eine Ziege zu finden ist. Der Kandidat wählt auf gut Glück eine der 3 Türen. Der über die Position des Autos informierte Talkmaster öffnet eine der beiden anderen Türen[2], hinter der eine Ziege steht. Jetzt darf der Kandidat sich noch umentscheiden. Soll er das tun?
(Eine analoge Aufgabe ist das *"Bürgermeisterproblem"*, siehe H. WINTER: *Zur intuitiven Aufklärung probabilistischer Paradoxien*. JMD 13/1(1992) p. 23–53).
Lösung siehe Seite: 33.

[1] mit gleicher Wahrscheinlichkeit für jede Tür

[2] Vorausgesetzt wird, dass der Talkmaster für den Fall, dass er überhaupt eine Wahl hat, sich für eine der beiden Türen mit Wahrscheinlichkeit 1/2 entscheidet.

Aufgabe WTh49:

Bei einem Spiel an einer Jahrmarktsbude wird eine nicht-gezinkte Münze so lange geworfen, bis zum ersten Mal „Zahl“ erscheint. Ist dies beim k-ten Wurf der Fall, wird der Betrag $W_k = 2^{k-1}$[DM] ausgezahlt. Das Spiel endet nach höchstens 6 Würfen. Ist 6-mal „Kopf“ eingetreten, wird nichts ausgezahlt. Der Einsatz pro Spiel beträgt DM 4.–. Vergleichen Sie diesen Einsatz mit dem Erwartungswert E des Gewinns!

(Man vgl. dazu J. Pfanzagl: Elementare Wahrscheinlichkeitsrechnung, Berlin etc. 1991^2, Bsp. 6.7.4!)

Lösung siehe Seite: 34.

Aufgabe WTh50:

Zu einer Versammlung eines kleinen Vereins treffen die Teilnehmer nacheinander ein. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass

(a) beim Eintreffen der dritten Person mindestens zwei der Anwesenden im betreffenden Jahr am gleichen Wochentag Geburtstag haben,

(b) beim Eintreffen der dritten Person mindestens zwei der Anwesenden im betreffenden Jahr am Sonntag Geburtstag haben?

Lösungshinweis:

ad (a) Die $n = 7$ Wochentage können als n Fächer angesehen werden, in die sequentiell rein zufällig Kugeln verteilt werden.

bd (b) Teilerfolg ist die Besetzung des Fachs „Sonntag“. Benötigt werden zwei oder mehr Teilerfolge. Die Wochentage pro Jahr dürfen Sie als gleichverteilt annehmen.

(Vgl. N. Henze: Stochastische Extremwertprobleme oder Wie banal ist die Sensation? Mitt. Math. Ges. Hamburg 17 (1998) 51-74.)

Lösung siehe Seite: 34.

Lösungen

Lösungskizze zu Aufgabe WTh16:

Wir können annehmen, dass die Buchstaben unabhängig (mit Wahrscheinlicheit $\frac{1}{6}$) in den Packungen verteilt sind; als Ereignisraum ist daher

$$\Omega = \prod_{i=1}^{7} \Omega_i \text{ mit } \Omega_i = \{S,O,R,E,I,N\} \quad (i = 1,\dots,7)$$

und als Wahrscheinlichkeitsraum der Produktraum

$$(\Omega, \prod p_i) \text{ der Laplace–Räume } (\Omega_i, p_i) \text{ mit } p_i(\omega_i) = \frac{1}{6} \text{ für } \omega_i \in \Omega_i$$

wählbar.
Man erhält

$$\begin{aligned} w &= p\big(\{(x_1,\dots,x_7) \in \Omega \mid \{x_1,\dots,x_7\} = \{S,O,R,E,I,N\}\}\big) \\ &= p\Bigg(\bigcup_X \{(x_1,\dots,x_7) \in \Omega \mid \{x_1,\dots,x_7\} = \{S,O,R,E,I,N\} \text{ und } X \text{ doppelt}\}\Bigg) \\ &= 6 \cdot \binom{7}{2} \cdot 5! \cdot (\frac{1}{6})^7 \end{aligned}$$

wobei	6	die Anzahl der Möglichkeiten für X
	$\binom{7}{2}$	die Anzahl der Auswahlen der Stellen mit gleichem Buchstaben
	$5!$	die Anzahl der Permutationen der Stellen der übrigen Buchstaben
	$(\frac{1}{6})^7$	die Wahrscheinlichkeit eines bestimmten n–Tupels $(x_1,\dots,x_7)$

ist.
Als Ergebnis erhält man $w = \frac{35}{648}$ ($\approx 0,054$). □

Lösungskizze zu Aufgabe WTh21:

Zu (a): Es sei Ω eine Menge, $\mathcal{A}$ ein σ-Algebra über Ω und $P : \mathcal{A} \to \mathbb{R}$ eine Abbildung. Das Tripel $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ heißt (Kolmogorov'scher) Wahrscheinlichkeitsraum, wenn gilt:

(i) $P(A) \geq 0$ für alle $A \in \mathcal{A}$.

(ii) $P(\Omega) = 1$.

(iii) $P(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=0}^{\infty} P(A_i)$ für alle Familien $(A_i)_{i\in\mathbb{N}}$ paarweise disjunkter Ereignisse $A_i \in \mathcal{A}$.

Dabei ist $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$ mit $\Omega \neq \emptyset$ eine σ-Algebra, falls gilt:

(i) $\Omega \in \mathcal{A}$.

(ii) $A \in \mathcal{A} \Longrightarrow \Omega \setminus A \in \mathcal{A}$.

(iii) $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{A} \Longrightarrow \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{A}$.

Zu (b): Es sei $D = A \cup B$. Dann gilt:

$$
\begin{aligned}
P(A \cup B \cup C) &= P(D \cup C) \\
&= P\big((D \setminus C) \dot{\cup} (C \setminus D) \dot{\cup} (C \cap D)\big) \\
&= P(D \setminus C) + P(C \setminus D) + P(C \cap D) \\
&\overset{(*)}{=} P(D) - P(D \cap C) + P(C) - P(D \cap C) + P(C \cap D) \\
&= P(C) + P(D) - P(C \cap D) \\
&= P(C) + P(A \cup B) - P(C \cap (A \cup B)) \\
&\overset{(**)}{=} P(C) + P(A) + P(B) - P(A \cap B) - P(C \cap (A \cup B)) \\
&= P(C) + P(A) + P(B) - P(A \cap B) - P\big((C \cap A) \cup (C \cap B)\big) \\
&= P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - \\
&P\big((A \cap C) \setminus (A \cap B \cap C) \dot{\cup} (B \cap C) \setminus (A \cap B \cap C) \dot{\cup} (A \cap B \cap C)\big) \\
&= P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P\big((A \cap C) \setminus (A \cap B \cap C)\big) - \\
&P\big((B \cap C) \setminus (A \cap B \cap C)\big) - P(A \cap B \cap C) \\
&= P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) + \\
&P(A \cap B \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C) - P(A \cap B \cap C) \\
&= P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + \\
&P(A \cap B \cap C).
\end{aligned}
$$

$(*)$ gilt wegen $P(D \setminus C) = P(D \setminus (C \cap D)) = P(D) - P(C \cap D)$. Man beachte, dass $D = D \setminus C \,\dot{\cup}\, C \cap D$.

$(**)$ gilt analog zur bisherigen Rechnung: $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

$\square$

Lösungskizze zu Aufgabe WTh22:

Das Experiment entspricht dem Urnenmodell, bei dem sich in der Urne gleichviele weiße und schwarze Kugeln befinden und $n = 10$ Kugeln mit Zurücklegen gezogen werden. Das Ziehen einer weißen Kugel entspricht einem Treffer des Schützen, das Ziehen einer schwarzen einem Fehlschuss. Notiert man die Ergebnisse der Ziehung in einem 10-Tupel $(\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_{10})$ mit $\omega_i \in \{\text{Weiß, Schwarz}\}$, dann sei A das Ereignis, dass das Tupel mindestens drei Einträge 'Weiß' enthält. Wir berechnen die Wahrscheinlichkeit $P(\overline{A})$ des Komplementärereignisses $\overline{A}$, dass der Schütze höchstens zweimal trifft. Die Wahrscheinlichkeit p_k, dass der Schütze genau k-mal trifft $(0 \leq k \leq 10)$, beträgt

$$p_k = \binom{n}{k} p^k \cdot q^{n-k},$$

wobei $p = \frac{1}{2}$ die Wahrscheinlichkeit für das Ziehen einer weißen Kugel und $q = \frac{1}{2}$ die Wahrscheinlichkeit für das Ziehen einer schwarzen Kugel ist. Es gilt

$$P(\overline{A}) = p_0 + p_1 + p_2,$$

und damit

$$P(\overline{A}) = \frac{\binom{10}{0}+\binom{10}{1}+\binom{10}{2}}{2^{10}} = \frac{1+10+45}{1024} = \frac{7}{128} \approx 5.46875\% \quad .$$

Damit beträgt die Wahrscheinlichkeit $P(A)$ des Ereignisses A

$$P(A) = 1 - P(\overline{A}) = \frac{121}{128} \approx 94.53125\%$$

□

Lösungskizze zu Aufgabe WTh23:

Die Lösung zu dieser Aufgabe ist leider falsch, da hier zu Unrecht stochastische Unabhängigkeit angenommen wird.

