Ausgewählte Aufgaben zum Grundbereich
des Staatsexamens in Mathematik

Lineare Algebra

zusammengestellt von

Sabine Giese, Josef Heringlehner, Birgit Mielke,

Hans Mielke und Ralph-Hardo Schulz

98 Aufgaben, davon 79 mit Lösungen.
Fassung vom 24. Juli 2003

Die Lösungen bzw. Lösungshinweise wurden sorgfältig erstellt, trotzdem können wir keine Gewähr übernehmen. Kommentare sind willkommen (z.B. per E-mail an schulz@math.fu-berlin.de).
An dieser Stelle möchten wir uns herzlich bei Christoph Kapsch für Beiträge zur Aufgabensammlung und bei Jennifer Eisfeldt, Sonja Ernst, Prof. Dr. Rudolf Gorenflo, Prof. Eberhard Letzner, Veronika Liebich, Julian Pfab, Gregor Schulz und Ariane Weigandt für Hinweise auf Fehler bzw. Druckfehler, auf missverständliche Formulierungen oder fehlerhafte Interpretationen von Aufgabenstellungen in früheren Fassungen dieser Aufgabensammlung bedanken.

Aufgaben

Aufgabe LA1:

Im $\mathbb{R}^3$ seien die Punkte $A = (1,0,0)$, $B = (1,1,1)$, $C = (0,-1,1)$, $D = (1,-1,1)$ gegeben.

(a) Bestimmen Sie die Geraden $g = AB$ und $h = CD$.

(b) Zeigen Sie, dass g und h windschief sind.

(c) Berechnen Sie den euklidischen Abstand zwischen g und h sowie die Fußpunkte $F_g \in g$ und $F_h \in h$ des gemeinsamen Lotes.

Lösung siehe Seite: 25.

Aufgabe LA2:

Seien V und W endlich dimensionale Vektorräume über einem Körper K, sei B eine Basis von V und C eine Basis von W. Bestimmen Sie eine Basis von $\mathrm{Hom}_K(V,W)$, dem K–Vektorraum der linearen Abbildungen von V in W.
Lösung siehe Seite: 25.

Aufgabe LA3:

Sei $\mathbb{R}^{(2,2)}$ die Menge der reellen 2×2–Matrizen und

$$\mathcal{C} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} : a, b \in \mathbb{R} \right\} \subseteq \mathbb{R}^{(2,2)}$$

(a) Zeigen Sie, dass $\mathcal{C}$ bezüglich Matrixaddition und –multiplikation ein Körper ist.

(b) Zu welchem Ihnen bekannten Körper ist $\mathcal{C}$ isomorph? Geben Sie einen Isomorphismus an.

Lösung siehe Seite: 25.

Aufgabe LA4:

Sei p eine Projektion eines Vektorraums V, also $p \in \mathrm{End}(V)$ mit $p^2 = p$. Zeigen Sie:

(a) $\mathrm{Bild}\, p$ bleibt elementweise fest unter p

(b) Für alle $v \in V$ gilt: $v - p(v) \in \mathrm{Kern}\, p$

(c) $V = \mathrm{Kern}\, p \oplus \mathrm{Bild}\, p$

(d) Ist $v = u + w$ mit $u \in \mathrm{Bild}\, p, w \in \mathrm{Kern}\, p$, so folgt $p(v) = u$.

(e) $\mathrm{Kern}\, p = \mathrm{Bild}(\mathrm{id} - p)$ (beachte: $v = v - p(v)$ für $v \in \mathrm{Kern}\, p$)

(f) $\mathrm{id} - p$ ist ebenfalls Projektion von V

Lösung siehe Seite: 26.

Aufgabe LA5:

Seien V und W Vektorräume über dem Körper K und $f : V \to W$ eine lineare Abbildung. Seien $n \in \mathbb{N}$, $v_1, \ldots, v_n \in V$, $w_1, \ldots, w_n \in W$. Beweisen oder widerlegen Sie:

(a) $\{v_i : i = 1, dots, n\}$ linear abhängig $\Longrightarrow \{f(v_i) : i = 1, dots, n\}$ linear abhängig

(b) $\{v_i : i = 1, dots, n\}$ lin. unabh. $\Longrightarrow \{f(v_i) : i = 1, dots, n\}$ lin. unabh.

(c) $\{w_i : i = 1, dots, n\}$ lin. abh. $\Longrightarrow \{f^{-1}(w_i) : i = 1, dots, n\}$ lin. abh.

(d) f injektiv und $\{v_i : i = 1, dots, n\}$ lin. unabh. $\Longrightarrow \{f(v_i) : i = 1, dots, n\}$ lin. unabh.

Lösung siehe Seite: 26.

Aufgabe LA6:

Sei V der Vektorraum der reellwertigen Funktionen auf $\mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass die trigonometrischen Funktionen $c_1 : x \to \cos x$, $c_2 : x \to \cos 2x$, $s_1 : x \to \sin x$, $s_2 : x \to \sin 2x$, $s_3 : x \to \sin 3x$ linear unabhängig sind.

Lösung siehe Seite: 27.

Aufgabe LA7:

(a) Sei A eine reelle Matrix; fasst man A als Matrix über $\mathbb{C}$ auf, so gilt: Ist λ Eigenwert von A, so auch $\overline{\lambda}$, die zu λ konjugiert komplexe Zahl.

(b) Zeigen Sie, dass die Eigenwerte einer reellen symmetrischen Matrix aufgefasst als Matrix über $\mathbb{C}$ alle reell sind.

(c) Ist A eine reelle symmetrische Matrix, so sind Eigenvektoren $\vec{a}, \vec{b}$ zu verschiedenen Eigenwerten von A zueinander orthogonal.

Lösung siehe Seite: 27.

Aufgabe LA8:

Zeigen Sie: Eine Gruppe $(G, \cdot)$ ist abelsch, wenn eine der folgenden Bedingungen erfüllt ist:

(a) $\forall x \in G : x \cdot x = 1$

(b) $\forall x, y \in G : (x \cdot y)^2 = x^2 \cdot y^2$

(c) $\forall x, y \in G : y^{-1} \cdot x^{-1} \cdot y \cdot x = 1$.

Lösung siehe Seite: 27.

Aufgabe LA9:

Sei $\mathbb{R}[x]$ der Vektorraum der Polynome mit reellen Koeffizienten.

(a) Zeigen Sie, dass die Abbildung A mit $A(p)(x) = p(x+1) - p(x)$ eine lineare Abbildung von $\mathbb{R}[x]$ nach $\mathbb{R}[x]$ ist.

(b) Bestimmen Sie den Kern der Abbildung A.

Lösung siehe Seite: 27.

Aufgabe LA10:

Untersuchen Sie, ob die durch die Matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ gegebene lineare Abbildung von K^3 nach K^3 bijektiv ist

(a) für $K = \mathbb{R}$,

(b) für $K = \mathbb{F}_3$.

Lösung siehe Seite: 27.

Aufgabe LA11:

Bestimmen Sie alle reellen Polynomfunktionen vom Grad ≤ 3, deren Graph durch die Punkte (-1,4) und (1,6) geht!
Lösungshinweis: Stellen Sie ein lineares Gleichungssystem auf!
Lösung siehe Seite: 28.

Aufgabe LA12:

Sei V ein $\mathbb{R}$- oder $\mathbb{C}$-Vectorraum mit Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$.
Zeigen Sie für eine orthonormale Menge $U = \{u_1, \ldots, u_r\}$ von Vektoren:

(a) U ist linear unabhängig

(b) Für jeden Vektor $v \in V$ ist

$$w = v - \sum_{i=1}^{r} \langle v, u_i \rangle u_i$$

orthogonal zu jedem u_i.

Lösung siehe Seite: 28.

Aufgabe LA13:

Zeigen Sie durch ein Beispiel, dass es unendlich dimensionale Vektorräume gibt: Geben Sie einen solchen an, und beweisen Sie, dass er unendliche Dimension besitzt.
Lösung siehe Seite: 29.

Aufgabe LA14:

Sei K ein Körper, $B \in K^{(2,2)}$, $f : K^{(2,2)} \to K^{(2,2)}$ die durch $f(A) = BA$ definierte Abbildung.

(a) Bestimmen Sie eine Matrix von f.

(b) Zeigen Sie: $\det f = (\det B)^2$.

Lösung siehe Seite: 29.

Aufgabe LA15:

Sei T ein linearer Operator auf dem Vektorraum V. Es existiere ein $k \in \mathbb{N}$ mit $T^k = 0$ für alle $x \in V$ und ein $z \in V$ mit $T^{k-1}(z) \neq 0$.

(a) Zeigen Sie: $B = \{z, T(z), T^2(z), \ldots, T^{k-1}(z)\}$ ist linear unabhängig.

(b) $TU \subseteq U$, wobei $U = \langle B \rangle$.

(c) Geben Sie eine möglichst einfache Transformationsmatrix von T an.

Lösung siehe Seite: 29.

Aufgabe LA16:

Für welche Werte von r sind die Vektoren $\left\{ \begin{pmatrix} r \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ r \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ r \end{pmatrix} \right\}$ linear unabhängig?

Lösung siehe Seite: 30.

Aufgabe LA17:

$B_1 = \{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$ sei Basis eines K–Vektorraumes V. Weiter seien die Vektoren $\vec{u} = \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix}_{B_1}$, $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}_{B_1}$ und $\vec{w} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}_{B_1}$ gegeben.

(a) Beweisen Sie, dass $B_2 = \{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$ ebenfalls eine Basis von V ist.

(b) Zeigen Sie, dass $\vec{x} = \vec{a} + \vec{b} - \vec{c}$ die gleichen Koordinaten bezüglich B_1 wie bezüglich B_2 hat.

Lösung siehe Seite: 30.

Aufgabe LA18:

$B = \{\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3, \vec{b}_4\}$ sei Basis eines $\mathbb{R}$–Vektorraumes V. Ferner seien $\vec{a}_1 = 2\vec{b}_1 - \vec{b}_2$, $\vec{a}_2 = \vec{b}_2 + \vec{b}_3 + \vec{b}_4$, $\vec{a}_3 = \vec{b}_3 - \vec{b}_4$ und $U = \langle \vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3 \rangle$ der von $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$ aufgespannte Unterraum.

(a) Zeigen Sie: $A = \{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3\}$ ist Basis von U.

(b) Bestimmen Sie die Koordinaten von $\vec{x} = 6\vec{b}_1 - 5\vec{b}_2 - 4\vec{b}_4$ bezüglich A.

(c) Ergänzen Sie A zu einer Basis von V.

Lösung siehe Seite: 30.

Aufgabe LA19:

Zeigen Sie: Sind H und H' Hyperebenen eines endlich dimensionalen Vektorraums V, ist $a \in H \setminus \{0\}$, $b \notin H$, $a' \in H' \setminus \{0\}$, $b' \notin H'$, dann gibt es ein $\alpha \in \mathrm{GL}(V)$, der Gruppe der Automorphismen auf V, mit $\alpha(H) = H'$, $\alpha(a) = a'$, $\alpha(b) = b'$.
Hinweis: Benutzen Sie den Basisergänzungssatz: Ist V ein Vektorraum, $A \subseteq V$ linear unabhängig, $S \supseteq A$ ein Erzeugendensystem von V, so gibt es eine Basis B von V mit $A \subseteq B \subseteq V$.
Lösung siehe Seite: 31.

Aufgabe LA20:

Sei (V, φ) ein euklidischer Vektorraum; d.h. V ist ein $\mathbb{R}$–Vektorraum mit Skalarprodukt φ. Zu $U \subseteq V$ definiert man $U^\perp = \{v \in V : \forall u \in U \varphi(u,v) = 0\}$. Zeigen Sie, dass für alle Unterräume U und W von V gilt

(a) $(U+W)^\perp = U^\perp \cap W^\perp$

(b) $(U \cap W)^\perp \supseteq U^\perp + W^\perp$

(c) $(U^\perp)^\perp = U$, falls $\dim V < \infty$

(d) $(U \cap W)^\perp = U^\perp + W^\perp$, falls $\dim V < \infty$

Hinweis: Sätze über die Dimension des Kerns einer linearen Abbildung dürfen Sie unbewiesen benutzen.
Lösung siehe Seite: 31.

Aufgabe LA21:

V_1, V_2, W_1, W_2 seien Unterräume des K–Vektorraumes V, mit $V_1 \oplus V_2 = W_1 \oplus W_2$.

(a) Zeigen Sie: Ist $\dim_K V < \infty$, so folgt aus $V_1 \cong W_1$ auch $V_2 \cong W_2$.

(b) Widerlegen Sie an einem Beispiel die Aussage $V_1 = W_1 \Longrightarrow V_2 = W_2$.

(c) Zeigen Sie an einem Beispiel, dass die Aussage $V_1 \cong W_1 \Longrightarrow V_2 \cong W_2$ für $\dim_K V_1 = \infty$ falsch ist.

(d) Ist $f_1 \in \mathrm{End}\, V_1$ und $f_2 \in \mathrm{End}\, V_2$, so gibt es genau ein $f \in \mathrm{End}(V_1 \oplus V_2)$ mit $f|_{V_i} = f_i$ $(i = 1,2)$.

Lösung siehe Seite: 32.

Aufgabe LA22:

Zeigen Sie, dass es genau eine lineare Abbildung $f : \mathbb{Q}^4 \to \mathbb{Q}^4$ gibt mit $f(1,0,0,0) = (2,0,-2,-2)$, $f(0,1,0,0) = (1,3,-1,2)$, $f(0,0,1,0) = (2,1,-1,0)$ und $f(1,1,1,1) = (6,5,-3,3)$. Bestimmen Sie den Rang von f.
Lösung siehe Seite: 32.

Aufgabe LA23:

Geben Sie eine lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ an mit $f(1,2,-1) = (1,0)$, $f(2,1,4) = (0,1)$. Zeigen Sie, dass f nicht eindeutig bestimmt ist.
Lösung siehe Seite: 32.

Aufgabe LA24:

In der Euklidischen Ebene sei g die Gerade mit der Gleichung $5x - 12y - 10 = 0$ und $P = (5,-2)$. Bestimmen Sie

(a) den Abstand zwischen g und P,

(b) die Gleichung der Geraden h durch P, die auf g senkrecht steht und

(c) die Koordinaten des Bildpunktes Q von P unter der Spiegelung an g.

Lösung siehe Seite: 33.

Aufgabe LA25:

Beweisen Sie, dass jede symmetrische reelle 2×2–Matrix diagonalisierbar ist.
Lösung siehe Seite: 33.

Aufgabe LA26:

Sei $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ t & 1 & 0 \end{pmatrix}$ eine reelle Matrix mit $t \in \mathbb{R}$.

(a) Bestimmen Sie die Eigenwerte von A.

(b) Existiert für $t \geq -1$ eine Basis des $\mathbb{R}^3$ aus Eigenvektoren?

Lösung siehe Seite: 34.

Aufgabe LA27:

Zeigen Sie: $A = \{1, x-1, (x-1)(x-2)\}$ ist Basis des Raums P der reellen quadratischen Polynome.
Lösung siehe Seite: 34.

Aufgabe LA28:

Sei $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ eine Matrix über $\mathbb{R}$.

(a) Bestimmen Sie alle reellen Eigenwerte und die zugehörigen Eigenräume.

(b) Ist A diagonalähnlich?

Lösung siehe Seite: 34.

Aufgabe LA29:

Ist die Matrix zu folgendem Endomorphismus diagonalisierbar? $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $T : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 2x+y \\ y-z \\ 2y+4z \end{pmatrix}$.
Lösung siehe Seite: 34.

Aufgabe LA30:

Finde Eigenwerte und Eigenvektoren der linearen Abbildung $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, gegeben durch $T : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x-2z \\ 0 \\ 4z-2x \end{pmatrix}$.
Lösung siehe Seite: 35.

Aufgabe LA31:

Ist die Matrix $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ regulär? Bestimmen Sie Eigenwerte und Eigenvektoren der zu M gehörigen linearen Abbildung $\varphi_M : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$. Ist M diagonalisierbar?
Lösung siehe Seite: 35.

Aufgabe LA32:

Unter welchen Bedingungen an den Skalar r sind die Vektoren $a = \begin{pmatrix} r \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} 1 \\ r \\ 1 \end{pmatrix}$, $c = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ r \end{pmatrix}$ des K–Vektorraums K^3 linear unabhhängig?

(i) $K = \mathbb{R}$

(ii) $K = \mathbb{Q}$

(iii) Gibt es einen Skalar $r \in \mathbb{R}$ und einen Vektor d in $\mathbb{R}^3$, so dass dann a, b, c, d linear unabhängig sind in $\mathbb{R}^3$?

Lösung siehe Seite: 35.