Zu (a): Jede Person $P \in M \setminus \{P_7\}$ wählt unabhängig von den anderen zuerst eine Person $Q \in M \setminus \{P\}$ und dann unabhängig von ihrer ersten Wahl eine Person $R \in M \setminus \{P,Q\}$ aus. Gesucht ist zunächst die Wahrscheinlichkeit $P(A)$ des Ereignisses A, dass für eine feste Person P unter den beiden Wahlen die Person P_7 nicht gewählt wird, d.h. es soll $Q \neq P_7$ und $R \neq P_7$ sein. Es gilt

$$P(A) = \frac{|M \setminus \{P,P_7\}|}{|M \setminus \{P\}|} \cdot \frac{|M \setminus \{P,P_7,Q\}|}{|M \setminus \{P,Q\}|} = \frac{8}{9} \cdot \frac{7}{8} = \frac{7}{9}$$

Da jede der 9 Personen $P \in M \setminus \{P_7\}$ unabhängig von den anderen wählt, beträgt die Wahrscheinlichkeit dafür, dass P_7 einsam bleibt

$$\left(\frac{7}{9}\right)^9 = 0,10415971314\ldots$$

Zu (b): Für jede der 10 Personen ist die Wahrscheinlichkeit des Einsambleibens gleich, nämlich $\left(\frac{7}{9}\right)^9$. Die erwartete Anzahl der Einsamen beträgt also

$$10\left(\frac{7}{9}\right)^9 = 1,0415971314\ldots$$

Zu (c): Die Wahrscheinlichkeit, dass eine bestimmte Person nicht einsam bleibt, beträgt $1-\left(\frac{7}{9}\right)^9$. Daher beträgt die Wahrscheinlichkeit, dass niemand einsam bleib

$$\left(1-\left(\frac{7}{9}\right)^9\right)^{10} = 0,332893942\ldots$$

□

Lösungskizze zu Aufgabe WTh24:

Zu (a): Es gibt 10^3 Nummern, wenn man alle 10 Ziffern $0,1,2,3,4,5,6,7,8,9$ zulässt, aber nur 9^3 Nummern, wenn man nur die Ziffern $0,1,2,3,4,5,6,8,9$ (ohne die 7) zulässt. Also ist

$$p_1 = \frac{9^3}{10^3} = 0.729$$

Zu (b): Es gibt $\binom{1000}{2}$ Möglichkeiten, zwei Kugeln zu ziehen, davon $\binom{9^3}{2}$ Möglichkeiten ohne die Ziffer 7. Also gilt

$$p_2 = \frac{\binom{729}{2}}{\binom{1000}{2}} = \frac{729 \cdot 728}{999 \cdot 1000} = 0,531243243243\ldots \qquad \square$$

Lösungskizze zu Aufgabe WTh25:

Zu (a): R sei der Raum aller 4-Tupel mit Einträgen aus der Menge $\{1,2,3,4,5,6\}$, d.h.

$$R = \{(x_1,x_2,x_3,x_4) | x_1,x_2,x_3,x_4 \in \{1,2,3,4,5,6\}\}.$$

Da jeder Eintrag eines solchen 4-Tupels genau sechs Werte annehmen kann, gibt es 6^4 verschiedene Elemente in R, woraus $|R| = 1296$ folgt.

Zu (b): Bezeichne $\mathcal{P}(M)$ die Menge aller Teilmengen einer endlichen Menge M, also die Potenzmenge von M. Bekanntlicher weise gilt $|\mathcal{P}(M)| = 2^{|M|}$.

Im vorliegenden Fall erhalten wir also $|S| = 2^{1296}$.

Zu (c): Die folgende Tabelle zeigt alle 4-Tupel $(x_1,x_2,x_3,x_4) \in R$, die A erfüllen.

x_1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	2	2	2	2	3
x_2	2	2	2	2	2	2	3	3	3	4	3	3	3	4	4
x_3	3	3	3	4	4	5	4	4	5	5	4	4	5	5	5
x_4	4	5	6	5	6	6	5	6	6	6	5	6	6	6	6

Daraus folgt $|A| = 15$ und $P(A) = \frac{15}{1296}$.

Zu (d): Gesucht ist die Anzahl der 4-Tupel, bei denen die Summe ihrer Komponenten mindestens 21 beträgt. Wir unterscheiden verschiedene Fälle nach der Anzahl der im 4-Tupel enthaltenen Sechsen.

Es gibt nur ein 4-Tupel, das vier Sechsen enthält.

Sind drei Sechsen im 4-Tupel enthalten, so muss die noch offene Komponente des Tupels mindestens mindestens 3 aber höchstens 5 sein. Die drei Sechsen können auf $\binom{4}{3} = 4$ Arten angeordnet sein, so dass es in diesem Fall $3 \cdot 4 = 12$ gültige Würfe gibt.

Sind zwei Sechsen im 4-Tupel enthalten, so müssen die beiden noch offenen Komponenten in der Summe mindestens 9 ergeben und dürfen selbst keine Sechs enthalten. Dies ist nur mit den Kombinationen 'Fünf-Fünf', 'Fünf-Vier' oder 'Vier-Fünf' möglich. Die beiden Sechsen können auf $\binom{4}{2} = 6$ Arten angeordnet werden, so dass es in diesem Fall $6 \cdot 3 = 18$ gültige Würfe gibt.

Ist nur eine Sechs im 4-Tupel enthalten, so muss die Summe der noch offenen Komponenten mindestens 15 ergeben, wobei keine weitere Sechs enthalten sein darf. Dies ist nur für die Kombination 'Fünf-Fünf-Fünf' erfüllt. Die Sechs kann an allen vier Komponenten des 4-Tupels stehen, so dass es in diesem Fall 4 gültige Würfe gibt.

Ist keine Sechs im 4-Tupel enthalten, ergibt die maximal mögliche Augensumme 20, so dass es in diesem Fall keinen gültigen Wurf gibt.

Daraus folgt $|B| = 1 + 12 + 18 + 4 = 35$. $\square$

Lösungsskizze zu Aufgabe WTh26:

Der Ereignisraum Ω enthalte die Ereignisse, dass vor der ersten weißen Kugel keine, eine, zwei, $\ldots, s$ schwarze Kugeln gezogen werden. Wir setzen $\Omega := \{0,1,2,\ldots,s\}$. Es handelt sich also um eine endliche Ereignismenge, weshalb man mit dem Modell des endlichen Wahrscheinlichkeitsraums arbeiten kann. Insbesondere lassen sich die Wahrscheinlichkeiten der einzelnen Elementarereignisse mittels kombinatorischer Überlegungen bestimmen.
Im endlichen Wahrscheinlichkeitsraum gilt für die paarweise disjunkten Elementarereignisse

$$P\left(\bigcup_{k=0}^{s}\{k\}\right) = \sum_{k=0}^{s} p_k.$$

Wegen $P(\Omega) = 1$ und $\bigcup\limits_{k=0}^{s}\{k\} = \Omega$ ist dann $\sum\limits_{k=0}^{s} p_k = 1$.
Berechnen wir nun die einzelnen p_k. Im endlichen Wahrscheinlichkeitsraum kann die Wahrscheinlichkeit der Elementarereignisse kombinatorisch bestimmt werden. Bei diesem Zufallsversuch handelt es sich um ein Ziehen ohne Zurücklegen, wobei es nur zwei Ausgänge gibt: Weiß oder Schwarz. Wird eine schwarze Kugel gezogen, folgt eine weitere Stufe des Versuchs mit einer schwarzen Kugel weniger im Topf. Jede Ziehung ist stochastisch abhängig von den vorhergehenden Ziehungen.
Die Wahrscheinlichkeit unter $w+s$ Kugeln beim ersten Ziehen eine der w weißen Kugeln zu bekommen, beträgt $p_0 = \frac{w}{w+s}$. Entsprechend ist die Wahrscheinlichkeit unter $w+s$ Kugeln beim ersten Ziehen eine der s schwarzen Kugeln zu bekommen, gerade $\frac{s}{w+s}$. Nun gibt es zwei Möglichkeiten: Man erhält im zweiten Durchgang eine der w weißen Kugeln (damit wäre $p_1 = \frac{s}{w+s}\cdot\frac{w}{w+s-1}$) oder eine der nunmehr $s-1$ schwarzen Kugeln. Das Verfahren kann fortgesetzt werden, bis maximal s schwarze Kugeln gezogen wurden. Man erhält also für $k \leq s$:

$$p_k = \frac{s}{w+s}\cdot\frac{s-1}{w+s-1}\cdot\frac{s-2}{w+s-2}\cdot\ldots\cdot\frac{s-k+1}{w+s-k+1}\cdot\frac{w}{w+s-k} = \frac{\binom{s}{k}}{\binom{w+s}{k}}\cdot\frac{w}{w+s-k}. \qquad \square$$