Aufgabe LA33:

Sei E die Ebene des reellen euklidischen Raumes $\mathbb{R}^3$ mit der Gleichung $-3x+2y-6z=-14$.
Bestimmen Sie die Menge M aller Punkte aus $\mathbb{R}^3$, die den Abstand 1 von E haben und auf der gleichen Seite von E wie der Nullpunkt liegen. Beschreiben Sie M geometrisch !
Hinweis: Sie dürfen den relevanten Satz der Analytischen Geometrie ohne Beweis anwenden.
Lösung siehe Seite: 35.

Aufgabe LA34:

Sei V ein Vektorraum über $\mathbb{R}$, $\dim V = n$, $B = \{b_1 \dots b_n\}$ eine Basis von V. Den Dualraum von V bezeichnen wir mit V^*.

(a) Geben Sie eine Definition von V^*, definieren Sie die duale Basis $B^* = \{b_1^* \dots b_n^*\}$.

(b) Beweisen Sie, dass die von Ihnen angegebene Menge B^* eine Basis von V^* ist.

Lösung siehe Seite: 36.

Aufgabe LA35:

Sei $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ die Abbildung $g : \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \mapsto v_1 - v_2 + 2v_3$.

(a) Geben Sie je eine Basis und die Dimensionen von $\operatorname{Kern} g$ und von $\mathbb{R}^3 / \operatorname{Kern} g$ über $\mathbb{R}$ an.

(b) Interpretieren Sie $\operatorname{Kern} g$ und $\frac{1}{\sqrt{1+(-1)^2+2^2}} g$ geometrisch.

Lösung siehe Seite: 36.

Aufgabe LA36:

Sei E die reelle affine Ebene und $\alpha : E \to E$ eine Affinität (bijektive affin lineare Abbildung), die jeden Punkt einer speziellen Geraden g auf sich abbildet.

(a) Geben Sie eine (möglichst) einfache Darstellung der Form

$$\alpha : x \mapsto y = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \cdot x + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$$

durch Auswahl eines geeigneten Koordinatensystems an (x, y Koordinatenvektoren der Punkte X und $\alpha(X)$).

(b) Zeigen Sie, dass die Verbindungsgeraden $X\alpha(X)$ entsprechender, aber verschiedener Punkte parallel sind.

Aufgabe LA37:

In der euklidischen Ebene E sei der Punkt P mit kartesischen Koordinaten (p,q) und die Gerade g' durch die Gleichung $ax + by + c = 0$ mit $(a,b) \neq (0,0)$ gegeben; sei ferner $d \in \mathbb{R}$ mit $d \geq 0$. Gesucht sind Parallelen g zur Geraden g', von denen P den (nicht orientierten) Abstand d hat.
Bestimmen Sie deren Gleichungen.

Aufgabe LA38:

Sei (V, φ) ein endlich-dimensionaler euklidischer Vektorraum und f eine (lineare) Isometrie von (V, φ) auf sich. Zeigen Sie: Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten stehen senkrecht aufeinander.
Lösung siehe Seite: 37.

Aufgabe LA39:

Sei V ein n-dimensionaler $\mathbb{R}$-Vektorraum und φ ein Skalarprodukt auf V. Zeigen Sie:

(a) Jeder orthogonale Endomorphismus f von V ist bijektiv.

(b) Ist f orthogonal und U ein f-invarianter Unterraum von V, so ist auch $U^\perp := \{v \in V | \varphi(v,u) = 0 \text{ für alle } u \in U\}$ ein f-invarianter Unterraum und es gilt $V = U \oplus U^\perp$.

Hinweis: Es gilt $\dim U + \dim U^\perp = n$.

Aufgabe LA40:

Sei V ein n-dimensionaler Vektorraum über dem Körper K und U ein Unterraum der Dimension k mit $1 \leq k \leq n$. Zeigen Sie: Es gibt Endormorphismen φ, ψ von V mit $\varphi(V) = U$, $(\psi \circ \varphi)(V) = \{0\}$ und $\operatorname{rg} \psi = n - k$. Ist dabei notwendigerweise $\operatorname{Kern} \psi = U$?

Aufgabe LA41:

Sei V ein endlich-dimensionaler euklidischer Vektorraum, U ein Unterraum von V und $U^\perp$ das (eindeutig bestimmte) orthogonale Komplement von U.

(a) Die lineare Abbildung $p_U : V \to V$ mit $p_U(u+w) = u$ für $u \in U$, $w \in U^\perp$ heißt Orthogonalprojektion von V auf U. Zeigen Sie: Für alle $x, y \in V$ gilt

$$p_U(x) \cdot y = x \cdot p_U(y).$$

(b) Zeigen Sie: Ist $p : V \to V$ eine lineare Abbildung mit $p(V) = U$ und $p(x) \cdot y = x \cdot p(y)$ für alle $x, y \in V$, so ist $\operatorname{Kern} p = U^\perp$.

Aufgabe LA42:

Sei $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ eine lineare Abbildung, die bezüglich der kanonischen Basis die Darstellung

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a_1 & b_1 \\ 0 & 1 & a_2 & b_2 \\ 0 & 1 & a_3 & b_3 \\ 1 & 0 & a_4 & b_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \quad \text{mit } a_i, b_i \in \mathbb{R}$$

hat und für die gilt

$$\text{Bild } f = \text{Kern } f. \qquad (ast)$$

(a) Geben Sie eine Basis von Bild f an!

(b) Benutzen Sie (*) und (1) zur Bestimmung von

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{pmatrix} \text{ und } \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{pmatrix}.$$

(c) Gehen Sie auf die Frage der Existenz und Eindeutigkeit von f ein!

Aufgabe LA43:

Sei (V,φ) ein endlich-dimensionaler euklidischer Vektorraum. Zu jedem Element $v \in V$ wird durch

$$L_v : V \to \mathbb{R} \text{ mit } L_v(w) := \varphi(v,w) \text{ für alle } w \in V$$

eine Linearform L_v auf V^*, dem Dualraum von V definiert. Zeigen Sie: Die Abbildung $\alpha : V \to V^*$ mit $v \mapsto L_v$ ist ein Isomorphismus.
Hinweis: Sie dürfen ohne Beweis die Aussage $\dim V = \dim V^*$ verwenden.

Aufgabe LA44:

In der reellen euklidischen Ebene $\mathcal{E}$ seien φ_1 und φ_2 zwei Geradenspiegelungen mit sich schneidenden, aber verschiedenen Achsen.

(a) Wählen Sie einen Nullpunkt und eine kartesische Basis $\mathcal{B}$ des $\mathcal{E}$ zugrunde liegenden Vektorraums so aus, dass die darstellende Matrix von φ_1 eine besonders einfache Darstellung hat. Wie sieht dann die darstellende Matrix von φ_2 aus?

(b) Unter welcher Bedingung gilt $\varphi_1 \circ \varphi_2 = \varphi_2 \circ \varphi_1$?

(Sie dürfen ohne Beweis benutzen, dass Geradenspiegelungen Bewegungen sind und als solche affin-lineare und orthogonale Abbildungen.)

(c) Lässt sich das Ergebnis zu (b) auch ohne Rückgriff auf die Matrixdarstellung gewinnen?

(Hierbei dürfen Sie Sätze über Drehungen unbewiesen benutzen.)

Aufgabe LA45:

Sei V ein endlich-dimensionaler Vektorraum und $0 \neq f \in End(V)$ mit $f^n = 0$ für ein $n \in \mathbb{N}$. Sei W der Eigenraum zum Eigenwert 0. Zeigen Sie: Ist $V = U \oplus W$, so ist U nicht f-invariant.
Hinweis: Betrachten Sie die Einschränkung von f auf U!

Aufgabe LA46:

Bestimmen Sie die Determinante der Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mit

$$\begin{pmatrix} r & \lambda & \dots & \lambda \\ \lambda & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \lambda \\ \lambda & \dots & \lambda & r \end{pmatrix}.$$

Aufgabe LA47:

Sei $f \in \mathrm{Hom}_K(V,W)$, $\dim_K V = n$ und $\dim_K W = m$. Zeigen Sie:

$$\mathrm{rg}\, f \leq 1 \iff \exists \alpha_i, \beta_j \in K : M(f) = (\alpha_i \beta_j)_{i=1,\dots,m,\, j=1,\dots,n}.$$

Aufgabe LA48:

Sei V ein K-Vektorraum und U,W Unterräume von V mit $V = U \oplus W$. Zeigen Sie: Ist $\{w_1,\ldots,w_m\}$ eine Basis von W, so ist $\{w_1+U,\ldots,w_m+U\}$ eine Basis von V/U.

Aufgabe LA49:

Für $a \in \mathbb{R}$ sei $e_a(x) := e^{ax}$. Zeigen Sie, dass die Menge $\{e_a | a \in \mathbb{R}\}$ in $\mathrm{Abb}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ linear unabhängig ist. Was folgt daraus für die Dimension von $\mathrm{Abb}(\mathbb{R},\mathbb{R})$?

Aufgabe LA50:

Sei V ein endlich-dimensionaler $\mathbb{C}$-Vektorraum; weiter sei φ eine hermitesche Form auf V mit $\varphi(x,x) \neq 0$ für alle $x \in V \setminus \{0\}$. Sei schließlich $f \in \mathrm{End}(V)$ unitär bzgl. φ, d.h. es gelte

$$\varphi(f(x), f(y)) = \varphi(x,y) \text{ für alle } x,y \in V.$$

Zeigen Sie:

(a) f ist bijektiv.

(b) Ist U ein f-invarianter Unterraum, so ist

$$U^{\perp} = \{v \in V | \varphi(v,u) = 0 \text{ für alle } u \in U\}$$

ein f-invarianter Unterraum mit $U \cap U^{\perp} = \{0\}$.

Aufgabe LA51:

Seien V ein Vektorraum über dem Körper K und f_1, f_2 Endomorphismen von V (d.h. lineare Abbildungen von V in sich) mit

(i) $f_1 \circ f_1 = f_1$, $f_2 \circ f_2 = f_2$

(ii) $f_1 + f_2 = \mathrm{id}_V$

(iii) $f_1 \circ f_2 = 0 = f_2 \circ f_1$.

Zeigen Sie: $V = f_1(V) \oplus f_2(V)$.
Lösung siehe Seite: 37.

Aufgabe LA52:

Gibt es ein Skalarprodukt auf dem $\mathbb{R}$-Vektorraum $\mathbb{R}^2$ derart, dass

$$(1,0) \perp_g (0,1) \text{ und } (2,-3) \perp_g (-1,1)$$

gilt? ($\perp_g$ bezeichnet dabei die durch g induzierte Orthogonalitätsrelation auf $\mathbb{R}^2$.)
Lösungshinweis: Bestimmen Sie eine symmetrische Bilinearform g der geforderten Eigenschaften und prüfen Sie, ob g Skalarprodukt ist.
Lösung siehe Seite: 37.

Aufgabe LA53:

Eine lineare Abbildung f der reellen euklidischen Ebene in sich habe bzgl. der kanonischen Basis die darstellende Matrix

$$A = \begin{pmatrix} -\cos\varphi & -\sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$$

mit $\varphi \in (0, 2\pi)$. Zeigen Sie, dass f eine Geradenspiegelung ist.

Aufgabe LA54:

Sei ψ ein Skalarprodukt auf dem $\mathbb{R}$-Vektorraum $\mathbb{R}^n$ und M eine reelle $n \times n$-Matrix. Geben Sie eine notwendige und hinreichende Bedingung dafür an, dass die lineare Abbildung $m : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ mit $m(v) = M \cdot v^T$ das Skalarprodukt ψ erhält, dass also $\psi(m(u), m(v)) = \psi(u, v)$ für alle $u, v \in \mathbb{R}^n$ gilt.
Hinweis: Beachten Sie, dass ψ nicht notwendig das kanonische Skalarprodukt von $\mathbb{R}^n$ ist.

Aufgabe LA55:

Seien $\mathcal{E}$ die euklidische Ebene, 0 der Ursprung in $\mathcal{E}$ und g eine Gerade mit der Ortsvektorgleichung

$$x = p + \lambda v, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

(a) Zeigen Sie: Der Fußpunkt D des Lots von 0 auf g hat den Ortsvektor

$$d = p - \frac{v \cdot p}{v^2} v.$$

(b) Berechnen Sie die Länge von d.

(c) Existiert auch ein Fußpunkt eines Lots von 0 auf g, wenn g eine Gerade des 3-dimensionalen euklidischen Raums ist?

Aufgabe LA56:

Sei $A \in \mathbb{C}^{(n,n)}$, d.h. sei A eine komplexwertige $n \times n$-Matrix, und gelte $A^k = 0$ für ein $k \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass dann auch $A^n = 0$ gilt.
Hinweis: Zeigen Sie, dass A nur 0 als Eigenwert hat, und wenden Sie den Satz von Cayley-Hamilton an.

Aufgabe LA57:

Gegeben seien zwei windschiefe Geraden

$$g_1 : \vec{x} = \vec{a} + \lambda \vec{v}, \quad g_2 : \vec{y} = \vec{b} + \mu \vec{w} \text{ mit } \vec{a}, \vec{b}, \vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^3, \vec{v}, \vec{w} \neq \vec{0}, \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

(a) Zeigen Sie, dass sich durch die Geraden zwei Ebenen legen lassen, die zueinander parallel sind.

(b) Welchen Abstand haben die beiden Ebenen voneinander?

Lösung siehe Seite: 38.

Aufgabe LA58:

Beweisen Sie: Zwei Geraden

$$g_1 : \vec{x} = \vec{a} + \lambda\vec{v},\ g_2 : \vec{y} = \vec{b} + \mu\vec{w} \text{ mit } \vec{a},\vec{b},\vec{v},\vec{w} \in \mathbb{R}^3, \vec{v},\vec{w} \neq 0, \lambda,\mu \in \mathbb{R}$$

sind genau dann windschief, wenn $\langle \vec{a} - \vec{b}, \vec{v} \times \vec{w} \rangle \neq 0$.
Hinweis: Es gilt:

$$\vec{v} \times \vec{w} = 0 \Longleftrightarrow \vec{v},\vec{w} \text{ linear abhängig.}$$

Sind $\vec{v},\vec{w}$ linear unabhängig, so steht $\vec{v} \times \vec{w}$ senkrecht auf $\vec{v}$ und auf $\vec{w}$.
Lösung siehe Seite: 38.

Aufgabe LA59:

Zwei Geraden seien durch die Parameterdarstellungen

$$\vec{x} = \vec{p}_i + \lambda\vec{v}_i \quad (\vec{v}_i \neq \vec{0}, i = 1,2).$$

gegeben. Beweisen Sie (ohne Benutzung der Anschauung), dass die Geraden dann und nur dann gleich sind, wenn die beiden folgenden Bedingungen erfüllt sind:

(a) $\vec{p}_1 - \vec{p}_2$ und $\vec{v}_1$ sind linear abhängig.

(b) $\vec{v}_1$ und $\vec{v}_2$ sind linear abhängig.

Lösung siehe Seite: 39.

Aufgabe LA60:

Bestimmen Sie den Abstand der beiden Ebenen im $\mathbb{R}^3$ voneinander, die dargestellt werden durch die Gleichungen

$$E_1 :\ x + y + z = 2, E_2 \qquad :\ x + y + z = 3.$$

Lösung siehe Seite: 39.

Aufgabe LA61:

Bestimmen Sie im euklidischen $\mathbb{R}^3$ das Spiegelbild S des Punktes $T = (-1,2,0)$ in Bezug auf die durch die Gleichung

$$x + 2y - z = -1$$

dargestellte Ebene E.
Lösung siehe Seite: 40.

Aufgabe LA62:

Im euklidischen $\mathbb{R}^3$ bestimme man die durch den Ursprung gehende Gerade g, die orthogonal zu der Ebene E verläuft, auf der die drei Punkte

$$P = (-1,0,0), \quad Q = (0,-1,0), \quad R = (0,0,-1)$$

liegen. Man bestimme den Schnittpunkt von g und E und den Spiegelpunkt des Ursprungs in Bezug auf E.
Lösung siehe Seite: 41.

Aufgabe LA63:

Sei E ein n-dimensionaler affiner Raum über dem Körper K und - nach Auszeichung eines Koordinatensystems - g die affine Abbildung von E mit

$$g(x) = Ax + b \text{ (mit } b \in K^n, A \in K^{(n,n)} \text{ fest und } x \in K^n).$$

(a) Zeigen Sie: Die Menge $\mathrm{Fix}\, g$ der Fixpunkte von g bildet einen affinen Unterraum von E.

(b) Zeigen Sie: Ist 1 kein Eigenwert von A, so hat g genau einen Fixpunkt.

Lösung siehe Seite: 42.

Aufgabe LA64:

(a) Geben Sie jeweils ein Beispiel eines linearen reellen Gleichungssystems von 3 Gleichungen mit 3 Unbekannten folgenden Typs an:

(i) Die Lösungsmenge sei leer.
(ii) Die Lösungsmenge bestehe aus genau einem Punkt des $\mathbb{R}^3$.
(iii) Die Lösungsmenge sei eine Gerade im $\mathbb{R}^3$.
(iv) Die Lösungsmenge sei eine Ebene im $\mathbb{R}^3$.
(v) Die Lösungsmenge sei der ganze $\mathbb{R}^3$.

(b) Kann es vorkommen, daß ein lineares Gleichungssystem von 2 Gleichungen mit 3 Unbekannten keine Lösung hat? Falls ja, geben Sie ein Beispiel an.

Lösung siehe Seite: 42.

Aufgabe LA65:

Im $\mathbb{R}^3$ seien 3 Ebenen gegeben:

$$\begin{aligned}
E_1 &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - 4y + 5z = 8\},\\
E_2 &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 3x + 7y - z = 3\},\\
E_3 &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid -x - 15y + 11z = \alpha\}.
\end{aligned}$$

Für jeden der beiden Fälle $\alpha = 13$ und $\alpha = 14$ bestimme man die Gestalt der Punktmenge $E_1 \cap E_2 \cap E_3$, man ermittele also, ob sie jeweils eine Ebene, eine Gerade, ein einzelner Punkt oder sogar leer ist.
Lösung siehe Seite: 43.

Aufgabe LA66:

Im euklidischen $\mathbb{R}^4$ sei ein Unterraum U definiert durch die Gleichungen

$$x_1 + x_3 = 0, \quad x_2 - x_4 = 0.$$

Bestimmen Sie $\dim U$ und geben Sie eine Orthonormalbasis von U an.
Lösung siehe Seite: 43.

Aufgabe LA67:

Im $\mathbb{R}^2$ seien vier Geraden der Reihe nach durch die Gleichungen

$$\begin{aligned} 2x_1 + 2x_2 + 3 &= 0 \\ 5x_1 - 3x_2 - 1 &= 0 \\ -x_1 + 4x_2 + 2 &= 0 \\ 2x_1 + 3x_2 - 4 &= 0 \end{aligned}$$

gegeben. Gibt es einen Punkt, der auf allen vier Geraden liegt?
Lösung siehe Seite: 44.

Aufgabe LA68:

Für welche Werte $\alpha \in \mathbb{R}$ ist das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} x + y + z &= 0 \\ -x + y + z &= 1 \\ 2y + 2z &= \alpha \end{aligned}$$

lösbar bzw. unlösbar? Im Fall der Lösbarkeit gebe man die Lösungsmenge im $\mathbb{R}^3$ an. Man interpretiere sie geometrisch.
Lösung siehe Seite: 44.

Aufgabe LA69:

π_2 sei die Menge aller Polynome, deren Grad höchstens 2 ist. Man bestimme die Mengen

$$\begin{aligned} L &:= \{p \mid p \in \pi_2, p(0) = 0, p'(1) = 1, p(2) = 2\} \text{ und} \\ M &:= \{p \mid p \in \pi_2, p(0) = 0, p'(1) = 1, p(2) = 3\}. \end{aligned}$$

Wieviele Elemente enthält L, wieviele enthält M?
Hinweis: Man versuche im Ansatz $p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$ die Koeffizienten a_0, a_1, a_2 aus den jeweils angegebenen Bedingungen zu berechnen.
Lösung siehe Seite: 44.

Aufgabe LA70:

Seien $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ paarweise verschiedene Elemente im Körper K. Zeigen Sie: Die Vektoren $x_i := (1, \lambda_i, \lambda_i^2, \ldots, \lambda_i^{n-1})$, $(i = 1, \ldots, n)$ sind linear unabhängig in K^n.
Lösung siehe Seite: 45.

Aufgabe LA71:

(a) In einem $\mathbb{R}$-Vektorraum W mit $\dim W \geq 2$ sei ein Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$ erklärt, und für zwei Vektoren $\vec{u}, \vec{v} \in W$ sei die Gram'sche Matrix G so definiert

$$G = \begin{pmatrix} \langle \vec{u}, \vec{u} \rangle & \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle \\ \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle & \langle \vec{v}, \vec{v} \rangle \end{pmatrix}.$$

Zeigen Sie: Es ist $\det G \neq 0$ genau dann, wenn die zwei Vektoren $\vec{u}$ und $\vec{v}$ linear unabhängig sind.

(b) In einem $\mathbb{R}$-Vektorraum W mit $\dim W \geq 3$ sei ein Skalarprodukt $\langle\cdot,\cdot\rangle$ erklärt, und in W seien zwei nichtparallele Geraden

$$g = \{\vec{a} + s\vec{u} | s \in \mathbb{R}\}, \quad h = \{\vec{b} + t\vec{v} | t \in \mathbb{R}\}$$

ohne gemeinsamen Punkt gegeben. Hierbei sind $\vec{a}, \vec{b}, \vec{u}, \vec{v} \in W$, $\vec{u} \neq \vec{0}, \vec{v} \neq \vec{0}$.

Zeigen Sie: Es gibt eine Gerade in W, die beide Geraden g und h schneidet und zu beiden orthogonal verläuft. Nutzen Sie zum Beweis das in Teil (a) Gezeigte.

Lösung siehe Seite: 45.

Aufgabe LA72:

Sei V ein reeller Vektorraum mit Skalarprodukt $\langle\cdot,\cdot\rangle$. Zeigen Sie

(a) Paarweise orthogonale Vektoren $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n$, die ungleich dem Nullvektor sind, sind linear unabhängig.

(b) Genau dann gilt $|\langle\vec{v}_1, \vec{v}_2\rangle|^2 = \langle\vec{v}_1, \vec{v}_1\rangle \cdot \langle\vec{v}_2, \vec{v}_2\rangle$, wenn $\vec{v}_1$ und $\vec{v}_2$ linear abhängig sind.

Hinweis: Sie dürfen ohne Beweis verwenden, daß $\vec{v}_1, \vec{v}_2 \in V$ genau dann linear abhängig sind, falls $\vec{0} \in \{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$ oder $|\cos\sphericalangle(\vec{v}_1, \vec{v}_2)| = 1$.
Lösung siehe Seite: 46.

Aufgabe LA73:

Seien K ein Körper, $n \in \mathbb{N}$, $V = K^n$ und U_1 bzw. U_2 Unterräume von V mit

$$U_1 = \{(a, a, \ldots, a) \in V \mid a \in K\},$$
$$U_2 = \{(a_1, a_2, \ldots, a_n) \in V \mid a_i \in K, \sum_{i=1}^{n} a_i = 0\}.$$

Bestimmen Sie $\dim_K(U_1), \dim_K(U_2), \dim_K(U_1 \cap U_2)$ sowie $\dim_K(U_1 + U_2)$.
Hinweis: Beachten Sie, daß die Antworten von der Charakteristik des Körpers abhängen.
Lösung siehe Seite: 47.

Aufgabe LA74:

Zeigen Sie ohne Verwendung von Dimensionssätzen, dass für K-Vektorräume V und W gilt:

$$V \cong W \Longrightarrow \dim V = \dim W.$$

Lösung siehe Seite: 47.

Aufgabe LA75:

Zeigen Sie, daß der Körper $\mathbb{C}$ der komplexen Zahlen über jedem der Körper $\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}$ ein Vektorraum ist (mit '+' und '$\odot$' wie üblich). Welche Dimension hat dieser Vektorraum jeweils? Begründen Sie ihre Antwort.
Lösung siehe Seite: 48.

Aufgabe LA76:

Sei $B = (b_1, b_2, b_3)$ eine Basis des K-Vektorraums V, $C = (c_1, c_2)$ eine Basis des K-Vektorraums W und $f \in Hom_K(V,W)$ mit

$$\begin{aligned} f(b_1 + b_2) &= c_1 \\ f(b_1 - b_2 + 2b_3) &= c_2 \\ f(2b_2 - b_3) &= c_1 + c_2 \end{aligned}$$

Bestimmen Sie $M_C^B(f)$.
Lösung siehe Seite: 48.

Aufgabe LA77:

Geben Sie im euklidischen $\mathbb{R}^2$ mit der kanonischen Basis und mit kanonischer Bezeichnung der Koordinatenachsen als x-Achse und y-Achse die Matrizen folgender linearer Abbildungen an:

(a) Spiegelung an der x-Achse,

(b) Spiegelung an der Geraden $y = x$,

(c) Orthogonalprojektion auf die y-Achse,

(d) Drehung um den Koordinatenursprung im mathematisch positiven Sinn mit dem Drehwinkel α,

Lösung siehe Seite: 49.

Aufgabe LA78:

Sei $f \in Hom_K(V,V)$. Zeigen Sie: Gilt für alle $v \in V$ die Gleichung $f(v) \in < v >$, so existiert ein $\lambda \in K$ mit $f = \lambda \cdot id_v$. Bestimmen Sie ferner im endlichdimensionalen Fall $M_B^B(f)$ für eine Basis B von V.
Lösung siehe Seite: 49.

Aufgabe LA79:

Sind folgende Matrizen aus $\mathbb{R}^{(3,3)}$ zu einer Diagonalmatrix ähnlich ?

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 3 & 4 & -1 \\ -3 & -1 & 4 \end{pmatrix} \text{ und } B = \begin{pmatrix} -3 & 5 & 0 \\ 0 & -3 & 5 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

Wenn ja, zu welcher? Bestimmen Sie gegebenfalls auch eine zugehörige Eigenbasis.
Lösung siehe Seite: 50.

Aufgabe LA80:

Geben Sie die Menge M aller 3×3-Matrizen an, die die Eigenwerte 1, 2 und 3 haben.
Lösung siehe Seite: 51.

Aufgabe LA81:

Sei A die folgende reelle 3×3-Matrix:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie die Eigenwerte und Eigenräume von A. Ist A zu einer Diagonalmatrix ähnlich?
Lösung siehe Seite: 52.

Aufgabe LA82:

Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ eine lineare Abbildung mit $f^2 = id$.

(a) Bestimmen Sie $|\det f|$ und $\det(f - id) \cdot \det(f + id)$.

(b) Zeigen Sie: Ist λ ein Eigenwert von f, so gilt $\lambda = 1$ oder $\lambda = -1$.

(c) Geben Sie zu jedem möglichen f eine Matrix bezüglich einer Eigenbasis an. Welche drei Typen von Abbildungen kommen für f in Frage?

Lösung siehe Seite: 52.

Aufgabe LA83:

Sei $n \in \mathbb{N}$ und A eine nichtsinguläre $n \times n$-Matrix mit Einträgen aus K, wobei K einer der Körper $\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ ist. Beweisen Sie mit Hilfe des Satzes von Cayley und Hamilton die Aussage:
Es gibt (von A abhängende) Zahlen

$$b_0, b_1, \ldots, b_{n-1} \in K$$

mit denen

$$A^{-1} = b_0 + b_1 A^1 + \cdots + b_{n-1} A^{n-1}$$

ist.
Lösung siehe Seite: 53.

Aufgabe LA84:

Sei V ein $\mathbb{R}$-Vektorraum mit Skalarprodukt ψ und f ein Endomorphismus von V. f heißt selbstadjungiert, falls $\psi(f(v), w) = \psi(v, f(w))$ gilt für alle $v, w \in V$. Zeigen Sie:

(a) Ist f selbstadjungiert und sind v_1, v_2 Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten λ_1, λ_2, so folgt $v_1 \perp v_2$.

(b) Ist V endlichdimensional, B eine Orthonormalbasis und f selbstadjungiert, so gilt $M_B^B(f) = (M_B^B(f))^T$.

Lösung siehe Seite: 53.

Aufgabe LA86:

Zeigen Sie:

(a) Sei A eine reelle Matrix; faßt man A als Matrix über $\mathbb{C}$ auf, so gilt: Ist λ Eigenwert von A, so auch $\overline{\lambda}$.

(b) Ist A eine reelle symmetrische Matrix, so sind Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten von A orthogonal (bzgl. des kanonischen Skalarprodukts).

(c) Benutzen Sie (a) und (b) um zu zeigen, dass die Eigenwerte einer reellen symmetrischen Matrix (aufgefaßt als Matrix über $\mathbb{C}$) alle reell sind.

Lösung siehe Seite: 54.

Aufgabe LA87:

Untersuchen Sie, für welche Endomorphismen eines beliebigen K-Vektorraums V alle Vektoren $v \in V \setminus \{0\}$ Eigenvektoren sind.
Lösung siehe Seite: 55.

Aufgabe LA88:

Sei $V = \mathcal{C}[-1,1]$ der $\mathbb{R}$-Vektorraum der stetigen reellwertigen Funktionen auf dem Intervall $[-1,1]$. Bekanntlich ist dann auf V ein Skalarprodukt durch folgende Festsetzung definiert:

$$\langle f,g\rangle := \int_{-1}^{1} f(t)g(t)dt.$$

(a) Zeigen Sie, daß die Funktionen

$$P_0 := \frac{1}{2}\sqrt{2}id^0 \text{ und } P_1 := \frac{1}{2}\sqrt{6}id^1$$

(für $id^j : [-1,1] \to \mathbb{R}$ mit $x \mapsto x^j$) ein System orthonormierter Vektoren aus $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ bilden.

(b) Bestimmen Sie eine Orthonormalbasis des von id^0, id^1 und id^2 erzeugten Unterraums U von V.

Lösung siehe Seite: 55.

Aufgabe LA89:

Bestimmen Sie im $\mathbb{R}$-Vektorraum $\mathbb{R}^2$ ein Skalarprodukt $\langle\cdot,\cdot\rangle$ derart, daß gilt

$$\begin{aligned} \langle(1,0),(1,0)\rangle &= 1 \\ \langle(-1,1),(-1,1)\rangle &= 1 \\ \langle(1,0),(-1,1)\rangle &= 0. \end{aligned}$$

Hinweis: Bestimmen Sie zunächst die Fundamentalmatrix der betreffenden symmetrischen Bilinearform.
Lösung siehe Seite: 56.

Aufgabe LA90:

(a) Beweisen Sie, dass für beliebige komplexe Zahlen $a, b \in \mathbb{C}$ die Parallelogrammgleichung
$$|a+b|^2 + |a-b|^2 = 2(|a|^2 + |b|^2)$$
gilt.

(b) V sei ein normierter Vektorraum über $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$, dessen Norm über ein Skalarprodukt definiert sei. Beweisen Sie, daß für $a, b \in V$ die Parallelogrammgleichung
$$||a+b||^2 + ||a-b||^2 = 2(||a||^2 + ||b||^2)$$
gilt.

(c) Warum heißen diese Gleichungen 'Parallelogrammgleichungen'? Man interpretiere sie elementargeometrisch mit Hilfe einer Skizze.

Lösung siehe Seite: 57.

Aufgabe LA91:

(a) In der Gruppe S_5 der Permutationen der Elemente der Menge $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ berechne man
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & 5 & 4 \end{pmatrix}^{1202}.$$

(b) Berechnen Sie die Permutation
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 7 & 5 & 1 & 2 & 4 & 3 & 6 \end{pmatrix}^{1111}.$$

Lösung siehe Seite: 58.

Aufgabe LA92:

Bekanntlich sind die Zahlen e und π irrational. Zeigen Sie, daß wenigstens eine der beiden Zahlen $\pi + e$ und $\pi - e$ irrational ist. Sie brauchen nicht zu ermitteln welche.
Lösung siehe Seite: 59.

Aufgabe LA93:

Sei V ein endlich-dimensionaler K-Vektorraum, μ eine Linearform auf V, $H := Kern\ \mu$ und $\vec{a} \in H \setminus \{0\}$. Weiter sei $\tau : V \to V$ definiert durch $\tau(\vec{v}) := \vec{v} - \mu(\vec{v}) \cdot \vec{a}$. Zeigen Sie:

(a) τ ist ein Automorphismus von V.

(b) $\tau|_H = \mathrm{id}$.

(c) τ hat außerhalb von H keinen Fixpunkt.

Lösung siehe Seite: 59.

Aufgabe LA94:

Untersuchen Sie die lineare Gleichung $M \cdot \vec{x} = 0$ für $M := (a_i b_j)_{i,j=1,\dots,n}$ und $a_i b_j \in \mathbb{R}$.
Lösung siehe Seite: 59.

Aufgabe LA95:

Sei A die folgende reelle 3×3-Matrix:

$$A = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{3}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} .$$

Berechnen Sie eine Orthonormalbasis aus Eigenvektoren von A und geben Sie eine orthogonale Matrix S an, so daß $S^T AS$ eine Diagonalmatrix ist.
Lösung siehe Seite: 60.

Aufgabe LA96:

Geben Sie fünf Vektoren des $\mathbb{R}^4$ an, von denen je vier linear unabhängig sind.
Lösung siehe Seite: 62.