Lösungsskizze zu Aufgabe WTh27:

Als Modell bietet sich ein endlicher Wahrscheinlichkeitsraum an. Wir wählen den Ereignisraum als $\Omega := \{M,\overline{M}\}$, wobei M das Ereignis bezeichne, mit einmaligem Ziehen ein Mathebuch zu greifen, $\overline{M}$ entsprechend das Ereignis mit einmaligem Ziehen einen Roman zu bekommen. Die Wahl dieses Ergebnisraums beruht bereits auf einer Abstraktion, da uns interessiert, ob ein Mathebuch gezogen wird oder nicht (Bernoulli-Experiment). Aus den Axiomen des Wahrscheinlichkeitsraums ergibt sich $P(M) = \frac{1}{4}$ und $P(\overline{M}) = \frac{3}{4}$.
Das Ziehen dreier Bücher läßt sich als dreimalige Wiederholung des Experiments ohne Zurücklegen auffassen, was sich auf die Erfolgswahrscheinlichkeit im zweiten und dritten Versuch auswirkt. Man betrachtet zwar insgesamt nun den Produktraum $\Omega\times\Omega\times\Omega$ und erhält wegen der stochastischen Abhängigkeit der einzelnen Ziehungen die Wahrscheinlichkeit für eines der möglichen 3-Tupel durch Multiplikation der einzelnen Wahrscheinlichkeiten. Dennoch ist die Zufallsvariable X, die beschreibt, wieviele Mathebücher man beim dreimaligen Ziehen erhält, wegen des Nichtzurücklegens nicht binomialverteilt.

Wir müssen also die einzelnen relevanten Ereignisse gesondert berechnen und dann deren Wahrscheinlichkeiten addieren. Einfacher ist es jedoch, das Gegenereignis zu betrachten. Die gesuchte Wahrscheinlichkeit beträgt

$$1 - P(\overline{M},\overline{M},\overline{M}) = 1 - \frac{30}{40} \cdot \frac{29}{39} \cdot \frac{28}{38} \approx 0.589 \,.$$

□

Lösungskizze zu Aufgabe WTh28:

Man kann die Befragung als zweistufiges Experiment auffassen. Auf der ersten Stufe zieht die befragte Person eine der zehn Karten. Die beiden möglichen Ausgänge sind $D =$Ziehen einer Karte mit 'Haben Sie schon einmal Ladendiebstahl begangen?' und $K =$Ziehen einer Karte mit 'Haben Sie noch nie einen Diebstahl begangen?' mit $P(D) = \frac{4}{10}$ und $P(K) = \frac{6}{10}$.
Auf der zweiten Stufe antwortet die Testperson, wobei die beiden möglichen Ergebnisse $J =$'Ja' und $N =$'Nein' seien. Nach Voraussetzung gilt für die Wahrscheinlichkeit der Antwort $J =$'Ja' insgesamt $P(J) = \frac{55}{100}$.
Bezeichnet p die Wahrscheinlichkeit, dass eine Person schon einmal einen Ladendiebstahl begangen hat, so erhält man folgendes Modell (unter Verwendung bedingter Wahrscheinlichkeiten oder durch Anwendung der 'Pfadregeln' im entsprechenden Baumdiagramm):
Elementarereignisse :

$$(D,J),(D,N),(K,J),(K,N)$$

mit den Wahrscheinlichkeiten $\frac{4}{10}p, \frac{4}{10}(1-p), \frac{6}{10}(1-p)$ bzw. $\frac{6}{10}p$.
Damit ergibt sich:

$$\frac{55}{100} = P(J) = P(D,J) + P(K,J) = \frac{4}{10}p + \frac{6}{10}(1-p) = \frac{40p+60-60p}{100} = \frac{60-20p}{100},$$

woraus $p = \frac{25}{100}$ folgt.
Geht man bei der Gruppe der 1000 Personen von einem repräsentativen Querschnitt aus, so ergibt sich also für die gesuchte Wahrscheinlichkeit $0,25$. □

Lösungskizze zu Aufgabe WTh29:

Das Experiment gliedert sich in zwei Stufen. Bei der ersten Stufe wird zufällig ein Wochentag bestimmt. Es bietet sich an, hierfür das Modell eines endlichen Wahrscheinlichkeitsraums zu wählen, bei dem jeder Wochentag mit gleicher Wahrscheinlichkeit ausgewählt wird (Laplace'scher Raum). Da es jedoch nur interessant ist, ob gerade Sonntag ist oder nicht, sei also

$$\Omega_1 := \{\text{Sonntag, Nicht-Sonntag}\}.$$

Hierbei gilt $P(\text{Sonntag}) = \frac{1}{7}$ und $P(\text{Nicht-Sonntag}) = \frac{6}{7}$.
Die zweite Stufe des Experiments entspricht bei Einschalten des Radios dem Ereignis, dass Orgelmusik ertönt oder nicht. Auch diese Stufe kann als Bernoulli-Experiment aufgefasst werden, dessen Erfolgswahrscheinlichkeit je nach Wochentag 20% (Sonntags) bzw. 5% (wochentags) beträgt. Ein Erfolg bedeutet das Ertönen von Orgelmusik. Sei also

$$\Omega_2 := \{\text{Orgelmusik, Nicht-Orgelmusik}\}.$$

Die Wahrscheinlichkeiten der Ereignisse von Ω_2 hängen vom Ausgang der ersten Stufe ab. Damit gilt

$$P(\text{Orgelmusik}|\text{Sonntag}) = \frac{1}{5},$$
$$P(\text{Orgelmusik}|\text{Nicht-Sonntag}) = \frac{1}{20}.$$

Der gesamte Versuch lässt sich in einem Baumdiagramm darstellen.
Dabei sieht man, dass die Wahrscheinlichkeit dafür, dass überhaupt Orgelmusik ertönt, $\frac{1}{35} + \frac{3}{70} = \frac{1}{14}$ beträgt.
Nach der Regel von der bedingten Wahrscheinlichkeit gilt dann:

$$P(\text{Sonntag} \mid \text{Orgelmusik}) = \frac{P(\text{Sonntag} \cap \text{Orgelmusik})}{P(\text{Orgelmusik})} = \frac{\frac{1}{35}}{\frac{1}{14}} = \frac{2}{5}. \qquad \square$$

Lösungskizze zu Aufgabe WTh30:

Für einen Münzwurf ist das Ergebnis entweder 'Kopf' K oder 'Zahl' Z. Die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses F 'Wahl der fehlerhaften Münze' ist $P(F) = 10^{-6}$, die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses G 'Wahl einer guten Münze' ist $P(G) = 1 - 10^{-6}$. Z_{20} sei das Ereignis, dass zwanzigmal nacheinander die 'Zahl' geworfen wird. Die gesuchte Wahrscheinlichkeit ist nun $P(G|Z_{20})$.
Nach dem Satz von der vollständigen Wahrscheinlichkeit gilt

$$P(Z_{20}) = P(Z_{20}|G)P(G) + P(Z_{20}|F)P(F).$$

Weiterhin gilt $P(Z_{20}|G) = \left(\frac{1}{2}\right)^{20}$, da es sich um ein zwanzigmal durchgeführtes Laplace-Experiment mit zwei möglichen Ereignissen handelt, sowie $P(Z_{20}|F) = 1$, da bei einer Münze mit beidseitigem Aufdruck 'Zahl' garantiert bei jedem Versuch die Zahl erscheint. Schließlich folgt aus dem Multiplikationssatz und der Kommutativität des Durchschnitts zweier Ereignisse

$$\begin{aligned} P(G|Z_{20})P(Z_{20}) &= P(G \cap Z_{20}) \\ &= P(Z_{20} \cap G) \\ &= P(Z_{20}|G)P(G) \end{aligned}$$

Man findet nun

$$\begin{aligned} P(G|Z_{20}) &= \frac{P(G \cap Z_{20})}{P(Z_{20})} \\ &= \frac{P(Z_{20}|G)P(G)}{P(Z_{20}|G)P(G) + P(Z_{20}|F)P(F)} \\ &= \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{20} \cdot (1 - 10^{-6})}{\left(\frac{1}{2}\right)^{20} \cdot (1 - 10^{-6}) + 1 \cdot 10^{-6}} \\ &= \frac{(1 - 10^{-6})}{(1 - 10^{-6}) + \frac{10^{-6}}{\left(\frac{1}{2}\right)^{20}}} \\ &= \frac{0.999999}{0.999999 + 1.048576} \\ &= 0.48814370965\ldots \end{aligned}$$

$\square$

Lösungskizze zu Aufgabe WTh31:

Sei A das Ereignis, dass die gezogene Zahl durch 4 teilbar ist, B das Ereignis, dass die gezogene Zahl durch 10 teilbar ist. Die Anzahl der durch 4 teilbaren Zahlen in der Urne beträgt 250, die Anzahl der durch 10 teilbaren Zahlen dagegen nur 100. Somit folgt $P(A) = \frac{1}{4}$ und $P(B) = \frac{1}{10}$. Gesucht ist die Wahrscheinlichkeit $P(B|A)$ für das Ereignis B unter der Voraussetzung, dass A schon eingetreten ist. Es gilt

$$P(B|A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)}$$

$P(B \cap A)$ beträgt $\frac{1}{20}$, da nur jede zweite durch 10 teilbare Zahl auch durch 4 teilbar ist. Damit folgt

$$P(B|A) = \frac{\frac{1}{20}}{\frac{1}{4}} = \frac{4}{20} = 20\% \quad \square$$

$\square$

Lösungskizze zu Aufgabe WTh32:

$D_1 + D_2 + D_3 + D_4 = \Omega$ ist eine vollständige Ereignisdisjunktion mit $P(D_i) > 0$ für alle $i \in \{1,2,3,4\}$ und $\sum_{i=1}^{4} P(D_i) = 1$. Nach dem Satz über die vollständige Wahrscheinlichkeit gilt

$$\begin{aligned} P(M) &= P(M|D_1)P(D_1) + P(M|D_2)P(D_2) + P(M|D_3)P(D_3) + P(M|D_4)P(D_4) \\ &= 0.35 \cdot 0.3 + 0.85 \cdot 0.2 + 0.45 \cdot 0.4 + 0.15 \cdot 0.1 \\ &= 0.105 + 0.17 + 0.18 + 0.015 \\ &= 0.47 = 47\% \end{aligned}$$

$\square$

Lösungskizze zu Aufgabe WTh33:

Zu (a): Sei N das Ereignis, dass der erste Wurf größer ist als die Augensumme der letzten vier Würfe. N kann nur eintreten, wenn in den letzten vier Würfen eine Augensumme von 4 oder 5 geworfen wurde, da die Augensumme der letzten vier Würfe nicht weniger als 4 betragen kann. Die Augensumme 4 entspricht der Ereigniskette B_4, dass in den letzen vier Würfen jeweils eine 1 gefallen ist. Die Augensumme 5 entspricht der Ereigniskette B_5, dass in den letzten vier Würfen genau eine 2 und drei mal die 1 gefallen sind. Dies kann auf vier Arten geschehen, je nachdem in welchem Wurf die 2 fällt. Wir bezeichnen mit $A_{5/6}$ das Ereignis, dass der erste Wurf eine 5 oder 6 liefert, mit A_6 das Ereignis, dass der erste Wurf eine 6 liefert.

Wir berechnen nun $P(A_{5/6} \cap B_4)$ und $P(A_6 \cap B_5)$. Es gilt dann

$$P(M) = P(A_{5/6} \cap B_4) + P(A_6 \cap B_5).$$

Nach dem Multiplikationssatz für bedingte Wahrscheinlichkeiten gilt

$$P(A \cap B) = P(A|B) \cdot P(B) \quad .$$

Damit erhalten wir (wegen der Unabhängigkeit des ersten Wurfes von den weiteren Würfen)

$$P(A_{5/6} \cap B_4) = P(A_{5/6}|B_4)P(B_4) = \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^4 = \frac{1}{3888}$$

sowie

$$P(A_6 \cap B_5) = P(A_6|B_5)P(B_5) = \frac{1}{6} \cdot 4 \left(\frac{1}{6}\right)^4 = \frac{2}{3888} \quad .$$

Es folgt

$$P(N) = P(A_{5/6} \cap B_4) + P(A_6 \cap B_5) = \frac{3}{3888} \approx 0.077\% \quad .$$

Zu (b): Sei M das Ereignis, dass jeder der letzten vier Würfe größer als der jeweils vorhergehende ist. M kann nur eintreten, wenn der erste Wurf eine 1 oder 2 liefert. Wir bezeichnen mit einem Quadrupel (b_1, b_2, b_3, b_4) die Ergebnisse der letzten vier Würfe, wobei $b_i \in \{1, 2, \ldots, 6\}$ und $i \in \{1, 2, 3, 4\}$. Wenn der erste Wurf eine 1 ergibt, so besteht die gültige Ergebnismenge für die letzen vier Würfe aus

$$B_1 = \{(2,3,4,5), (2,3,4,6), (2,3,5,6), (2,4,5,6), (3,4,5,6)\}.$$

Wenn der erste Wurf eine 2 ergibt, so besteht die gültige Ergebnismenge für die letzen vier Würfe aus $B_2 = \{(3,4,5,6)\}$. Jedes Elementarereignis $\omega \in B_1 \cup B_2$ ereignet sich mit Wahrscheinlichkeit $P(\omega) = \left(\frac{1}{6}\right)^4$. Wir bezeichnen mit A_1 das Ereignis, dass im ersten Wurf eine 1 fällt, mit A_2 das Ereignis, dass im ersten Wurf eine 2 gewürfelt wird.

Wir berechnen nun $P(B_1 \cap A_1)$ und $P(B_2 \cap A_2)$. Es gilt dann

$$P(M) = P(B_1 \cap A_1) + P(B_2 \cap A_2).$$

Nach dem Multiplikationssatz für bedingte Wahrscheinlichkeiten gilt

$$P(A \cap B) = P(A|B) \cdot P(B) \quad .$$

Damit erhalten wir (wieder wegen der Unabhängigkeit des ersten Wurfes von den weiteren Würfen)

$$P(B_1 \cap A_1) = P(B_1|A_1)P(A_1) = 5 \left(\frac{1}{6}\right)^4 \cdot \frac{1}{6} = \frac{5}{7776}$$

sowie

$$P(B_2 \cap A_2) = P(B_2|A_2)P(A_2) = \left(\frac{1}{6}\right)^4 \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{7776} \quad .$$

Es folgt

$$P(M) = P(B_1 \cap A_1) + P(B_2 \cap A_2) = \frac{6}{7776} \approx 0.077\% \quad .$$

□

Lösungsskizze zu Aufgabe WTh34:

Sei W das Ereignis, dass die Unterseite einer gewählten und auf den Tisch gelegten Karte weiß ist, S das Ereignis, dass die Oberseite einer gewählten und auf den Tisch gelegten Karte schwarz ist. Wir numerieren die drei Karten folgendermassen durch: Die vollständig schwarze Karte erhalte die Nummer 1, die vollständig weiße Karte die Nummer 2 und die schwarz-weiße Karte die Nummer 3. Wir bezeichnen mit B_i das Ereignis, dass Karte i zufällig ausgewählt wird ($i \in \{1,2,3\}$). Es gilt $\Omega = B_1 \dot{\cup} B_2 \dot{\cup} B_3$, d.h. B_1, B_2, B_3 ist eine vollständige Ereignisdisjunktion. Gesucht ist nun die Wahrscheinlichkeit $P(B_3|S)$. Nach dem Satz von Bayes gilt

$$P(B_k|S) = \frac{P(B_k) \cdot P(S|B_k)}{\sum_{i=1}^{3} P(B_i) \cdot P(S|B_i)} \quad ,(k \in \{1,2,3\}).$$