Aufgabe LA98:

Sei V ein 2–dim Vektorraum über einem Körper K mit $\operatorname{char} K \neq 2$, und sei $f : V \longrightarrow V$ ein Endomorphismus. Zeigen Sie: Hat f die Eigenwerte $\lambda_1 = 1$ und $\lambda_2 = -1$, so gilt

$$f^2 = \mathrm{id}_V .$$

Lösung siehe Seite: 62.

Aufgabe LA99:

Sei W der Unterraum von $\mathbb{R}^4$, der von

$$u = (1, 0, -1, 2) \text{ und } v = (2, 0, 2, -1)$$

aufgespannt wird; sei ferner $W^\perp$ der Orthogonalraum von W in $\mathbb{R}^4$ (bzgl. des kanonischen Skalarprodukts).

(a) Welche Dimension hat $W^\perp$?

(b) Geben Sie eine Basis B von $W^\perp$ an!

(c) Falls B keine Orthonormalbasis ist, geben Sie auch eine Orthonormalbasis von $W^\perp$ an!

Lösung siehe Seite: 62.

Aufgabe LA100:

Sei A ein affiner Unterraum von $\mathbb{R}^n$ mit $\dim A < n$ und $p \in \mathbb{R}^n \setminus A$. Die Menge der Elemente der Verbindungsgeraden

$$\{x \mid x = p + t(q - p), t \in \mathbb{R}, q \in A\}$$

von p zu den Vektoren q von A heiße W.

(a) Ist W stets Unterraum?

(b) Ist W stets affiner Unterraum (Lineare Mannigfaltigkeit)?

Lösungen

Lösungskizze zu Aufgabe LA1:

(a) Zweipunkteform für Geraden durch Punkte A und B mit Ortsvektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ lautet: $g : \vec{x} = \vec{a} + \lambda(\vec{b} - \vec{a}), \lambda \in \mathbb{R}$.

Also $g : \vec{x_g} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $h : \vec{x_h} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

(b) Windschief heißt: liegen nicht in einer Ebene, also ist zu zeigen

(a) g und h sind nicht parallel, d.h. die Richtungsvektoren sind linear unabhängig, und

(b) g und h schneiden sich auch nicht, d.h. die Gleichung $\vec{x_g} = \vec{x_h}$ hat keine Lösung.

(c) Der kürzeste Abstand zwischen g und h wird zwischen den Fußpunkten des gemeinsamen Lotes angenommen. Ein Richtungsvektor des gemeinsamen Lotes ist das Vektorprodukt (Kreuzprodukt) der Richtungsvektoren der beiden Geraden: $\vec{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$. Gesucht sind also λ, μ und ν, so dass

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\vec{f_g}} + \nu \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\vec{f_h}}$$

Man errechnet $\lambda = 0, \mu = 1, \nu = -1$, also $F_g = (1,0,0), F_h = (1,-1,1)$, und der Abstand zwischen den beiden Geraden ist gleich der Länge des Vektors $-\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, also $\sqrt{2}$.

Lösungskizze zu Aufgabe LA2:

Zu $b \in B$ und $c \in C$ definiert man $\hat{f}_{b,c} : B \to W$ durch

$$\hat{f}_{b,c}(b') = \begin{cases} 0 & \text{, für } b' \neq b \\ c & \text{, für } b' = b \end{cases}$$

Zu jedem $\hat{f}_{b,c}$ existiert die lineare Fortsetzung $f_{b,c} : V \to W$.
Dann ist $F = \{ f_{b,c} : b \in B, c \in C \}$ eine Basis von $\mathrm{Hom}_K(V,W)$.

Lösungskizze zu Aufgabe LA3:

(a) Zeige: $(\mathcal{C},+)$ ist abelsche Gruppe (d.h. $\mathcal{C} \neq \emptyset$, $+ : \mathcal{C} \times \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ ist Abbildung; Existenz der Null; Existenz der Inversen; Assoziativität; Kommutativität), $(\mathcal{C} \setminus \{0\}, \cdot)$

ist abelsche Gruppe und die Distributivgesetze gelten. (Multiplikatives Inverses: $\begin{pmatrix} \frac{a}{a^2+b^2} & -\frac{b}{a^2+b^2} \\ \frac{b}{a^2+b^2} & \frac{a}{a^2+b^2} \end{pmatrix}$; die Rechenregeln folgen –bis auf multiplikatives Inverses– aus $\mathcal{C} \subseteq \mathbb{R}^{(2,2)}$)

(b) $\mathcal{C}$ ist isomorph zum Körper $\mathbb{C}$ der komplexen Zahlen. Ein Isomorphismus ist ϕ : $\mathcal{C} \to \mathbb{C}$ mit $\phi\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} = a + bi$. Zu zeigen ist,

  (i) dass ϕ Homomorphismus ist, also mit $+$ und $\cdot$ verträglich ist: $\phi(A+B) = \phi(A) + \phi(B)$ und $\phi(A \cdot B) = \phi(A) \cdot \phi(B)$

  (ii) und dass ϕ bijektiv ist, also injektiv und surjektiv.

Lösungskizze zu Aufgabe LA4:

(a) $v \in \operatorname{Bild} p \Longrightarrow \exists w : p(w) = v$. Also ist $p(v) = p^2(w) = p(w) = v$

(b) $p(v - p(v)) = p(v) - p^2(v) = 0$

(c) $\supseteq$ klar

$\subseteq$ $v \in V \Longrightarrow v = \underbrace{v - p(v)}_{\in \operatorname{Kern} p} + \underbrace{p(v)}_{\in \operatorname{Bild} p}$

$\oplus$ $\operatorname{Kern} p \cap \operatorname{Bild} p = \{0\}$: Sei $v \in \operatorname{Kern} p \cap \operatorname{Bild} p$. Dann ist $p(v) = 0$ und $p(v) = v$, also $v = 0$

(d) $p(v) = p(u+w) = p(u) + p(w) = p(u) = u$

(e) $\subseteq$: $v \in \operatorname{Kern} p \Longrightarrow v = v - p(v) = (\mathrm{id} - p)(v) \Longrightarrow v \in \operatorname{Bild}(\mathrm{id} - p)$
$\supseteq$: $v \in \operatorname{Bild}(\mathrm{id} - p) \Longrightarrow \exists w : v = w - p(w) \Longrightarrow p(v) = p(w) - p^2(w) = 0 \Longrightarrow v \in \operatorname{Kern} p$

(f) Klar ist $\mathrm{id} - p$ ein Endomorphismus. Außerdem ist $(\mathrm{id} - p)^2(v) = (\mathrm{id} - p)(v - p(v)) = v - p(v) - p(v) + p^2(v) = (\mathrm{id} - p)(v)$, also $(\mathrm{id} - p)^2 = (\mathrm{id} - p)$

Lösungskizze zu Aufgabe LA5:

(a) Stimmt: Sei $\sum \lambda_i v_i = 0$, nicht alle λ_i gleich Null. Dann ist $\sum \lambda_i f(v_i) = 0$.

(b) Falsch: Sei z.B. f die Nullabbildung oder eine Projektion.

(c) Was ist f^{-1}? Falls f bijektiv ist, so existiert die Umkehrabbildung f^{-1} von f und ist linear. Dann gilt die Aussage nach 1. Ansonsten gibt es gar nicht $f^{-1}(w_i)$, sondern nur Unterräume $f^{-1}(\{w_i\})$ von V.

(d) Stimmt: $\hat{f} : V \to f(V)$ ist bijektive lineare Abbildung. Daher gilt nach 1.: $\{v_i\}$ lin. abh. $\Longrightarrow \{f(v_i)\}$ lin. abh. $\Longrightarrow \{\hat{f}^{-1}(f(v_i))\} = \{v_i\}$ lin. abhängig. Die zweite Implikation ist gerade die Kontraposition der Aussage, die wir zeigen wollten.

Lösungskizze zu Aufgabe LA6:

Sei $\lambda_1 c_1 + \lambda_2 c_2 + \mu_1 s_1 + \mu_2 s_2 + \mu_3 s_3 = 0$. Einsetzen von $x = 0$ und $x = \pi$ ergibt $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$. Einsetzen von $x = \pi/2$, von $x = \pi/4$ und $x = 3\pi/4$ ergibt, dass auch die $\mu_i = 0$ sind.

Lösungskizze zu Aufgabe LA7:

(a) Die Eigenwerte von A sind gerade die Nullstellen des charakteristischen Polynoms χ_A von A; daher folgt aus

$$\chi_A(\overline{\lambda}) = \sum a_i \overline{\lambda}^i = \sum \overline{a_i \lambda^i} = \overline{\chi_A(\lambda)} = \overline{0} = 0 (\text{ weil } a_i \in \mathbb{R}),$$

dass auch $\overline{\lambda}$ Eigenwert von A ist.

(b) Sei $A\vec{a} = \lambda\vec{a}$. Es ist $\lambda\langle\vec{a},\vec{a}\rangle = \langle A\vec{a},\vec{a}\rangle = \langle\vec{a},A^T\vec{a}\rangle = \langle\vec{a},\overline{A\vec{a}}\rangle = \overline{\lambda}\langle\vec{a},\vec{a}\rangle$. Weil $\langle\vec{a},\vec{a}\rangle \neq 0$ ist, ist $\lambda = \overline{\lambda}$.

(c) Sei $A\vec{a} = \lambda\vec{a}, A\vec{b} = \mu\vec{b}$. Es ist

$$\lambda\langle\vec{a},\vec{b}\rangle = \langle A\vec{a},\vec{b}\rangle = \langle\vec{a},\overline{A^T\vec{b}}\rangle = \langle\vec{a},A\vec{b}\rangle = \overline{\mu}\langle\vec{a},\vec{b}\rangle = \mu\langle\vec{a},\vec{b}\rangle.$$

Wegen $\lambda \neq \mu$ ist $\langle\vec{a},\vec{b}\rangle = 0$.

Lösungskizze zu Aufgabe LA8:

Zu zeigen ist immer: $\forall x,y \in G : x \cdot y = y \cdot x$.

(a) $x \cdot y \cdot x \cdot y = 1 \iff x \cdot x \cdot y \cdot x \cdot y \cdot y = xy \Longrightarrow y \cdot x = x \cdot y$

(b) $x \cdot y \cdot x \cdot y = x \cdot x \cdot y \cdot y \iff y \cdot x = x \cdot y$

(c) $y^{-1} \cdot x^{-1} \cdot y \cdot x = 1 \iff x^{-1} \cdot y \cdot x = y \iff y \cdot x = x \cdot y$

Lösungskizze zu Aufgabe LA9:

(a) Zu zeigen ist: $A(\lambda p + q) = \lambda A(p) + A(q)$ für alle $\lambda \in \mathbb{R}$ und alle $p,q \in \mathbb{R}[x]$.

(b) $p \in \mathrm{Kern} A \iff \forall x \in \mathbb{R} : A(p)(x) = 0 \iff \forall x \in \mathbb{R} : p(x+1) = p(x)$. Also gilt für $p \in \mathrm{Kern} A : p(0) = p(1) = p(2) = p(k) \forall k \in \mathbb{N}$. Ein Polynom n-ten Grades ist aber durch $n+1$ Funktionswerte eindeutig bestimmt, also muss p ein konstantes Polynom sein. Umgekehrt liegen die konstanten Polynome sicher im Kern von A.

Lösungskizze zu Aufgabe LA10:

Die durch A bestimmte lineare Abbildung ist genau dann bijektiv, wenn A vollen Rang hat, d.h. wenn $\det A \neq 0$ ist. Es ist $\det A = -3$ für $K = \mathbb{R}$ und $\det A = 0$ für $K = \mathbb{F}_3$.

Lösungskizze zu Aufgabe LA11:

Sei $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ Polynomfunktion der gegebenen Eigenschaften; dann können wir $f(x) = c_0+c_1x+c_2x^2+c_3x^3$ setzen. Wegen $(-1,4),(1,6)\in\{(x,f(x))|x\in\mathbb{R}\}$ erhalten wir

I. $c_0-c_1+c_2-c_3=4$

II. $c_0+c_1+c_2+c_3=6$

Es folgt aus I+II: $2c_0+2c_2=10$ bzw. II−I $2c_1+2c_3=2$ somit $c_2=5-c_0$ bzw. $c_3=1-c_1$.
Mit $a:=c_0$ und $b:=c_1$ folgt:

$$f(x)=a+bx+(5-a)x^2+(1-b)x^3 \text{ für } a,b\in\mathbb{R}. \qquad (*)$$

Sei umgekehrt f durch $(*)$ definiert; dann ist

$$\begin{aligned} f(1) &= \underline{a}+\underline{b}+5-\underline{a}+1-\underline{b}=6\\ f(-1) &= \underline{a}-\underline{b}+5-\underline{a}-1+\underline{b}=4. \end{aligned}$$

Also genau die Funktionen $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ mit

$$f(x)=a+bx+(5-a)x^2+(1-b)x^3 \quad \text{für} \quad a,b\in\mathbb{R}$$

haben die geforderten Eigenschaften. □

Lösungskizze zu Aufgabe LA12:

(a) Sei

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{r} a_iu_i = 0 \Longrightarrow 0 = \langle 0,u_j\rangle &= \langle \sum_{i=1}^{r} a_iu_i, u_j\rangle \\ &= \sum_{i=1}^{r} a_i\langle u_i,u_j\rangle = a_j \text{ (für alle } j=1,\dots,r). \end{aligned}$$

Daher ist U linear unabhängig.

(b) Sei $v\in V$. Für jedes $u_j\in U$ gilt

$$\begin{aligned} \langle w,u_j\rangle &= \langle v-\sum_{i=1}^{r}\rangle v,u_i\langle u_i,u_j\rangle \\ &= \langle v,u_j\rangle - \langle\sum_{i=1}^{r}\rangle v,u_i\langle u_i,u_j\rangle \\ &= \langle v,u_j\rangle - \sum_{i=1}^{r}\langle v,u_i\rangle\langle u_i,u_j\rangle \\ &= \langle v,u_j\rangle - \langle v,u_i\rangle \\ &= \langle v,u_j\rangle - \langle v,u_j\rangle = 0 \quad (\text{da } \langle u_i,u_j\rangle \neq 0 \text{ nur für } i=j \text{ gilt.}) \end{aligned}$$

Also ist der Vektor w orthogonal zu u_j $(j=1,\dots,r)$. □

Lösungsskizze zu Aufgabe LA13:

Der Vektorraum $\mathbb{R}[x]$ der Polynome über den reellen Zahlen (oder allgemeiner über jedem Körper) ist ein unendlich dimensionaler Vektorraum, denn die Monome $\{x^n : n \in \mathbb{N}\}$ sind linear unabhängig. Beweise induktiv, dass $\lambda_i = 0$ für $i = 1 \dots n$: $\sum_{k=0}^{n} \lambda_k x^k = 0 \Longrightarrow \lambda_0 = 0$ und $x \sum_{k=1}^{n} \lambda_k x^{k-1} = 0$ usw. Beachte: Nach Definition der linearen Unabhängigkeit brauchen wir nur endliche Summen zu betrachten.

Lösungsskizze zu Aufgabe LA14:

(a) B hat die Form $(b_{ij})_{i,j \in \{1,2\}}$. $K^{(2,2)}$ ist ein vierdimensionaler Vektorraum über K. Eine praktische Basis ist

$$C = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Auf dieser Basis sieht f so aus:

$$f(c_1) = \begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, f(c_2) = \begin{pmatrix} b_{12} \\ b_{22} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, f(c_3) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ b_{11} \\ b_{21} \end{pmatrix}, f(c_4) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ b_{12} \\ b_{22} \end{pmatrix}$$

So erhält man als Matrix von f bezüglich der Basis C

$$M_C^C(f) = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & 0 & 0 \\ b_{21} & b_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b_{11} & b_{12} \\ 0 & 0 & b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$$

(b) Hat man die Matrix in dieser Form erhalten (das liegt an der günstigen Basis), so kann man den „Kästchensatz“ anwenden und die Determinante blockweise berechnen. Ansonsten lässt sich eine Matrix mit so vielen Null-Einträgen auch leicht entwickeln.

Lösungsskizze zu Aufgabe LA15:

(a) Sei $\sum_{i=0}^{k-1} \lambda_i T^i(z) = 0$. Zu zeigen ist $\lambda_i = 0$ für alle i. Es ist

$$0 = T^{k-1}(0) = T^{k-1}\left(\sum_{i=0}^{k-1} \lambda_i T^i(z)\right) = \sum_{i=0}^{k-1} \lambda_i T^{k-1+i}(z) = \lambda_0 T^{k-1}(z) \Longrightarrow \lambda_0 = 0$$

Betrachte dann

$$0 = T^{k-2}(0) = \lambda_1 T^{k-2}(z) \Longrightarrow \lambda_1 = 0$$

So erhält man sukzessive auch $\lambda_2 = 0$, $\lambda_3 = 0$ usw., also ist B linear unabhängig.

(b) Zu zeigen ist: $x \in U \Longrightarrow T(x) \in U$. Sei also $x = \sum_{i=0}^{k-1} \lambda_i T^i(z)$. Dann ist

$$T(x) = \sum_{i=0}^{k-1} \lambda_i T^{i+1}(z) = \sum_{i=0}^{k-2} \lambda_i T^{i+1}(z) \in U.$$

(c) B ist Basis von U. Sei C eine Basis von V mit $B \subseteq C$ (Basisergänzungssatz). Sei $b_i = T^i(z)$, also $B = \{b_0, \dots, b_{k-1}\}$. Es gilt $T(b_i) = b_{i+1}$, $b_k = 0$, $\forall c \in C : T(c) = 0$. Das bedeutet aber, dass die Matrix von T bezüglich C so aussieht:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

Lösungskizze zu Aufgabe LA16:

Die Vektoren sind genau dann linear unabhängig, wenn die Determinante

$$\begin{vmatrix} r & 1 & 1 \\ 1 & r & 1 \\ 1 & 1 & r \end{vmatrix} = r^3 - 3r + 2 \neq 0$$

Nach „Raten“ der Nullstelle 1 (ist das wirklich geraten?) errechnet man leicht $r^3 - 3r + 2 = (r-1)^2(r+2)$. Erlaubt sind also alle $r \in \mathbb{R} \setminus \{1, -2\}$.

Lösungskizze zu Aufgabe LA17:

(a) Da $|B_1| = |B_2| = 3 = \dim V$ ist, müssen wir nur zeigen, dass die drei Vektoren aus B_2 linear unabhängig sind. Z.B. kann man ausrechnen, dass die Determinante

$$\begin{vmatrix} -1 & 1 & -1 \\ -4 & 3 & -2 \\ 2 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$$

(b) Es ist $\vec{x} = \vec{a} + \vec{b} - \vec{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}_{B_1}$. Wir berechnen einfach

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}_{B_2} = \vec{u} + \vec{v} - \vec{w} = \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix}_{B_1} + \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}_{B_1} + \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}_{B_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}_{B_1}$$

Lösungskizze zu Aufgabe LA18:

(a) A spannt U nach Definition auf. Zu zeigen ist nur, dass A linear unabhängug ist.

$$\lambda_1 \vec{a}_1 + \lambda_2 \vec{a}_2 + \lambda_3 \vec{a}_3 = \begin{pmatrix} 2\lambda_1 \\ \lambda_2 - \lambda_1 \\ lambda_2 + \lambda_3 \\ \lambda_2 - \lambda_3 \end{pmatrix}_B = \vec{0} \Longrightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$$

(b)

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 6 \\ -5 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}_B = \begin{pmatrix} 2\lambda_1 \\ \lambda_2 - \lambda_1 \\ \lambda_2 + \lambda_3 \\ \lambda_2 - \lambda_3 \end{pmatrix}_B \Longrightarrow \lambda_1 = 3, \lambda_2 = -2, \lambda_3 = 2$$

So erhält man $\vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}_A$.

(c) Wegen $\dim V > \dim U$ können nicht alle Vektoren aus B in A sein. Z.B. ist $b_4 \notin A$. Daher ist $A \cup \{b_4\}$ Basis von V.

Lösungskizze zu Aufgabe LA19:

Sei $\dim V = n = \dim H + 1 = \dim H' + 1$.
$a \neq 0 \Longrightarrow \{a\}$ linear unabhängig. Deashalb gibt es eine Basis B von H mit $\{a\} \subseteq B \subseteq H$; weil $b \notin H$, ist $C = B \cup \{b\} = \{a = a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{n-1}, b\}$ eine Basis von V. Analog definieren wir eine Basis $C' = \{a' = a'_1, a'_2, a'_3, \ldots, a'_{n-1}, b'\}$ von V.
Nach dem Satz von der linearen Fortsetzung gibt es nun eine lineare Abbildung $\alpha : V \to V$ mit $\alpha(a_i) = a'_i$ und $\alpha(b) = b'$. Dass $\alpha(a) = a'$ und $\alpha(b) = b'$ ist, ist nach Konstruktion klar. Warum auch $\alpha(H) = H'$ gilt, sollten Sie noch genau aufschreiben.

Lösungskizze zu Aufgabe LA20:

(a) Sei $x \in U^\perp \cap W^\perp$, d.h. $\forall u \in U : \varphi(u,x) = 0$ und $\forall w \in W : \varphi(w,x) = 0$, also $\forall u \in U\ \forall w \in W : \varphi(u,x) + \varphi(w,x) = \varphi(u+w,x) = 0$. Das bedeutet aber $x \in (U+W)^\perp$ und somit $(U+W)^\perp \supseteq U^\perp \cap W^\perp$. Weil alles Äquivalenzumformungen waren, gilt sogar Gleichheit.

(b) Sei $x \in U^\perp + W^\perp$, d.h. $x = \tilde{u} + \tilde{w}$ mit $\tilde{u} \in U^\perp, \tilde{w} \in W^\perp$. Daher ist $\forall v \in U \cap W$: $\varphi(x,v) = \varphi(\tilde{u} + \tilde{w}, v) = \varphi(\tilde{u}, v) + \varphi(\tilde{w}, v) = 0$.

(c) Wir zeigen: $(U^\perp)^\perp \supseteq U$ und $\dim(U^\perp)^\perp = \dim U$.

- $u \in U \Longrightarrow \forall w \in U^\perp : \varphi(u,w) = 0 \Longrightarrow u \in (U^\perp)^\perp$.
- Wir konstruieren eine Abbildung auf V mit Kern $f = U^\perp$ und Bild $f = U$. Sei C eine Orthonormalbasis von U und $B \supseteq C$ eine Erweiterung zu einer Orthonormalbasis von V, so dass $\forall c \in C, b \in B \setminus C : \varphi(b,c) = 0$ ist. Die Projektion f von V auf U ist genau die Abbildung, die wir brauchen: Bild $f = U$ ist klar, weil $\forall u \in U : f(u) = u$, und Kern $f = \langle B \setminus C \rangle = U^\perp$. Nun wissen wir $\dim U^\perp = n - \dim U$ und genauso $\dim(U^\perp)^\perp = n - \dim U^\perp$, also

$$\dim(U^\perp)^\perp = n - \dim U^\perp = \dim U.$$

(d) Folgt aus dem ersten und dritten Aufgabenteil:

$$(U \cap W)^\perp = ((U^\perp)^\perp \cap (W^\perp)^\perp)^\perp = ((U^\perp + W^\perp)^\perp)^\perp = U^\perp + W^\perp$$

Lösungskizze zu Aufgabe LA21:

(a) Zwei K–Vektorräume sind genau dann isomorph, wenn sie die gleiche Dimension haben. Es gilt also

$$\dim V_1 + \dim V_2 = \dim(V_1 \oplus V_2) = \dim(W_1 \oplus W_2) = \dim W_1 + \dim W_2$$

Wegen $V_1 \cong W_1$ gilt $\dim V_1 = \dim W_1$, aus dem vorigen folgt nun $\dim V_2 = \dim W_2$ und daher $V_2 \cong W_2$.

(b) $V = \mathbb{R}^2$, $V_1 = W_1 = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \rangle$, $V_2 = \langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle$, $W_2 = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle$.

(c) Sei V der Vektorraum der reellen Polynome, V_1 der Unterraum der Polynome mit konstantem Glied 0, V_2 der Unterraum der konstanten Polynome, W_1 der Unterraum der Polynome ohne linearen Anteil und W_2 der Unterraum der linearen Polynome. Dann ist $V_1 \cong W_1 \cong \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, aber V_2 und W_2 sind nicht isomorph.

(d) Eine lineare Abbildung ist durch die Funktionswerte auf einer Basis eindeutig bestimmt. Sei B_1 Basis von V_1, B_2 Basis von V_2. Dann ist $B = B_1 \cup B_2$ Basis von $V_1 \oplus V_2$. Wir können also für $b \in B$ bestimmen, dass $f(b) = \begin{cases} f_1(b) & \text{falls } b \in B_1 \\ f_2(b) & \text{falls } b \in B_2 \end{cases}$ sein soll, und definieren damit einen eindeutigen Endomorphismus auf $V_1 \oplus V_2$. Andererseits müssen wir auch $f(b) = \begin{cases} f_1(b) & \text{falls } b \in B_1 \\ f_2(b) & \text{falls } b \in B_2 \end{cases}$ verlangen, wenn $f|_{V_i} = f_i$ $(i = 1,2)$ sein soll.

Lösungskizze zu Aufgabe LA22:

Da $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ eine Basis von $\mathbb{Q}^4$ ist, sichert der Satz von der linearen Fortsetzung Existenz und Eindeutigkeit von f.
Zur Rangbestimmung: Für $f \in \mathrm{Hom}_K(V,W)$, V und W endlichdimensional, gilt $\mathrm{rg}\, f = \mathrm{rg}\, M(f)$, wobei $M(f)$ eine Matrix von f (bezüglich beliebiger Basen von V und W) ist. Daher ist

$$\mathrm{rg}\, f = \mathrm{rg} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 6 \\ 0 & 3 & 1 & 5 \\ -2 & -1 & -1 & -3 \\ -2 & 2 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \mathrm{rg} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 6 \\ 0 & 3 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 4$$

Lösungskizze zu Aufgabe LA23:

$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ bilden eine Basis (Der dritte Vektor ist fast beliebig, er muss nur linear unabhängig sein von den anderen beiden). Nach dem Satz von der linearen Fortsetzung ist f eindeutig bestimmt, wenn wir $f(0,0,1)$ beliebig vorgeben. Damit sind

Existenz und Mehrdeutigkeit gezeigt. Nun soll noch eine Lösung angegeben werden. Wir setzen an:

$$f(x) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

Daraus erhalten wir zwei Gleichungen in drei Unbekannten; setzen wir $a_{13} = a_{23} = 0$, so ergibt sich als Lösung

$$f(x) = \begin{pmatrix} -1/3 & 2/3 & 0 \\ 2/3 & -1/3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

Lösungskizze zu Aufgabe LA24:

(a) Die Geradengleichung lässt sich auch $\begin{pmatrix} 5 \\ -12 \end{pmatrix} \vec{x} - 10 = 0$ schreiben, das ist bis auf Normalisierung schon die Hessesche Normalform: $\frac{1}{3} \begin{pmatrix} 5 \\ -12 \end{pmatrix} \vec{x} - \frac{10}{13} = 0$. Setzt man die Koordinaten eines Punktes in die Hessesche Normalform einer Geraden ein, so erhält man eine Zahl (in diesem Fall $+3$), deren Betrag der Abstand zwischen Punkt und Gerade ist, und deren Vorzeichen darüber Auskunft gibt, auf welcher Seite der Geraden der Punkt liegt.

(b) Der Richtungsvektor von h ist senkrecht zu dem von g, also lautet die Gleichung z.B. $\begin{pmatrix} 12 \\ 5 \end{pmatrix} \vec{x} + c = 0$. Um c zu berechnen müssen wir nur einen Punkt einsetzen, von dem wir wissen, dass er auf h liegt, also P: Damit ergibt sich $\begin{pmatrix} 12 \\ 5 \end{pmatrix} \vec{x} - 50 = 0$.

(c) Q liegt auf h, und Q eingesetzt in die Hessesche Normalform von g muss -3 ergeben. Ein Punkt auf h mit x-Koordinate x hat y-Koordinate $10 - \frac{12}{5}x$, wir setzen also $Q = (x, 10 - \frac{12}{5}x)$ an. Einsetzen in die Hessesche Normalform von g ergibt $x = 35/13$.

Lösungskizze zu Aufgabe LA25:

Sei $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$. Wir zeigen: Ist $A \neq A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & c \end{pmatrix}$, so besitzt A zwei verschiedene Eigenwerte λ und μ; (dann kann A zu $A = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$ diagonalisiert werden).

Dazu beachten wir, dass die Eigenwerte Nullstellen des charakteristischen Polynoms$\chi(A) = (a-x)(c-x) - b^2$ sind, und erhalten

$$\lambda, \mu = \frac{a+c}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{(a+c)^2 - 4(ac - b^2)}$$

Für den Nachweis der Existenz zweier verschiedenen Eigenwerte ist nur noch zeigen: Der Ausdruck unter der Wurzel ist $(a-c)^2 + 4b^2$ und damit größer als Null.

Lösungsskizze zu Aufgabe LA26:

(a) $\chi(A) = \det(A - \lambda E) = -\lambda^3 + \lambda(1+t)$. Eigenwerte sind also $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = \sqrt{t+1}$, $\lambda_3 = -\sqrt{t+1}$.

(b) Wenn $t > -1$ ist, dann sind die drei Eigenwerte verschieden, also gibt es drei zugehörige Eigenvektoren, die den Raum $\mathbb{R}^3$ aufspannen (A ist diagonalisierbar). Ist $t = -1$, dann fallen die drei Eigenwerte zusammen; gäbe es weiterhin eine Eigenbasis, so wäre A zur Nullmatrix ähnlich, ein Widerspruch zur Tatsache, dass es ein v gibt mit $Av \neq 0$.

Lösungsskizze zu Aufgabe LA27:

Zu zeigen ist eigentlich nur die lineare Unabhängigkeit:

$$a \cdot 1 + b \cdot (x-1) + c \cdot (x-1)(x-2) = 0 \Longrightarrow a = b = c = 0$$

Nun folgt aus $\dim\langle A\rangle = 3 = \dim P$ und $\langle A\rangle \subseteq P$, dass $\langle A\rangle = P$.

Lösungsskizze zu Aufgabe LA28:

(a) Einziger Eigenwert ist 2, die einzige Nullstelle des charakteristischen Polynoms. Der dazu gehörige Eigenraum wird vom Eigenvektor $\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ erzeugt.

(b) A ist nicht diagonalisierbar, weil dann die drei Diagonaleinträge Eigenwerte wären und es drei linear unabhängige Eigenvektoren gäbe.

Lösungsskizze zu Aufgabe LA29:

(i) Bezüglich der Standardbasis hat die Matrix folgende Gestalt:

$$A = \begin{pmatrix}2 & 1 & 0\\0 & 1 & -1\\0 & 2 & 4\end{pmatrix}$$

(ii) Das charakteristische Polynom ist $(2-\lambda)^2(3-\lambda)$.

(iii) Bis auf Vielfache ist $\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$ der einziger Eigenvektor zum Eigenwert 2, also hat der Eigenwert 2 algebraische Vielfachheit 2, aber geometrische Vielfachheit 1; deshalb ist die Matrix A nicht diagonalisierbar.

Lösungsskizze zu Aufgabe LA30:

(i) Bezüglich der Standardbasis hat die Matrix von T folgende Gestalt:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

(ii) Das charakteristische Polynom ist $\lambda^2(5-\lambda)$.

(iii) Eigenvektoren zum Eigenwert 0 sind $b_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $b_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ (und Linearkombinationen von diesen), Eigenvektor zum Eigenwert 5 ist $b_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$ (und Vielfache). Bezüglich der Eigenbasis $B = \{b_1, b_2, b_3\}$ hat die Matrix von T die Gestalt

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

Lösungsskizze zu Aufgabe LA31:

$\det M = 1$, deshalb ist M regulär. Charakteristisches Polynom von M ist $\chi_M(\lambda) = (1-\lambda)^3$, also ist 1 Eigenwert von M mit algebraischer Vielfachheit 3; Eigenvektor zum Eigenwert 1 ist aber nur $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, d.h. der Eigenwert 1 hat geometrische Vielfacheit 1, daher ist M nicht diagonalisierbar.

Lösungsskizze zu Aufgabe LA32:

(i) $K = \mathbb{R}$: $r \notin \{0, \sqrt{2}, -\sqrt{2}\}$

(ii) $K = \mathbb{Q}$: $r \neq 0$

(iii) Natürlich nicht ... Die Dimension eines Vektorraums ist die Mächtigkeit einer Basis, ist die maximale Anzahl linear unabhängiger Vektoren. $\dim \mathbb{R}^3 = 3$.

Lösungsskizze zu Aufgabe LA33:

Gegeben sei die Ebene E im $\mathbb{R}^3$ mit der Gleichung $-3x + 2y - 6z = -14$.
Der Normalenvektor von E ist $(-3, 2, -6)$ und hat die Länge $\sqrt{9+4+36} = 7$.
Die Hessesche Normalenform der Ebenengleichung lautet daher

$$-\frac{3}{7}x + \frac{2}{7}y - \frac{6}{7}z + 2 = 0$$

Der Nullpunkt hat den Abstand $+2$.