Mit $P(B_i) = \frac{1}{3}$ für alle $i \in \{1,2,3\}$, $P(S|B_1) = 1$, $P(S|B_2) = 0$ und $P(S|B_3) = \frac{1}{2}$, erhalten wir daher

$$P(B_3|S) = \frac{P(B_3) \cdot P(S|B_3)}{\sum_{i=1}^{3} P(B_i) \cdot P(S|B_i)} = \frac{\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}}{\frac{1}{3} \cdot 1 + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}} = \frac{1}{3} \qquad \square$$

Lösungsskizze zu Aufgabe WTh35:

Sei A_k das Ereignis, dass ein zufällig aus der Gesamtproduktion ausgewähltes Werkstück von der Maschine M_k hergestellt wurde. F sei das Ereignis, das Werkstück ist fehlerhaft. Dann gilt

$$P(A_1) = q_1, \quad P(A_2) = q_2, \quad P(A_3) = q_3$$

$$P(F|A_1) = \alpha_1, \quad P(F|A_2) = \alpha_2, \quad P(F|A_3) = \alpha_3$$

Nach dem Satz von Bayes gilt

$$\begin{aligned} p_k = P(A_k|F) &= \frac{P(F|A_k)P(A_k)}{P(F|A_1)P(A_1) + P(F|A_2)P(A_2) + P(F|A_3)P(A_3)} \\ &= \frac{\alpha_k q_k}{\alpha_1 q_1 + \alpha_2 q_2 + \alpha_3 q_3} \end{aligned}$$

Für die angegebenen Werte folgt

$$\begin{aligned} p_1 &= \frac{0.01 \cdot 0.1}{0.01 \cdot 0.1 + 0.02 \cdot 0.7 + 0.04 \cdot 0.2} = \frac{0.001}{0.023} = 4.34783\% \\ p_2 &= \frac{0.02 \cdot 0.7}{0.01 \cdot 0.1 + 0.02 \cdot 0.7 + 0.04 \cdot 0.2} = \frac{0.014}{0.023} = 60.86957\% \\ p_3 &= \frac{0.04 \cdot 0.2}{0.01 \cdot 0.1 + 0.02 \cdot 0.7 + 0.04 \cdot 0.2} = \frac{0.008}{0.023} = 34.78261\% \end{aligned} \qquad \square$$

Lösungsskizze zu Aufgabe WTh36:

Seien X und Y zwei diskrete Zufallsvariablen mit den Verteilungen $(x_i, P(X = i))$ und $(y_i, P(Y = i))$ mit $x_i, y_i \in \{1,2,3,4,5,6\}$, wobei X dem Würfelergebnis des roten Würfels und Y dem Würfelergebnis des blauen Spielwürfels den jeweiligen Gewinn in Pfennig zuweist.

Wir erhalten also für $i \in \{1,2,3,4,5,6\}$ die Werte von X bzw. Y in Pfennig durch folgende Zuordnungen:

$$x_i \xrightarrow{X} i,$$

$$y_i \xrightarrow{Y} i.$$

Gesucht ist nun der Erwartungswert der diskreten Zufallsvariable $X+Y$. Es gilt der Satz:
Sind X und Y zwei diskrete Zufallsvariablen mit den Erwartungswerten $E(X)$ und $E(Y)$, so gilt $E(X+Y) = E(X)+E(Y)$.
Jedes Ergebnis eines Wurfs mit einem einzelnen Würfel besitzt dieselbe Auftrittswahrscheinlichkeit $\frac{1}{6}$. Nach Definition des Erwartungswerts $E(Z)$ einer diskreten Zufallsvariablen Z mit Verteilung $(z_i, P(Z=z_i))$ gilt

$$E(Z) = \sum_i z_i P(Z=z_i).$$

Daraus folgt

$$E(X) = E(Y) = \frac{1}{6}(1+2+3+4+5+6) = \frac{21}{6} = 3.5 \quad ,$$

und damit

$$E(X+Y) = E(X)+E(Y) = 7.$$

Der Einsatz pro Wurf müsste also 7 Pfennig betragen, um die Nettogewinnerwartung auf lange Sicht bei 0 Pfennig zu halten. □

Lösungsskizze zu Aufgabe WTh37:

Die Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion ist

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b} & \text{für } 0 \le x \le b \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Also ist

$$E(X) = \int_0^b x \cdot \frac{1}{b} dx = \frac{b}{2}$$

sowie

$$\begin{aligned} Var(X) &= E(X^2) - (E(X))^2 \\ &= \int_0^b x^2 \cdot \frac{1}{b} dx - \left(\frac{b}{2}\right)^2 \\ &= \frac{b^2}{12} \end{aligned}$$

X hat also den Erwartungswert $\frac{b}{2}$ und die Standardabweichung $\frac{b}{\sqrt{12}}$. □

Lösungskizze zu Aufgabe WTh38:

Zwei diskrete Zufallsvariablen X,Y heißen stochastisch unabhängig, falls für alle Wertepaare (x_i,y_j) die Gleichung

$$P(X=x_i,Y=y_j)=P(X=x_i)\cdot P(Y=y_j)$$

gilt.
Die gegebenen Zufallsvariablen X und Y können jeweils zwei Werte annehmen, so dass wir folgende vier Ereignisse betrachten müssen:

$$A_0=\{1,3,5,7\},\quad A_1=\{2,4,6,8\},\quad B_0=\{1,2,3,5,6,7\},\quad B_1=\{4,8\}.$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned}
A_0B_0 &= \{1,3,5,7\}\cap\{1,2,3,5,6,7\}\\
&= \{1,3,5,7\},\\
A_0B_1 &= \{1,3,5,7\}\cap\{4,8\}\\
&= \emptyset,\\
A_1B_0 &= \{2,4,6,8\}\cap\{1,2,3,5,6,7\}\\
&= \{2,6\},\\
A_1B_1 &= \{2,4,6,8\}\cap\{4,8\}\\
&= \{4,8\}.
\end{aligned}$$

Da wegen der Gleichverteilung $P(\omega)=\frac{1}{8}$ für alle $\omega\in\Omega$ gilt, folgt

$$P(A_0B_0)=\frac{1}{2}\neq\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}=P(A_0)\cdot P(B_0).$$

Daher sind X und Y nicht unabhängig voneinander. □

Lösungskizze zu Aufgabe WTh39:

Der Erwartungswert $E(X)$ für eine stetig verteilte Zufallsvariable X mit einer Dichtefunktion $f(x)$ ist definiert als

$$E(x)=\int_{\infty}^{\infty} x\cdot f(x)dx.$$

Es folgt

$$\begin{aligned}
E(X) &= \int_{\infty}^{\infty} x\cdot f(x)dx\\
&= \int_a^b x\cdot\frac{1}{b-a}dx\\
&= \frac{1}{b-a}\left[\frac{x^2}{2}\right]_a^b\\
&= \frac{1}{b-a}\left(\frac{b^2}{2}-\frac{a^2}{2}\right)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{(b-a)(b+a)}{2(b-a)} \\
&= \frac{a+b}{2}.
\end{aligned}
$$

(Nutzt man die Symmetrie der Dichtefunktion f zur Achse $x = \frac{a+b}{2}$, so sieht man sofort, dass $E(X) = \frac{a+b}{2}$ sein muss.)
Man beachte, dass $a \neq b$ zwingend ist, da sonst $f(x) = 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$ wäre. In diesem Fall wäre f keine Dichtefunktion mehr, da eine Dichtefunktion f jedenfalls $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$ erfüllen muss.
Die Varianz von X ist definiert als $Var(X) = E(X^2) - (E(X))^2$. Es gilt

$$
\begin{aligned}
E(X^2) &= \int_{\infty}^{\infty} x^2 \cdot f(x)dx \\
&= \int_a^b \frac{x^2}{b-a}dx \\
&= \frac{b^3-a^3}{3(b-a)}.
\end{aligned}
$$

Damit folgt

$$
\begin{aligned}
Var(X) &= E(X^2) - (E(X))^2 \\
&= \frac{b^3-a^3}{3(b-a)} - \frac{(b+a)^2}{4} \\
&= \frac{(b-a)^2}{12}.
\end{aligned}
$$

Dies ergibt eine Standardabweichung $\sigma = \sqrt{Var(X)} = \frac{b-a}{\sqrt{12}}$. □

Lösungskizze zu Aufgabe WTh40:

Eine normalverteilte Zufallsvariable X besitzt eine Dichte der Gestalt

$$
f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \quad .
$$

Eine derartige Zufallsvariable wird auch als $N(\mu;\sigma^2)$-verteilt bezeichnet. Dabei ist μ gerade der Erwartungswert und σ^2 die Varianz von X.
Wenn X eine $N(\mu;\sigma^2)$-verteilte Zufallsvariable ist, so ist ihre Standardisierte $X^* = \frac{X-\mu}{\sigma}$ eine $N(0;1)$-verteilte Zufallsvariable. Für die Verteilungsfunktion einer $N(\mu;\sigma^2)$-verteilten Zufallsvariable X gilt daher

$$
F(x) = P(X \leq x) = P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} \leq \frac{x-\mu}{\sigma}\right) = P\left(X^* \leq \frac{x-\mu}{\sigma}\right) = \Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right),
$$

wobei Φ die Verteilungsfunktion einer $N(0;1)$-verteilten Zufallsvariablen ist.