Die gesuchte Menge ist

$$\begin{aligned} M &= \{(x,y,z) | -\frac{3}{7}x + \frac{2}{7}y - \frac{6}{7}z + 2 = 1\} \\ &= \{(x,y,z) | -\frac{3}{7}x + \frac{2}{7}y - \frac{6}{7}z = -1\} \end{aligned}$$

M ist die Punktmenge einer zu E parallelen Ebene mit Normalenvektor $(-\frac{3}{7}, \frac{2}{7}, -\frac{6}{7})$ und Abstand 1 von E. Sie liegt auf der gleichen Seite zu E wie der Nullpunkt und hat von diesem ebenfalls den Abstand 1. □

Lösungskizze zu Aufgabe LA34:

(a) V^* ist der Vektorraum der linearen Funktionale (Linearformen) $\varphi : V \to \mathbb{R}$. Für $k = 1 \ldots n$ sei b_k^* das lineare Funktional, das b_k auf 1 abbildet und alle b_i mit $i \neq k$ auf 0:

$$b_k^*(b_i) = \delta_{ki} = \begin{cases} 1 & \text{falls } i = k \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Damit ist b_k^* eindeutig auf ganz V definiert (Satz von der linearen Fortsetzung).

(b) B^* ist linear unabhängig ; denn für jedes k gilt:

$$\sum \lambda_i b_i^* = 0 \Longrightarrow (\sum \lambda_i b_i^*)(b_k) = \lambda_k = 0$$

(c) Jede Linearform $f \in V^*$ ist durch die Bilder $(f(b_i))_{i=1,ldotsn}$ der Basisvektoren aus B festgelegt. Wegen $(\sum f(b_i)b_i^*)(b_j) = \sum f(b_i)b_i^*(b_j) = f(b_j)$ ist f Linearkombination der Vektoren von B^*.

Lösungskizze zu Aufgabe LA35:

(a) Es ist $\dim \operatorname{Kern} g + \dim \operatorname{Bild} g = \dim \mathbb{R}^3$ und $\mathbb{R}^3/\operatorname{Kern} g \cong \operatorname{Bild} g = \mathbb{R}$ hat Dimension 1. Deshalb ist $\dim \operatorname{Kern} g = 2$, eine Basis ist z.B. $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$. Die Elemente von $\mathbb{R}^3/\operatorname{Kern} g$ haben die Form $v + \operatorname{Kern} g$, $v \in \mathbb{R}^3$, anschaulich sind das alle Ebenen parallel zu $\operatorname{Kern} g$. Einen Basisvektor brauchen wir noch — und dafür einen Vektor in $\mathbb{R}^3 \setminus \operatorname{Kern} g$. $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + \operatorname{Kern} g \right\}$ ist eine Basis von $\mathbb{R}^3/\operatorname{Kern} g$.

(b) Geometrisch bedeutet $\frac{1}{\sqrt{1+(-1)^2+2^2}} g(v)$ den Abstand des Punktes mit Ortsvektor v zur Ebene $\operatorname{Kern} g$.

Lösungskizze zu Aufgabe LA38:

Seien $x_1, x_2 \in V$ Eigenvektoren und $\lambda_1, \lambda_2 \in K$ die dazugehörigen Eigenwerte mit $\lambda_1 \neq \lambda_2$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} \varphi(x_1,x_2) &= \varphi(f(x_1), f(x_2)) && \text{, da } f \text{ lineare Isometrie} \\ &= \varphi(\lambda_1 x_1, \lambda_2 x_2) \\ &= \lambda_1\lambda_2\varphi(x_1,x_2). \end{aligned}$$

Also gilt

$$\varphi(x_1,x_2)(1-\lambda_1\lambda_2) = 0,$$

woraus wiederum folgt

$$\varphi(x_1,x_2) = 0 \ \ \underline{\textbf{oder}} \ \ \lambda_1\lambda_2 = 1.$$

Da lineare Isometrien nur Eigenwerte ± 1 besitzen und nach Voraussetzung $\lambda_1 \neq \lambda_2$ ist, gilt $\lambda_1\lambda_2 \neq 1$.
Also bekommen wir

$$\varphi(x_1,x_2) = 0.$$

□

Lösungskizze zu Aufgabe LA51:

(1) z.z. $f_1(V) \cap f_2(V) = \{0\}$.
Sei $x \in f_1(V) \cap f_2(V)$; dann existieren u_1, u_2 mit $x = f_1(u_1) = f_2(u_2)$.
Mit (i) und (iii) folgt einerseits

$$f_1(x) = f_1(f_1(u_1)) = f_1(u_1) = x$$

und andererseits

$$f_1(x) = f_1(f_2(u_2)) = f_1 \circ f_2(u_2) = 0.$$

Also ist $f_1(V) \cap f_2(V) = \{0\}$.

(2) z.z. $V \subseteq f_1(V) \oplus f_2(V)$.
Sei $v \in V$, dann folgt mit (ii)

$$v = \mathrm{id}_V(v) = (f_1 + f_2)(v) = f_1(v) + f_2(v) \in f_1(V) + f_2(V)$$

Somit folgt die Behauptung. □

Lösungskizze zu Aufgabe LA52:

Allgemein gilt für eine symmetrische Bilinearform

$$g((x_1,y_1),(x_2,y_2)) = \begin{pmatrix} x_1 & y_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & c \\ c & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix},$$

wobei $\begin{pmatrix} a & c \\ c & b \end{pmatrix}$ die zugehörige Fundamentalmatrix ist.

$$(1,0)\perp_g(0,1) \Longleftrightarrow 0 = g((1,0),(0,1)) = \begin{pmatrix}1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a & c\\ c & b\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix} \Longleftrightarrow c = 0$$

$$(2,-3)\perp_g(-1,1) \Longleftrightarrow 0 = \begin{pmatrix}2 & -3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a & c\\ c & b\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1\\ 1\end{pmatrix} \Longleftrightarrow b = -\frac{2}{3}a$$

<u>Ann.:</u> g ist Skalarprodukt.

Dann ist die zugehörige Fundamentalmatrix $\begin{pmatrix}a & 0\\ 0 & b\end{pmatrix}$ positiv definit.

1. Fall: $a \leq 0$, so ist $\begin{pmatrix}1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a & 0\\ 0 & b\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix} = a \leq 0$; Widerspruch zu $g(\vec{x},\vec{x}) > 0$ für $\vec{x} \neq 0$.

2. Fall: $a > 0$, so ist $b < 0$ und $\begin{pmatrix}0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a & 0\\ 0 & b\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix} = b < 0$; Widerspruch zu $g(\vec{x},\vec{x}) \geq 0$ für $\vec{x} \neq 0$.

Also ist die Matrix nicht positiv definit und g daher kein Skalarprodukt. $\square$

<u>Alternative:</u>

Eine symmetrische Matrix $\begin{pmatrix}a & c\\ c & b\end{pmatrix} = A$ ist genau dann positiv definit, wenn $a > 0$ und $\det A > 0$.

(S. z.B. Heuser, Lehrbuch der Analysis 2, p.309)

Lösungskizze zu Aufgabe LA57:

zu (a): Die Richtungsvektoren zweier windschiefer Geraden sind linear unabhängig und spannen daher eine Ebene auf. Man betrachte und untersuche die Ebenen

$$E_1 : \vec{x} = \vec{a} + \lambda_1\vec{v} + \lambda_2\vec{w},\ E_2 : \vec{y} = \vec{b} + \mu_1\vec{v} + \mu_2\vec{w} \text{ mit } \lambda_1, \lambda_2, \mu_1, \mu_2 \in \mathbb{R}.$$

bezüglich Parallelität und Inzidenz mit den Geraden g_1 und g_2.

zu (b): Sei $h : \vec{x} = \vec{a} + \lambda \cdot \vec{n}$ die Gerade, die senkrecht auf den beiden Ebenen steht und durch den Punkt $A \in E_1$ mit Ortsvektor $\vec{a}$ geht. Sei $\vec{s} = h \cap E_2$ der Ortsvektor des Schnittpunkts von h mit der Ebene E_2. Dann gilt

$$d(E_1,E_2) = |\vec{s} - \vec{a}|.$$

$\square$

Lösungskizze zu Aufgabe LA58:

Seien g_1 und g_2 windschief. Dann sind $\vec{v}$ und $\vec{w}$ linear unabhängig und damit $\vec{v} \times \vec{w} \neq 0$. Wir müssen zeigen, dass daraus $\langle \vec{a} - \vec{b}, \vec{v} \times \vec{w}\rangle \neq 0$ folgt.

Angenommen es gilt $\langle \vec{a} - \vec{b}, \vec{v} \times \vec{w}\rangle = 0$. Dann folgt entweder $\vec{a} - \vec{b} \perp \vec{v} \times \vec{w}$ oder $\vec{a} - \vec{b} = 0$. Wenn $\vec{a} - \vec{b} = 0$, dann gilt $\vec{a} = \vec{b}$, womit beide Geraden den Punkt mit Ortsvektor $\vec{a}$ enthalten würden. Dies ist ein Widerspruch zur Windschiefheit der Geraden. Also muß $\vec{a} - \vec{b} \perp \vec{v} \times \vec{w}$ gelten.

Da $\vec{v} \times \vec{w}$ senkrecht auf allen durch $\vec{v}$ und $\vec{w}$ aufgespannten Ebenen steht, muß $\vec{a} - \vec{b}$ in der durch $\vec{v}$ und $\vec{w}$ aufgespannten Ebene durch den Ursprung liegen. Also gibt es $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ mit $\vec{a} - \vec{b} = \mu\vec{w} - \lambda\vec{v}$. Dies ist jedoch gleichbedeutend mit $\vec{a} + \lambda\vec{v} = \vec{b} + \mu\vec{w}$. Da g_1 und g_2 windschief sind, gibt es jedoch keinen Schnittpunkt der beiden Geraden und damit auch keine $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ mit $\vec{a} + \lambda\vec{v} = \vec{b} + \mu\vec{w}$. Also folgt $\langle \vec{a} - \vec{b}, \vec{v} \times \vec{w}\rangle \neq 0$.

Sei nun $\langle \vec{a} - \vec{b}, \vec{v} \times \vec{w}\rangle \neq 0$. Zu zeigen ist, dass g_1 und g_2 windschief sind, d.h. daß $\vec{v}$ und $\vec{w}$ linear unabhängig sind und dass $g_1 \cap g_2 = \emptyset$.

Wären $\vec{v}$ und $\vec{w}$ linear abhängig, so wäre $\vec{v}\times\vec{w}=0$ und damit auch $\langle\vec{a}-\vec{b},\vec{v}\times\vec{w}\rangle=0$. Also müssen $\vec{v}$ und $\vec{w}$ linear unabhängig sein.
Angenommen es gibt einen Schnittpunkt von g_1 und g_2. Dann muß es $\lambda,\mu\in\mathbb{R}$ geben, die der Gleichung $\vec{a}+\lambda\vec{v}=\vec{b}+\mu\vec{w}$ genügen. Dies ist gleichwertig zu $\vec{a}-\vec{b}=\mu\vec{w}-\lambda\vec{v}$. Also liegt $\vec{a}-\vec{b}$ in der Ebene durch den Nullpunkt, die von $\vec{v}$ und $\vec{w}$ aufgespannt wird. Da jedoch $\vec{v}\times\vec{w}$ senkrecht auf dieser Ebene steht, folgt $\langle\vec{a}-\vec{b},\vec{v}\times\vec{w}\rangle=0$. Dies ist ein Widerspruch zur Voraussetzung, so daß es keinen Schnittpunkt von g_1 und g_2 geben kann. Also sind g_1 und g_2 windschief. □

Lösungskizze zu Aufgabe LA59:

“$\Longrightarrow$”

Zu (a): Gilt $g_1=g_2$, so inzidiert p_2 mit g_1, d.h. es existiert ein $\lambda\in\mathbb{R}$ mit $p_2=p_1+\lambda v_1$, umgeformt erhält man $0=p_1-p_2+\lambda v_1$.
p_1-p_2 und v_1 sind daher linear abhängig.

Zu (b): Gilt $g_1=g_2$ und inzidieren die Punkte mit Ortsvektoren $\vec{x_1}$ und $\vec{x_2}$ ($\vec{x_1}\neq\vec{x_2}$) mit g_1 bzw. g_2, so existieren $\lambda_i,\mu_i\in\mathbb{R}$ ($i=1,2\,\lambda_1\neq\lambda_2$, $\mu_1\neq\mu_2$) mit

$$\vec{x_1}=\vec{p_1}+\lambda_1\vec{v_1}=\vec{p_2}+\mu_1\vec{v_2} \tag{1}$$

$$\vec{x_2}=\vec{p_1}+\lambda_2\vec{v_1}=\vec{p_2}+\mu_2\vec{v_2}. \tag{2}$$

Durch Umformung und Gleichsetzen erhält man

$$\begin{aligned}\mu_1\vec{v_2}-\lambda_1\vec{v_1}=\mu_2\vec{v_2}-\lambda_2\vec{v_1} &\Longleftrightarrow \mu_1\vec{v_2}-\lambda_1\vec{v_1}-\mu_2\vec{v_2}+\lambda_2\vec{v_1}=\vec{0}\\ &\Longleftrightarrow (\lambda_2-\lambda_1)\vec{v_1}+(\mu_1-\mu_2)\vec{v_2}=\vec{0}.\end{aligned}$$

Da $\lambda_1\neq\lambda_2$ bzw. $\mu_1\neq\mu_2$, ist $\lambda_2-\lambda_1\neq0$ und $\mu_1-\mu_2\neq0$. Also gibt es eine nicht-triviale Linearkombination des Nullvektors durch $\vec{v_1}$ und $\vec{v_2}$, weshalb $\vec{v_1}$ und $\vec{v_2}$ linear abhängig sind.

“$\Longleftarrow$”

Nach Voraussetzung sind die Richtungsvektoren der beiden Geraden g_1 und g_2 linear abhängig, also sind g_1 und g_2 parallel oder gleich. Findet man einen Punkt, der mit beiden Geraden inzidiert, so sind sie gleich.
Sei $\vec{p_1}\neq\vec{p_2}$ (und n.V. $\vec{v_1}\neq\vec{0}$). Nach Voraussetzung sind $\vec{p_1}-\vec{p_2},\vec{v_1}$ linear abhängig, d.h. es ex. $\lambda_1,\lambda_2\in\mathbb{R}\,(\lambda_1\neq0\neq\lambda_2)$ mit

$$\begin{aligned}\lambda_1(\vec{p_1}-\vec{p_2})+\lambda_2\vec{v_1}=0 &\Longleftrightarrow (\vec{p_1}-\vec{p_2})+\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\vec{v_1}=0\\ &\Longleftrightarrow \vec{p_1}+\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\vec{v_1}=\vec{p_2}.\end{aligned}$$

$\vec{p_2}$ liegt sowohl auf g_1 als auch auf g_2, daher gilt: $g_1=g_2$. □

Lösungskizze zu Aufgabe LA60:

Man bestimme die Hesse’sche Normalenform (HNF) der Ebenen E_1,E_2 und berechne den Abstand zwischen E_1 und E_2: $d(E_1,E_2)=|f_2-f_1|$, wobei f_i den Stützabstand der Ebene E_i vom Ursprung angibt.
Ist die Ebene E durch die Gleichung $ax+by+cz=d$ beschrieben,so ist eine äquivalente Darstellung in HNF gegeben durch

$$\vec{n}\cdot\vec{x}-f=0$$

mit Stützabstand $f=\frac{d}{||(a,b,c)||}$ und Normalenvektor $\vec{n}=\frac{1}{||(a,b,c)||}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$.