Es folgt für $k > 0$

$$\begin{aligned}
P(|X-\mu| \leq k\sigma) &= P(\mu - k\sigma \leq X \leq \mu + k\sigma) \\
&= F(\mu + k\sigma) - F(\mu - k\sigma) \\
&= \Phi\left(\frac{\mu + k\sigma - \mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\mu - k\sigma - \mu}{\sigma}\right) \\
&= \Phi(k) - \Phi(-k) \\
&= 2\Phi(k) - 1.
\end{aligned}$$

Gesucht ist nun nach der Varianz σ^2, für die die Normalverteilung $N(\mu;\sigma^2)$ die Eigenschaft $P(|X-\mu| \leq 1) = 0.95$ erfüllt. Mit der gerade durchgeführten Betrachtung bekommen wir

$$P(|X-\mu| \leq k\sigma = 1) = P\left(|X-\mu| \leq \frac{1}{\sigma}\sigma\right) = 2\Phi\left(\frac{1}{\sigma}\right) - 1 = 0.95 \quad .$$

Nachschauen in einer Wertetafel ergibt

$$\begin{aligned}
2\Phi\left(\frac{1}{\sigma}\right) - 1 = 0.95 \quad &\Longleftrightarrow \Phi\left(\frac{1}{\sigma}\right) = 0.975 \\
&\Longleftrightarrow \quad \frac{1}{\sigma} = 1.96 \\
&\Longleftrightarrow \quad \sigma = \frac{25}{49}.
\end{aligned}$$

Damit beträgt die Varianz $\sigma^2 = \left(\frac{5}{7}\right)^4$. Das Ergebnis lautet also:
Alle $N(\mu;\left(\frac{5}{7}\right)^4)$-verteilten Zufallsvariablen weichen mit Wahrscheinlichkeit 0.95 weniger als 1 von ihrem Erwartungswert μ ab. $\square$

Lösungskizze zu Aufgabe WTh41:

Sei A das Ereignis, dass bei einem Wurf eine Sechs erscheint. Es handelt sich um ein Bernoulli-Experiment, da die möglichen Würfelergebnisse $\omega_i \in \{1,2,3,4,5,6\}$ alle dieselbe Wahrscheinlichkeit $p = \frac{1}{6}$ besitzen und vollständig unabhängig sind. Nach dem Satz über die geometrische Verteilung ist die Wahrscheinlichkeit $p_n = P_n(A)$ dafür, dass das Ereignis A zum ersten mal beim n-ten Versuch auftritt, gegeben durch

$$p_n = p \cdot (1-p)^{n-1}.$$

Sei X eine diskrete Zufallsvariable, die die bis zum erstmaligen Eintreten des Ereignisses A notwendigen Versuche beschreibt. X besitzt die Verteilung $(n; p\cdot(1-p)^{n-1})$ für $n \in \mathbb{N}$ und heißt geometrisch verteilt mit Parameter p. Für geometrisch verteilte Zufallsvariablen X mit Parameter p gilt

$$E(X) = \frac{1}{p}, \quad \sigma^2(X) = \frac{1-p}{p^2}$$

und damit für die Standardabweichung (Streuung)

$$\sigma(X) = \pm\frac{\sqrt{1-p}}{p} \quad .$$

Es gilt also

$$E(X) = 6, \quad \sigma(X) = \pm 5.4772256\ldots$$

Man muss daher 'im Durchschnitt' sechsmal würfeln, bis die erste Sechs erscheint. $\square$

Lösungskizze zu Aufgabe WTh42:

Zu (a): Es gilt

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{\infty} p_X(k) &= \sum_{k=1}^{\infty} p(1-p)^{k-1} \\
&= p\left(\sum_{k=1}^{\infty}(1-p)^{k-1}\right) \\
&= p\left(\sum_{k=0}^{\infty}(1-p)^{k}\right) \\
&= p \cdot \frac{1}{1-(1-p)}, \qquad\qquad \text{Formel für geometrische Reihe} \\
&= \frac{p}{p} \\
&= 1.
\end{aligned}$$

Zu (b): Der Erwartungswert einer diskreten Zufallsvariable X ist definiert als

$$E(X) := \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot P(X = k).$$

Im Fall einer geometrisch verteilten Zufallsvariable gilt

$$\begin{aligned}
E(X) &= \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot P(X = k) \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot p \cdot (1-p)^{k-1} \\
&= p \cdot \left(\sum_{k=1}^{\infty} k \cdot (1-p)^{k-1}\right) \\
&= p \cdot \left(\sum_{k=0}^{\infty} (k+1) \cdot (1-p)^{k}\right) \\
&= p \cdot \left(\sum_{k=0}^{\infty} k \cdot (1-p)^{k} + \sum_{k=0}^{\infty}(1-p)^{k}\right) \\
&\stackrel{Teil(a)}{=} p \cdot \left(\sum_{k=0}^{\infty} k \cdot (1-p)^{k} + \frac{1}{p}\right) \\
&= p \cdot \left(\sum_{k=1}^{\infty} k \cdot (1-p)^{k} + \frac{1}{p}\right)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= p \cdot (1-p) \cdot \left(\sum_{k=1}^{\infty} k \cdot (1-p)^{k-1} \right) + \frac{p}{p} \\
&= p \cdot (1-p) \cdot \frac{d}{d(1-p)} \left(\sum_{k=1}^{\infty} (1-p)^{k} \right) + \frac{p}{p} \\
&= p \cdot (1-p) \cdot \frac{d}{d(1-p)} \left(\sum_{k=0}^{\infty} (1-p)^{k} - 1 \right) + \frac{p}{p} \\
&= p \cdot (1-p) \cdot \frac{d}{d(1-p)} \left(\frac{1}{1-(1-p)} - 1 \right) + \frac{p}{p} \\
&= p \cdot (1-p) \cdot \left(\frac{1}{(1-(1-p))^2} \right) + \frac{p}{p} \\
&= \frac{p(1-p)}{p^2} + \frac{p}{p} \\
&= \frac{1}{p}.
\end{aligned}
$$

□

Lösungskizze zu Aufgabe WTh43:

Sei A das Ereignis, dass ein Brand auftritt, A_i das Ereignis, dass ein Brand am i-ten Tag auftritt $(i \in \{1,2,\ldots,365\})$. Die Wahrscheinlichkeiten $P(A_i)$ sind jeweils $\frac{2}{365}$, da pro Jahr durchschnittlich 2 Brände auftreten, und die Ereignisse A_i sind vollständig unabhängig. Es handelt sich hier daher um ein Bernoulli-Experiment.
Sei X eine binomialverteilte Zufallsvariable, die die Anzahl k der Brände pro Jahr beschreibt. Es gilt

$$
P(X = k) = b\left(k, 365, \frac{2}{365}\right) \quad .
$$

Nach dem Satz über die Poisson-Verteilung lassen sich binomialverteilte Zufallsvariablen für große n und kleine p durch die Poisson-Verteilung approximieren. Daher gilt für $\lambda = np = 2$ und $k \in \mathbb{N}$

$$
b(k,n,p) \approx \frac{(np)^k}{k!} \cdot e^{-np} = \frac{2^k}{k!} \cdot e^{-2}.
$$

Sei B das Ereignis, dass mindestens fünf Brände auftreten. Gesucht ist nun

$$
\begin{aligned}
P(B) &= 1 - P(\overline{B}) \\
&= 1 - \sum_{k=0}^{4} b(k,n,p) \\
&\approx 1 - \sum_{k=0}^{4} \frac{2^k}{k!} \cdot e^{-2} \\
&= 1 - e^{-2}(1+2+2+\frac{4}{3}+\frac{2}{3}) \\
&= 1 - 7e^{-2} \\
&= 0.052653
\end{aligned}
$$