Die HNF'en der gegebenen Ebenen haben damit die Form

$$E_1 : \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \frac{2}{\sqrt{3}} = 0 \text{ und } E_2 : \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \frac{3}{\sqrt{3}} = 0.$$

Sei f_1 der Stützabstand von E_1 und f_2 der Stützabstand von E_2. Es gilt $f_1 = \frac{2}{\sqrt{3}}$ und $f_2 = \frac{3}{\sqrt{3}}$. Für den Abstand zwischen E_1 und E_2 gilt $d(E_1, E_2) = |f_2 - f_1| = \frac{1}{\sqrt{3}}$. □

Lösungskizze zu Aufgabe LA61:

Die Hessesche Normalenform (HNF) einer durch $ax + by + cz = d$ gegebenen Ebene E hat die Form

$$\vec{n} \cdot \vec{x} - f = 0 \quad \text{mit} \quad f = \frac{d}{||(a,b,c)||}.$$

Hierbei ist $\vec{n}$ der bis auf die Orientierung eindeutige Normalenvektor von E und $\vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

Für die gegebene Ebene $E_1 : x + 2y - z = -1$ gilt

$$\vec{n} = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

und damit ist die HNF von E_1

$$\frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \frac{1}{\sqrt{6}} = 0.$$

Der Abstand $d(K, E_1)$ eines beliebigen Punktes K von E_1 läßt sich nun ermitteln, indem der Ortsvektor $\vec{k}$ von K anstelle von $\vec{x}$ in die HNF der Ebene E_1 eingesetzt wird. Also folgt

$$d(T, E_1) = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{\sqrt{6}} = \frac{4}{\sqrt{6}}.$$

Um den Spiegelpunkt S von T zu bestimmen, müssen wir zunächst den Schnittpunkt X der Geraden durch S und T und der Ebene E_1 ermitteln.
Je nach der Orientierung von $\vec{n}$ muß entweder $\vec{x} = \vec{t} + \frac{4}{\sqrt{6}}\vec{n}$ oder $\vec{x} = \vec{t} - \frac{4}{\sqrt{6}}\vec{n}$ gelten. Welche Variante die richtige ist, kann man überprüfen, indem man den gewonnenen Punkt in die Ebenengleichung einsetzt: Liegt der Punkt auf der Ebene, so erfüllt er die Ebenengleichung.
Wir erhalten die Punkte $X_1 = \frac{1}{3}(-1, 10, -2)$ und $X_2 = \frac{1}{3}(-5, 2, 2)$ und stellen fest, daß $X_2 \in E_1$. Insbesondere gilt nun

$$\vec{t} = \vec{x_2} + \frac{4}{\sqrt{6}}\vec{n}.$$

Da S Spiegelpunkt von T sein soll, muß der Ortsvektor $\vec{s}$ von S folgende Gleichung erfüllen

$$\vec{s} = \vec{x_2} - \frac{4}{\sqrt{6}}\vec{n}.$$

Wir bekommen für $\vec{s}$ die Gleichung

$$\begin{aligned}\vec{s} &= \vec{x}_2 - \frac{4}{\sqrt{6}}\vec{n} \\ &= \frac{1}{3}\begin{pmatrix}-5\\2\\2\end{pmatrix} - \frac{4}{\sqrt{6}}\cdot\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{3}\begin{pmatrix}-5\\2\\2\end{pmatrix} - \frac{2}{3}\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{3}\begin{pmatrix}-7\\-2\\4\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Also ist der gesuchte Punkt $S = \frac{1}{3}(-7,-2,4)$. $\square$

Lösungskizze zu Aufgabe LA62:

Wir geben die Ebene E in Koordinatendarstellung an. Da eine Ebene durch drei nicht-kollineare Punkte eindeutig bestimmt ist, genügt es, eine Gleichung $ax+by+cz=d$ zu bestimmen, die von den Punkten P, Q und R erfüllt ist.

$$E = \{(x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1+x_2+x_3 = -1\}.$$

In dieser Darstellung läßt sich der Normalenvektor von E leicht bestimmen:

$$\vec{n} = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$$

Da $\vec{n} \perp E$,gilt für die Ursprungsgerade $g: \vec{x} = \lambda \cdot \vec{n}, \qquad \lambda \in \mathbb{R}$, also

$$g: \vec{x} = \lambda \cdot \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

Gesucht ist nun der Schnittpunkt von E und g.
Bestimmt man die HNF von E, $\vec{n}\cdot\vec{x} - f = 0$ mit $f = \frac{d}{||a,b,c||}$, so kann man an f den Abstand von E zum Ursprung ablesen.

$$E: \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\cdot\vec{x} + \frac{1}{\sqrt{3}} = 0$$

Den Ortsvektor $\vec{s}$ des Schnittpunktes S kann man hier bestimmen, indem der Wert dieses Abstandes als Koeffizient in die Geradengleichung von g eingesetzt wird. Man erhält

$$\vec{s} = \lambda\vec{n} = -\frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}-1\\-1\\-1\end{pmatrix}$$

und damit den Schnittpunkt $S = (-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{3})$.
Nach Konstruktion gilt: $g \perp E$ und $0 \in g$.
Der gesuchte Spiegelpunkt T des Ursprungs an E liegt daher auf g und hat zum Ursprung den doppelten Abstand wie S.

Es folgt daher $\vec{t} = 2\cdot(-\frac{1}{\sqrt{3}})(\frac{1}{\sqrt{3}})\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} = \frac{2}{3}\begin{pmatrix}-1\\-1\\-1\end{pmatrix}$ und damit $T = (-\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, -\frac{2}{3})$. $\square$

Lösungskizze zu Aufgabe LA63:

Zu (a): Es gilt

$$\begin{aligned}\vec{x} \in \operatorname{Fix} g &\iff g(\vec{x}) = \vec{x}\\ &\iff A\vec{x} + \vec{b} = \vec{x} = E_n \cdot \vec{x}\\ &\iff (A - E_n)\vec{x} = -\vec{b}.\end{aligned}$$

$\vec{x}$ ist also Lösung des inhomogenen LGS $(A - E_n)\vec{x} = -\vec{b}$. Die Menge aller Vektoren $\vec{x}$, die diese Bedingung erfüllen, ist ein affiner Unterraum von E.

Zu (b): Sei 1 kein Eigenwert von A.

$$\begin{aligned}1 \text{ ist kein Eigenwert von } A &\iff \det(A - 1 \cdot E_n) \neq 0\\ &\iff A - E_n \text{ ist regulär}\\ &\iff \operatorname{rg}(A - E_n) = n\end{aligned}$$

$A - E_n$ ist darstellende Matrix eines Endomorphismus von E mit $\dim \operatorname{Bild}(A - E_n) = n$. Nach der Dimensionsformel gilt somit: $\dim \operatorname{Kern}(A - E_n) = 0$, d.h. der Lösungsraum des homogenen LGS $(A - E_n)\vec{v} = 0$ besteht aus genau einer Lösung, weshalb der Lösungsraum des LGS $(A - E_n)\vec{v} = -b$ genau eine Lösung beinhaltet.

Nach Teil (a) ist diese ein Fixpunkt von g. □

Lösungskizze zu Aufgabe LA64:

Zu (a): Mögliche Beispiele sind in Matrixform

(i) $\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\ 0\\ 1\end{pmatrix}.$

(ii) $\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\end{pmatrix}.$

(iii) $\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & -1\\ 0 & 1 & -1\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\end{pmatrix}.$

(iv) $\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\end{pmatrix}.$

(v) $\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\end{pmatrix}.$

In Fall (i) existiert keine Lösung, die Lösungsmenge ist leer.

Interpretiert man die Matrizen A_i als darstellende Matrizen linearer Funktionen, so kann man in den Fällen (ii) bis (v) jeweils die Dimension des Lösungsraums $\dim L_i = \dim \operatorname{Kern} A_i$ mit der Formel

$$\dim \operatorname{Kern} A_i = 3 - \operatorname{rg} A_i$$

bestimmen. Man erhält bei (ii) eine lineare Abbildung, deren darstellende Matrix Rang 3 hat, also eine Bijektion von $\mathbb{R}^3$ nach $\mathbb{R}^3$, weshalb der Nullvektor auf sich selbst abgebildet werden muß. Der Nullvektor ist einzige Lösung des LGS. Bei (iii) hat die Matrix Rang 2, der Raum aller Lösungen hat daher Dimension 1 und entspricht einer

Ursprungsgeraden. Bei (iv) hat die Matrix Rang 1, der Raum aller Lösungen hat daher Dimension 2 und entspricht einer Ursprungsebene. Bei (v) hat die Matrix Rang 0, der Raum aller Lösungen hat daher Dimension 3 und ist somit der ganze $\mathbb{R}^3$.

Zu (b): Die Frage ist mit ja zu beantworten. Dies ist immer dann der Fall, wenn bei folgendem Gleichungssystem $Ax = d$

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix}$$

$\begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix}$ keine Linearkombination von $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$ ist, wenn also $\mathrm{rg}(A|d) > \mathrm{rg}(A)$. Die geometrische Interpretation besagt, dass durch die Gleichungen der beiden Zeilen je eine Ebene des $\mathbb{R}^3$ dargestellt wird. Sind die Ebenen zueinander echt parallel, dann gibt es keinen Punkt im $\mathbb{R}^3$, der auf beiden Ebenen gleichzeitig liegt.
Ein Beispiel hierfür ist

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

□

Lösungskizze zu Aufgabe LA65:

Beschreiben wir das gegebene LGS durch die Koeffizientenmatrix, so bekommen wir die Matrix

$$(A|b) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -4 & 5 & 8 \\ 3 & 7 & -1 & 3 \\ -1 & -15 & 11 & \alpha \end{array}\right).$$

Durch die elementaren Zeilenumformungen $[2]' := (-3)\cdot[1]+[2]$ und $[3]' := [1]+[3]$ bekommen wir die Matrix

$$(A'|b') = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -4 & 5 & 8 \\ 3 & 19 & -16 & -21 \\ 0 & -19 & 16 & 8+\alpha \end{array}\right).$$

Für $\alpha = 13$ gilt $\mathrm{rg}(A') = \mathrm{rg}(A'|b') = 2$, woraus mit der Dimensionsformel folgt, daß $\dim \mathrm{Kern}\, A' = 1$. Der Lösungsraum des LGS hat also Dimension 1 und ist damit eine Gerade.
Für $\alpha = 14$ gilt *Rang* $(A'|b') >$ *Rang* (A'), woraus folgt, daß das LGS keine Lösung hat. Der Lösungsraum des LGS ist leer. □

Lösungskizze zu Aufgabe LA66:

Das gegebene LGS läßt sich durch $A\vec{x} = \vec{0}$ beschreiben, wobei A die darstellende Matrix einer linearen Funktion $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$ ist. Wir bekommen

$$Ax = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Man sieht, daß *Rang* $A = 2$, woraus nach der Dimensionsformel $\dim \mathrm{Kern}\, f = 2$ folgt. Da $U = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^4 | A \cdot \vec{x} = \vec{0}\}$, folgt $\dim U = 2$.
Wir suchen nun zwei linear unabhängige Vektoren $\vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^4$, die beide das LGS erfüllen. Dann gilt $U = <\vec{v}, \vec{w}>$. Beispielsweise wählt man

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ und } \vec{w} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Man sieht sofort, daß $\vec{v}$ und $\vec{w}$ linear unabhängig sind. Weiterhin gilt $\vec{v} \perp \vec{w}$ bezüglich des kanonischen Skalarprodukts. Um zu einer Orthonormalbasis von U zu gelangen, müssen wir nur noch $\vec{v}$ und $\vec{w}$ normieren und bekommen als Orthonormalbasis von U

$$B = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\vec{v}, \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{w} \right).$$

□

Lösungskizze zu Aufgabe LA67:

Wir betrachten die Koeffizientenmatrix A des LGS und sehen, daß *Rang* $A = 2$, da die zweite Spalte kein Vielfaches der ersten Spalte ist.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 5 & -3 \\ -1 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Die um den Lösungsvektor $\vec{b}$ des LGS erweiterte Matrix $(A|b)$ hat jedoch Rang 3, was man daran erkennen kann, daß die aus den ersten drei Zeilen der Matrix gebildete Determinante den Wert $-29 \neq 0$ hat und rg $(A|b)$ = Zeilenrang $(A|b)$ = Spaltenrang $(A|b)$.

$$(A|b) = \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 2 & -3 \\ 5 & -3 & 1 \\ -1 & 4 & -2 \\ 2 & 3 & 4 \end{array}\right).$$

Also ist das Gleichungssystem unlösbar; es gibt keinen Punkt im $\mathbb{R}^2$, der auf allen vier Geraden gleichzeitig liegt. □

Lösungskizze zu Aufgabe LA68:

Man sieht, dass die dritte Zeile des LGS (bei geeign. α) die Summe der ersten beiden Zeilen ist. Also ist das LGS höchstens dann lösbar, wenn $\alpha = 1 + 0 = 1$ ist. Wir setzen $\alpha = 1$ und formen das LGS in Zeilenstufenform um:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Da der Rang der Koeffizientenmatrix A des LGS 2 ist, hat der Lösungsraum des LGS wegen der Dimensionsformel $3 = \dim \mathrm{Kern} A + \mathrm{rg} A$ die Dimension 1, ist also geometrisch interpretiert eine Gerade. Wir wählen $z = t \in \mathbb{R}$ als beliebigen reellen Parameter und bekommen nun die Beziehungen $y = \frac{1}{2} - t$ und $x = -\frac{1}{2}$. Also hat die Lösungsmenge L des LGS die Form

$$L = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x = -\frac{1}{2}, y = \frac{1}{2} - t, z = t \text{ für } t \in \mathbb{R} \right\}.$$

□

Lösungskizze zu Aufgabe LA69:

Setzt man $p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$ so bekommt man für L das LGS

$$\begin{aligned} a_0 &= 0 \\ a_1 + 2a_2 &= 1 \\ a_0 + 2a_1 + 4a_2 &= 2. \end{aligned}$$

Mit $a_0 = 0$ ergibt sich, daß die dritte Gleichung ein Vielfaches der 2. Gleichung ist. Wir bekommen nun eine einparametrige Lösungsschar mit $a_0 = 0$, $a_1 = 1 - 2a_2$ und $a_2 = s$ für beliebige $s \in \mathbb{R}$. Also gilt

$$L = \{p \mid p(x) = (1-2a)x + ax^2 \text{ für } a \in \mathbb{R}\}.$$

Zur Mächtigkeit von L folgt: $|L| = |\mathbb{R}|$.
Für L bekommt man das LGS

$$\begin{aligned} a_0 &= 0 \\ a_1 + 2a_2 &= 1 \\ 2a_1 + 4a_2 &= 3. \end{aligned}$$

Man sieht, daß es keine Lösung gibt. Damit ist $M = \emptyset$. □

Lösungskizze zu Aufgabe LA70:

Zu zeigen ist

$$\sum_{i=1}^{n} a_i x_i = 0 \Longrightarrow a_i = 0 \quad (i = 1, \ldots, n).$$

Es gilt also:

$$\begin{pmatrix} 1 & \ldots & 1 \\ \lambda_1 & \ldots & \lambda_n \\ \vdots & & \vdots \\ \lambda_1^{n-2} & \ldots & \lambda_n^{n-2} \\ \lambda_1^{n-1} & \ldots & \lambda_n^{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_{n-1} \\ a_n \end{pmatrix} = 0 = A \cdot \vec{a}.$$

Gezeigt werden muß nun, daß A vollen Rang hat. Dies geschieht mit dem Hilfsmittel Vandermonde-Determinante, was zulässig ist, da A eine Vandermonde-Matrix (mit $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ paarweise verschieden) ist. □

Lösungskizze zu Aufgabe LA71:

Zu (a): Wir verwenden die Eigenschaft, dass $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \cos \sphericalangle(\vec{u}, \vec{v})$. Es gilt nach der Regel von Sarrus

$$\begin{aligned} \det G = 0 &\Longleftrightarrow \langle \vec{u}, \vec{u} \rangle \cdot \langle \vec{v}, \vec{v} \rangle - \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle \cdot \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = 0 \\ &\Longleftrightarrow \langle \vec{u}, \vec{u} \rangle \cdot \langle \vec{v}, \vec{v} \rangle = (\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle)^2 \\ &\Longleftrightarrow |\vec{u}|^2 \cdot |\vec{v}|^2 = |\vec{u}|^2 \cdot |\vec{v}|^2 \cdot \cos \sphericalangle(\vec{u}, \vec{v}) \\ &\Longleftrightarrow \cos \sphericalangle(\vec{u}, \vec{v}) = 1 \\ &\Longleftrightarrow \measuredangle\, (\vec{u}, \vec{v}) = 0 \\ &\Longleftrightarrow \vec{u} \text{ und } \vec{v} \text{ sind linear abhängig.} \end{aligned}$$

Also folgt die Behauptung.