□

Lösungskizze zu Aufgabe WTh44:

Wir numerieren die Urnen mit $1,2,\ldots,n$. Dann seien A_i die Ereignisse, dass eine Kugel in die Urne i gelegt wird ($i \in \{1,2,\ldots,n\}$). Wir betrachten das Ergebnis $A_{k_1,k_2,\ldots,k_n}$, bei dem nach der Aufteilung aller n Kugeln in die Urnen in Urne 1 genau k_1, in Urne 2 genau k_2, $\ldots$, in Urne n genau k_n Kugeln liegen, wobei $k_i \in \{0,1,\ldots,n\}$.
Wir interessieren uns nun für die Gesamtheit W aller Ereignisse, bei denen genau eine Urne leer bleibt, was nach sich zieht, dass genau eine andere Urne zwei Kugeln enthält. Das heißt also, dass wir alle Ergebnisse $A_{k_1,k_2,\ldots,k_n}$ betrachten, bei denen $k_i = 0, k_j = 2$ für $i \neq j$ und $k_r = 1$ für $r \neq i$ und $r \neq j$. Wir betrachten o.B.d.A. den Fall $A_{0,2,1,1,\ldots,1}$.
Es handelt sich um ein Bernoulli-Experiment vom Umfang n mit n paarweise unvereinbaren Ereignissen A_i, von denen bei jedem Versuch genau eines mit konstanter Wahrscheinlichkeit $P(A_i) = p_i$ eintreten muss. Dann gilt nach dem Satz über die Polynomialverteilung für die Wahrscheinlichkeit eines Gesamtergebnisses

$$p_{k_1,k_2,\ldots,k_n} = \frac{n!}{k_1!k_2!\ldots k_n!}\, p_1^{k_1} p_2^{k_2} \ldots p_n^{k_n} \quad .$$

Wenn wir zwei Urnen aus den n Urnen auswählen, in denen am Ende keine bzw. zwei Kugeln liegen sollen, so gibt es zwei Möglichkeiten, bei denen eine Urne leer bleibt. Die Anzahl der Elementarereignisse in W beträgt daher $2\binom{n}{2}$. Wir erhalten für die gesuchte Wahrscheinlichkeit

$$P(W) = 2\binom{n}{2} \cdot p_{0,2,1,1\ldots,1} = 2\binom{n}{2} \cdot \frac{n!}{2!}\,\frac{1}{n^n} \quad .$$

Im Fall $n = 4$ folgt daher

$$P(W) = 2\binom{4}{2} \cdot \frac{4!}{2!}\,\frac{1}{4^4} = \frac{1152}{2048} = 0.5625 \quad .$$

Im Fall $n = 5$ folgt

$$P(W) = 2\binom{5}{2} \cdot \frac{5!}{2!}\,\frac{1}{5^5} = \frac{28800}{75000} = 0.384$$

□

Lösungskizze zu Aufgabe WTh45:

Sei X eine Zufallsvariable, die einem Paar willkürlich gezogener natürlicher Zahlen (u,v) mit $u,v \in \{1,2,\ldots,n\}$ deren Differenz im Absolutbetrag zuweist. Folgende Zuordnung gilt für alle Zahlenpaare (u,v):

$$(u,v) \xrightarrow{X} m = |u-v|.$$

Die Verteilungsfunktion von X ist

$$F(m) = P(X < m) = \sum_{m_i < m} P(X = m_i),$$

wobei $m, m_i \in \{1,2,\ldots,n-1\}$.
Gesucht ist nun der Wert von $1 - F(m)$, der die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis beschreibt, dass die Differenz zwischen den beiden gezogenen Zahlen mindestens so groß wie m ist.

Jedes einzelne Zahlenpaar tritt mit derselben Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{n(n-1)}$ auf. Wir untersuchen nun, welchen Zahlepaaren (u,v) durch X die Differenz m zugewiesen wird.
Für $m=1$ sind dies die Paare $(1,2),(2,3),(3,4),\ldots(n-1,n)$. Davon gibt es $n-1$ Stück. Da jedes derartige Paar (u,v) auch als (v,u) gezogen werden kann und beide Ereignisse unterschieden werden müssen, gibt es demnach $2(n-1)$ Ereignisse, denen durch X der Wert $m=1$ zugewiesen wird.
Den Paaren $(1,3),(2,4),(3,5),\ldots,(n-2,n)$ und ihren Spiegelbildern wird durch X der Wert $m=2$ zugewiesen. Hiervon gibt es $2(n-2)$ Stück.
Den Paaren $(1,4),(2,5),(3,6),\ldots,(n-3,n)$ und ihren Spiegelbildern wird durch X der Wert $m=3$ zugewiesen. Hiervon gibt es $2(n-3)$ Stück.
Allgemein gilt, dass es $2(n-i)$ Zahlenpaare gibt, denen durch X der Wert $m=i$ zugewiesen wird $(i\in\{1,2,3,\ldots,n-1\})$.
Damit erhalten wir folgende Verteilungsfunktion für X:

$$\begin{aligned}
F(m) &= \sum_{m_i<m} P(X=m_i)\\
&= \sum_{i=1}^{m-1} \frac{2(n-i)}{n(n-1)}\\
&= \frac{2}{n(n-1)}\left(\sum_{i=1}^{n-1}(n-i) - \sum_{i=m}^{n-1} n-i\right)\\
&= \frac{2}{n(n-1)}\left(\sum_{i=1}^{n-1} i - \sum_{i=1}^{n-m} i\right)\\
&\overset{(*)}{=} \frac{2}{n(n-1)}\left(\frac{(n-1)n}{2} - \frac{(n-m)(n-m+1)}{2}\right)\\
&= 1 - \frac{(n-m)(n-m+1)}{n(n-1)}
\end{aligned}$$

Der mit (*) gekennzeichnete Schritt verwendet die Identität der Ausdrücke $\sum_{i=1}^{n} i$ und $\frac{n(n+1)}{2}$.
Die gesuchte Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Differenz zweier willkürlich gezogener Zahlen $u,v\in\{1,2,\ldots,n\}$ im Absolutbetrag mindestens so groß ist wie m, beträgt nun

$$1-F(m) = \frac{(n-m)(n-m+1)}{n(n-1)}$$

□

Lösungskizze zu Aufgabe WTh46:

Zu (a): Sei X eine Zufallsvariable, die die Anzahl der eingetretenen Ereignisse bei einem n-stelligen Experiment zählt. X sei nach Voraussetzung $B(900;\frac{1}{2})$-verteilt (binomialverteilt). Gesucht ist nun $P(405\le X\le 495)$. Nach der Tschebyscheff-Ungleichung gilt

$$P(|X-E(X)|\ge\varepsilon)\le\frac{Var(X)}{\varepsilon^2}.$$

Für eine binomialverteilte Zufallsvariable X gilt $E(X)=np$ und $Var(X)=np(1-p)$, wobei n die Anzahl der durchgeführten Versuche bezeichnet. In unserem Fall ist damit $E(X) = 450$ und $Var(X) = 225$. Aus der Tschebyscheff-Ungleichung folgt

$$P(|X - E(X)| \geq 45) \leq \frac{225}{45^2}.$$

Insgesamt bekommen wir

$$\begin{aligned} P(|X-450| \leq 45) &= 1 - P(|X-450| > 45) \\ &> 1 - \frac{225}{45^2} \\ &= 1 - \frac{1}{9} \\ &= \frac{8}{9} \\ &= 0.\overline{8} \\ &> 0.88\,. \end{aligned}$$

Zu (b): Sei X eine $B(n;p)$-verteilte Zufallsvariable. Dann gilt nach dem Satz von Moivre-Laplace

$$\lim_{n\to\infty} P\left(a \leq \frac{X - np}{\sqrt{np(1-p)}} \leq b\right) = \Phi(b) - \Phi(a),$$

wobei Φ die Verteilungsfunktion der Standard-Normalverteilung ist. Also gilt

$$\begin{aligned} P(405 \leq X \leq 495) &= P(-3 \leq \frac{X-450}{15} \leq 3) \\ &\approx \Phi(3) - \Phi(-3) \\ &= 2\Phi(3) - 1 \\ &= 0.9974 \\ &> 0.88\,. \end{aligned}$$

□

Lösungskizze zu Aufgabe WTh47:

Zu (a): Eine normalverteilte Zufallsvariable X mit Erwartungswert μ und Varianz σ^2 wird durch die Transformation $X^* := \frac{X-\mu}{\sigma}$ in eine standard-normalverteilte Zufallsvariable X^* überführt. Auf diese ist die tabellierte Verteilungsfunktion $\Phi_{0,1}$ der Standard-Normalverteilung

Da eine normalverteilte Zufallsvariable symmetrisch zum Erwartungswert verteilt ist, gilt

$$
\begin{aligned}
P(|X-\mu| \geq 2\sigma) &= P(X \leq \mu - 2\sigma) + P(X \geq \mu + 2\sigma) \\
&= P(X \leq \mu - 2\sigma) + (1 - P(X \leq \mu + 2\sigma)) \\
&= 1 + P(X^* \leq \frac{\mu - \mu - 2\sigma}{\sigma}) - P(X^* \leq \frac{\mu - \mu + 2\sigma}{\sigma}) \\
&= 1 + P(X^* \leq -2) - P(X^* \leq 2) \\
&= 1 + \Phi(-2) - \Phi(2) \\
&= 1 + (1 - \Phi(2)) - \Phi(2) \\
&= 2 - 2\Phi(2) \\
&= 0.0456 \quad .
\end{aligned}
$$

Wenn X eine Zufallvariable mit Erwartungswert μ und endlicher Varianz σ^2 ist, dann gilt für alle $\varepsilon > 0$ die Tschebyscheff-Ungleichung

$$P(|X-\mu| \geq \varepsilon) \leq \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2}.$$

Damit folgt

$$P(|X-\mu| \geq 2\sigma) \leq \frac{\sigma^2}{4\sigma^2} = \frac{1}{4} = 25\%.$$

Zu (b): Die beiden Abschätzungen unterscheiden sich deshalb so stark, weil bei den Voraussetzungen für die Gültigkeit der Tschebyscheff-Ungleichung keine Angaben über die Art der Verteilung der Zufallsvariablen X gemacht werden, so dass eventuell mit dem ungünstigsten Fall gerechnet werden muss. Daher liefert die Tschebyscheff-Ungleichung im allgemeinen eine grobere Schranke als eine genaue Betrachtung der Verteilung der Zufallvariable.

Lösungskizze zu Aufgabe WTh48:

Die vom Kandidat gewählte Tür habe die Nummer 1, die vom Talkmaster geöffnete die Nummer 2. Wir betrachten den zugehörigen *Wahrscheinlichkeitsbaum*, s. Abb. 1.

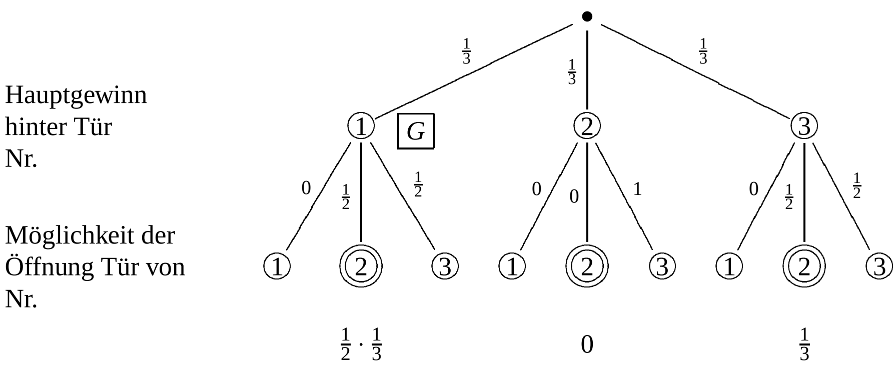

Abbildung 1: Wahrscheinlichkeits-Baum zu Aufgabe WTh48

Die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis G, dass der Hauptgewinn hinter Tür 1 ist, unter der Bedingung Z, dass der Talkmeister Tür 2 öffnet, erfüllt

$$P(G|Z) = \frac{P(G \wedge Z)}{P(Z)} = \frac{P(G) \cdot P(Z|G)}{P(Z)} = \frac{\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}}{(\frac{1}{3} + \frac{1}{6})} = \frac{1}{3}.$$

Daher ist $P(\text{non } G\,|Z) = \frac{2}{3}$. Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass der Hauptgewinn sich hinter Tür 3 verbirgt, ist also doppelt so groß wie für Tür 1, und der Kandidat sollte sich daher umentscheiden.

Lösungskizze zu Aufgabe WTh49:

Das Spiel endet beim k-ten Wurf mit Gewinn W_k, falls das Ergebnis $(x_1, \ldots, x_{k-1}, x_k)$ von der Form

$$\begin{aligned} (x_1, \ldots, x_{k-1}) &= (\text{ Kopf , Kopf }, \ldots, \text{ Kopf }) \text{ und} \\ x_k &= \text{ Zahl ist} \qquad (\text{für } k = 1, \ldots 6). \end{aligned}$$

Dieses tritt mit Wahrscheinlichkeit $w_k = \left(\frac{1}{2}\right)^k$ ein. (Ein Spielausgang ohne Gewinn hat Wahrscheinlichkeit $\left(\frac{1}{2}\right)^6$). Als Erwartungswert E des Gewinns erhält man so

$$E = \sum_{k=1}^{6} W_k w_k + 0 = \sum_{k=1}^{6} 2^{k-1} \cdot \frac{1}{2^k} = \sum_{k=1}^{6} \frac{1}{2} = 3.00[\text{DM}].$$

Gegenüber dem Einsatz von DM 4.– ist die mittlere Gewinnaussicht zu gering, sodass sich das Spiel auf längere Sicht nur für den Betreiber der Jahrmarktsbude lohnt. □

Lösungskizze zu Aufgabe WTh50:

(a) X sei die Zufallsvariable der ersten 'Kollision'. Dann hat das Ereignis, dass die ersten k-Kugeln in verschiedene Fächer gelangen, die Wahrscheinlichkeit $P(X > k) = \frac{n \cdot (n-1) \ldots (n-k+1)}{n^k}$, also $P(X \leq k) = 1 - \frac{n(n-1) \ldots (n-k+1)}{n^k} = 1 - \prod_{j=1}^{k-1} (1 - \frac{j}{n})$. Daher gilt $P(X \leq 3) = 1 - \frac{6}{7} \cdot \frac{5}{7} = \frac{19}{49} \approx 0{,}387$.

(b) Als Modell dient eine Reihe von $k = 3$ unabhängigen gleichartigen Experimenten (Fachbesetzung mit Teilchen) mit Erfolgswahrscheinlichkeit $\frac{1}{7}$. Gesucht ist die Wahrscheinlichkeit für zwei Erfolge, also $P(Z \geq 2)$, bei einer Binomialverteilung (mit $k = 3, p = \frac{1}{7}$).

$$\begin{aligned} P(\text{mind. zwei am Sonntag}) = P(Z \geq 2) &= 1 - (1 - \frac{1}{7})^k - \frac{k}{7}(1 - \frac{1}{7})^{k-1} \\ &\approx 1 - 0{,}63 - 0{,}315 \approx 0{,}055. \end{aligned}$$

□

Anmerkung: Alternativ kann man auch wie folgt argumentieren:
(a) Es gibt $\binom{7}{2}$ Möglichkeiten, zwei Fächer (Wochentage) auszuwählen, 2 Möglichkeiten, dann dasjenige mit genau 2 Kugeln (Personen) zu bestimmen; die Auswahl von 2 der 3 Kugeln zur Verteilung in die vorgegebenen Fächer ist $\binom{3}{2}$, die Wahrscheinlickeit für die Einsortierung einer Kugel in ein bestimmtes Fach $\frac{1}{7}$; insgesamt ergibt sich für die Wahrscheinlichkeit w_2, dass genau 2 Kugeln in einem Fach sind:

$$w_2 = 2 \cdot \binom{7}{2} \cdot \binom{3}{2} \cdot \left(\frac{1}{7}\right)^3 = \frac{18}{49};$$

die Wahrscheinlichkeit w_3, dass 3 Kugeln in einem Fach sind, ist $w_3 = 7 \cdot \left(\frac{1}{7}\right)^3 = \frac{1}{49}$; die gesuchte Wahrscheinlichkeit ist damit

$$w = w_2 + w_3 = \frac{19}{49}.$$

(b) Durch eine ähnliche Argumentation wie in (a) sieht man, dass die gesuchte Wahrscheinlichkeit für (ii) die folgende ist:

$$6 \cdot \binom{3}{2} \cdot \left(\frac{1}{7}\right)^3 + \left(\frac{1}{7}\right)^3 = \frac{19}{343}.$$

Themenindex