Zu (b): Wir versuchen $s, t \in \mathbb{R}$ so zu bestimmen, dass für $\vec{x}(s) = \vec{a} + s\vec{u} \in g$ und $\vec{y}(t) = \vec{b} + t\vec{v} \in h$

$$\langle \vec{y}(t) - \vec{x}(s), \vec{u} \rangle = 0 \text{ und } \langle \vec{y}(t) - \vec{x}(s), \vec{v} \rangle = 0$$

gilt. Es ist $\vec{y}(t) - \vec{x}(s) = \vec{b} + t\vec{v} - \vec{a} - s\vec{u} = \vec{b} - \vec{a} + t\vec{v} - s\vec{u}$. Es gilt also zum einen

$$\begin{aligned} \langle \vec{y}(t) - \vec{x}(s), \vec{u} \rangle = 0 &\Longleftrightarrow \langle \vec{b} - \vec{a} + t\vec{v} - s\vec{u}, \vec{u} \rangle = 0 \\ &\Longleftrightarrow \langle \vec{b} - \vec{a}, \vec{u} \rangle + t\langle \vec{v}, \vec{u} \rangle - s\langle \vec{u}, \vec{u} \rangle = 0 \\ &\Longleftrightarrow \qquad \langle \vec{b} - \vec{a}, \vec{u} \rangle = s\langle \vec{u}, \vec{u} \rangle - t\langle \vec{v}, \vec{u} \rangle \end{aligned}$$

sowie zum anderen

$$\begin{aligned}
\langle \vec{y}(t) - \vec{x}(s), \vec{v} \rangle = 0 \qquad & \iff \langle \vec{b} - \vec{a} + t\vec{v} - s\vec{u}, \vec{v} \rangle = 0 \\
& \iff \langle \vec{b} - \vec{a}, \vec{v} \rangle + t\langle \vec{v}, \vec{v} \rangle - s\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = 0 \\
& \iff \langle \vec{b} - \vec{a}, \vec{v} \rangle = s\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle - t\langle \vec{v}, \vec{v} \rangle.
\end{aligned}$$

Gesucht ist also eine Lösung $(s,t) \in \mathbb{R}^2$ des LGS

$$\begin{pmatrix} \langle \vec{u}, \vec{u} \rangle & \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle \\ \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle & \langle \vec{v}, \vec{v} \rangle \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} s \\ -t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \langle \vec{b} - \vec{a}, \vec{u} \rangle \\ \langle \vec{b} - \vec{a}, \vec{v} \rangle \end{pmatrix}.$$

Wir stellen fest, daß die Koeffizientenmatrix des LGS die Gramsche Matrix ist. Da nach Voraussetzung $\vec{u}$ und $\vec{v}$ linear unabhängig sind, gilt nach Teil (a) $\det G \neq 0$. Also ist das LGS eindeutig lösbar.

Ist $(s^*, t^*) \in \mathbb{R}^2$ die eindeutige Lösung des LGS, so hat die gesuchte Gerade die Gestalt

$$n = \{\vec{x}(s^*) + \lambda(\vec{y}(t^*) - \vec{x}(s^*)) \mid \lambda \in \mathbb{R}\}.$$

$\square$

Lösungskizze zu Aufgabe LA72:

Zu (a): Angenommen die Vektoren $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n$ sind linear abhängig, d.h. es gibt eine nicht-triviale Linearkombination des Nullvektors $\lambda_1\vec{v}_1 + \lambda_2\vec{v}_2 + \cdots + \lambda_n\vec{v}_n = \vec{0}$, bei der nicht alle $\lambda_i = 0$ sind. Dann gilt

$$\begin{aligned}
\langle \vec{0}, \vec{v}_1 \rangle &= \langle \lambda_1\vec{v}_1 + \lambda_2\vec{v}_2 + \cdots + \lambda_n\vec{v}_n, \vec{v}_1 \rangle \\
&= \lambda_1\langle \vec{v}_1, \vec{v}_1 \rangle + \lambda_2\langle \vec{v}_2, \vec{v}_1 \rangle + \cdots + \lambda_n\langle \vec{v}_n, \vec{v}_1 \rangle \\
&= 0 \\
\Longrightarrow \lambda_1 &= 0.
\end{aligned}$$

Führt man diese Betrachtung analog für alle $i \in \{1, \ldots, n\}$ durch, schaut man sich also jeweils $\langle \vec{0}, \vec{v}_i \rangle$ an, so folgt jedesmal $\lambda_i = 0$. Also gibt es keine nicht-triviale Linearkombination des Nullvektors, womit die lineare Unabhängigkeit von $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n$ bewiesen ist.

Zu (b): Unter Ausnutzung der Beziehung $\langle \vec{v}_1, \vec{v}_2 \rangle = |\vec{v}_1| \cdot |\vec{v}_2| \cdot \cos \sphericalangle(\vec{v}_1, \vec{v}_2)$ bekommen wir

$$\begin{aligned}
| < \vec{v}_1, \vec{v}_2 \rangle|^2 &= \big(|\vec{v}_1| \cdot |\vec{v}_2| \cdot \cos \sphericalangle(\vec{v}_1, \vec{v}_2)\big)^2 \\
&= |\vec{v}_1|^2 \cdot |\vec{v}_2|^2 \cdot \cos^2 \sphericalangle(\vec{v}_1, \vec{v}_2).
\end{aligned}$$

Gleichzeitig gilt auch

$$\begin{aligned}
\langle \vec{v}_1, \vec{v}_1 \rangle \cdot \langle \vec{v}_2, \vec{v}_2 \rangle &= \big(|\vec{v}_1|^2 \cdot \cos \sphericalangle(\vec{v}_1, \vec{v}_1)\big) \cdot \big(|\vec{v}_2|^2 \cdot \cos \sphericalangle(\vec{v}_2, \vec{v}_2)\big) \\
&= |\vec{v}_1|^2 \cdot |\vec{v}_2|^2.
\end{aligned}$$

Wenn nun $|\langle \vec{v}_1, \vec{v}_2 \rangle|^2 = \langle \vec{v}_1, \vec{v}_1 \rangle \cdot \langle \vec{v}_2, \vec{v}_2 \rangle$ vorausgesetzt wird, ist dies äquivalent zu $\cos \sphericalangle(\vec{v}_1, \vec{v}_2) = 1$ und damit zu $\vec{v}_1 || \vec{v}_2$ bzw. zur linearen Abhängigkeit von $\vec{v}_1$ und $\vec{v}_2$. $\square$

Lösungskizze zu Aufgabe LA73:

Es gilt $\dim_K(U_1) = 1$, da $U_1 = <\overbrace{(1,1,\dots,1)}^{\neq 0}>$.

$$\begin{aligned}
U_2 &= \left\{(a_1,a_2,\dots,a_n) \in V \mid a_i \in K, \sum_{i=1}^{n} a_i = 0\right\} \\
&= \left\{(a_1,a_2,\dots,-\sum_{i=0}^{n-1} a_i) \in V \mid a_i \in K\right\} \\
&= \{(a_1,0,\dots,0,-a_1)+(0,a_2,0,\dots,0,-a_2)+\dots+(0,\dots,0,a_{n-1},-a_{n-1})|\} \\
&= \{a_1(1,0,\dots,0,-1)+a_2(0,1,\dots,0,-1)+\dots+a_{n-1}(0,\dots,0,1,-1)|\ a_i \in K\}
\end{aligned}$$

Jeder Vektor aus U_2 läßt sich als Linearkombination der $(n-1)$ Vektoren $(1,0,\dots,0,-1),(0,1,0,\dots,0,-1),\dots,(0,\dots,0,1,-1)$ beschreiben. Da diese Vektoren U_2 erzeugen und linear unabhängig sind, bilden sie eine Basis von U_2. Damit folgt $\dim_k(U_2) = n-1$.

$$\begin{aligned}
v \in (U_1 \cap U_2) &\Longleftrightarrow \exists\, a \in K : r = (a,a,\dots,a) \underline{\text{ und }} \sum_{i=1}^{n} a = 0 \\
&\Longleftrightarrow \exists\, a \in K : r = (a,a,\dots,a) \underline{\text{ und }} n \cdot a = 0.
\end{aligned}$$

1. Fall: $\mathrm{char}(K) \nmid n$

$$\begin{aligned}
char(K) \nmid n &\Longrightarrow (U_1 \cap U_2) = \vec{0} \\
&\Longrightarrow \dim_K(U_1 \cap U_2) = 0.
\end{aligned}$$

2. Fall: $\mathrm{char}(K)|n$

$$\begin{aligned}
char(K)|n &\Longrightarrow (U_1 \subseteq U_2) \\
&\Longrightarrow \dim_K(U_1 \cap U_2) = 1.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\dim_K(U_1+U_2) &= \dim_K(U_1)+\dim_K(U_2)-\dim_K(U_1 \cap U_2) \\
&= 1+(n-1)-\begin{cases} 0 & \text{für Fall 1} \\ 1 & \text{für Fall 2} \end{cases} \\
&= \begin{cases} n & \text{für Fall 1} \\ n-1 & \text{für Fall 2} \end{cases} \qquad \square
\end{aligned}$$

Lösungskizze zu Aufgabe LA74:

Da $V \cong W$, existiert ein Isomorphismus $f : V \to W$. Seien $A = (v_i)_{i\in I}$ Basis von V und $B = (w_j)_{j\in J}$ Basis von W, d.h. also $\dim V = |I|$ und $\dim W = |J|$ für Indexmengen I und J. Zu zeigen ist $|I| = |J|$. Es gilt

$$\begin{aligned}
f\Big(\sum_{i\in I} \lambda_i v_i\Big) = 0 &\Longrightarrow \sum_{i\in I} \lambda_i v_i = 0, \text{ da } f \text{ injektiv} \\
&\Longrightarrow \lambda_i = 0 (\text{ für alle } i \in I), \text{ da } (v_i)_{i\in I} \text{ Basis von } V
\end{aligned}$$

sowie gleichzeitig

$$f\Big(\sum_{i\in I} \lambda_i v_i\Big) = 0 \Longleftrightarrow \sum_{i\in I} \lambda_i f(v_i) = 0, \text{ da } f \text{ linear.}$$

Insgesamt folgt also aus der linearen Unabhängigkeit der Familie $(v_i)_{i\in I}$ auch die lineare Unabhängigkeit der Familie $(f(v_i))_{i\in I}$. Da $f(v_i) \in W$, folgt $\dim W = |J| \geq |I| = \dim V$.
Weil $f : V \to W$ ein Isomorphismus ist, existiert die zu f inverse Abbildung $f^{-1} : W \to V$, die wiederum ein Isomorphismus ist.
Analog kann man $\dim V = |I| \geq |J| = \dim W$ zeigen, womit dann insgesamt $\dim V = \dim W$ folgt. $\square$

Lösungsskizze zu Aufgabe LA75:

Da $(\mathbb{C},+,\cdot)$ Körper ist, folgt sofort, daß $(\mathbb{C},+)$ eine abelsche Gruppe ist, wobei $+ : \mathbb{C}\times\mathbb{C} \to \mathbb{C}$ wie üblich die additive Verknüpfung zweier Vektoren aus $\mathbb{C}$ ist. Sei $\odot : \mathbb{C}\times\mathbb{C} \to \mathbb{C}$ die Skalarmultiplikation eines Vektors aus $\mathbb{C}$ mit einem Skalar aus $\mathbb{C}$. Zu zeigen ist Assoziativität, gemischte Distributivität und die Existenz eines neutralen Elements bzgl. $\odot$. Da $(\mathbb{C},+,\cdot)$ Körper ist, wobei $\cdot : \mathbb{C}\times\mathbb{C} \to \mathbb{C}$ die multiplikative Verknüpfung zweier komplexer Zahlen ist, können wir $\odot$ und $\cdot$ miteinander identifizieren.
Da $(\mathbb{C},+,\cdot)$ Körper ist, ist $(\mathbb{C}\setminus\{0\},\cdot)$ eine Gruppe, weshalb das Assoziativgesetz bzgl. $\odot$ gilt. Weiterhin gilt $1\cdot z = 1 \odot z = z$ für alle $z \in \mathbb{C}$. Also existiert mit 1 ein neutrales Element des Skalarkörpers $\mathbb{C}$ bzgl. $\odot$. Ebenfalls aus der Körpereigenschaft von $(\mathbb{C},+,\cdot)$ folgt die Gültigkeit der gemischten Distributivität.
Da $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ jeweils Körper sind (also $\mathbb{Q}$ Unterkörper von $\mathbb{R}$ und von $\mathbb{C}$, $\mathbb{R}$ Unterkörper von $\mathbb{C}$), kann die auf $\mathbb{C}$ definierte Verknüpfung der Skalarmultiplikation $\odot : \mathbb{C}\times\mathbb{C} \to \mathbb{C}$ eines Vektors aus $\mathbb{C}$ mit einem Skalar aus $\mathbb{C}$ jeweils auf die Skalarkörper $\mathbb{R}$ bzw. $\mathbb{Q}$ übertragen werden, indem der Skalarbereich auf $\mathbb{R}$ bzw. $\mathbb{Q}$ eingeschränkt wird.
Allgemein gilt $\dim_K K = 1$ für jeden Körper K. Also folgt $\dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C} = 1$.
Wir zeigen nun, dass $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{C} = 2$ und weisen nach, daß die komplexen Vektoren 1 und i über $\mathbb{R}$ linear unabhängig sind. Angenommen 1 und i sind linear abhängig, dann gäbe es $\lambda_1,\lambda_2 \in \mathbb{R}$ mit $\lambda_1\cdot 1 + \lambda_2 \cdot i = 0$. Daraus folgt aber $i = -\frac{\lambda_1}{\lambda_2} \in \mathbb{R}$, was ein Widerspruch ist, da $i \notin \mathbb{R}$. Also sind 1 und i über $\mathbb{R}$ linear unabhängig. Jede komplexe Zahl $z \in \mathbb{C}$ läßt sich mit reellen a,b durch $z = a\cdot 1 + b\cdot i$ darstellen. Also ist $B = \{1,i\}$ eine Basis von $\mathbb{C}$ über $\mathbb{R}$ und damit $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{C} = 2$.
Zuletzt zeigen wir, daß $\dim_{\mathbb{Q}} \mathbb{C} = \infty$. Angenommen es gilt $\dim_{\mathbb{Q}} \mathbb{C} = n \in \mathbb{N}$. Dann gibt es eine Basis $\{z_1,z_2,\ldots,z_n\}$ in $\mathbb{C}$, so daß jedes $z \in \mathbb{C}$ die Darstellung

$$z = q_1 z_1 + q_2 z_2 + \cdots + q_n z_n$$

mit rationalen Koeffizienten q_i hat. Da aber $\mathbb{Q}$ abzählbar ist, kann es jedoch nur abzählbar viele derartige Linearkombinationen geben. Bekanntermaßen ist jedoch $\mathbb{R}$ überabzählbar und $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$, so daß auch $\mathbb{C}$ überabzählbar ist. Also ergibt dies einen Widerspruch, weshalb $\dim_{\mathbb{Q}} \mathbb{C} = \infty$. $\square$

Lösungsskizze zu Aufgabe LA76:

Da f ein Homomorphismus und damit linear ist, gilt:

$$f(b_1) + f(b_2) = c_1 \tag{1}$$
$$f(b_1) - f(b_2) + 2f(b_3) = c_2 \tag{2}$$
$$2f(b_2) - f(b_3) = c_1 + c_2 \tag{3}$$

Die Gleichungen (1) und (3) lassen sich umformen zu

$$f(b_1) = -f(b_2) + c_1$$
$$f(b_3) = 2f(b_2) - c_1 - c_2$$

Setzt man nun $f(b_1)$ und $f(b_3)$ in Gleichung (2) ein, so erhält man

$$\begin{aligned} -f(b_2)+c_1-f(b_2)+2(2f(b_2)-c_1-c_2) &= c_2 \\ 2f(b_2)-c_1-2c_2 &= c_2 \\ f(b_2) &= \frac{1}{2}c_1+\frac{3}{2}c_2 \end{aligned}$$

Dies ergibt für $f(b_1)$ bzw. $f(b_3)$

$$\begin{aligned} f(b_1) &= \frac{1}{2}c_1-\frac{3}{2}c_2, \\ f(b_3) &= 2c_2. \end{aligned}$$

Da die Spalten der Matrix $M_C^B(f)$ gleich den Koordinatenvektoren bzgl. C der Bilder der Basisvektoren von V sind, folgt

$$M_C^B(f) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{3}{2} & \frac{3}{2} & 2 \end{pmatrix}.$$

□

Lösungsskizze zu Aufgabe LA77:

Zu (a): Gesucht ist eine Abbildung f mit $f(x,y) = (x,-y)$. Diese Bedingung wird erfüllt von

$$M_B^B(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Zu (b): Gesucht ist eine Abbildung f mit $f(x,y) = (y,x)$. Diese Bedingung wird erfüllt von

$$M_B^B(f) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Zu (c): Gesucht ist eine Abbildung f mit $f(x,y) = (0,y)$. Diese Bedingung wird erfüllt von

$$M_B^B(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Zu (d): Eine lineare Abbildung $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ ist durch die Koordinaten der Bilder der Basisvektoren einer Basis des $\mathbb{R}^2$ eindeutig bestimmt. Wählen wir die kanonische Basis des $\mathbb{R}^2$, so bekommen wir als Bedingungen für die Abbildung $f(1,0) = (\cos\alpha, \sin\alpha)$ und $f(0,1) = (-\sin\alpha, \cos\alpha)$.
Also lautet die gesuchte Matrix

$$M_B^B(f) = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

□

Lösungsskizze zu Aufgabe LA78:

Sei zunächst $\dim_K V = 1$. Dann ist $V = <v> = \{\lambda v \mid \lambda \in K\}$.
Da nach Voraussetzung $f(v) \in <v>$, existiert ein $\lambda \in K$ mit $f(v) = \lambda \cdot v = \lambda \cdot id_V$.
Sei nun $\dim_K V > 1$, seien $v_1, v_2 \in V$ zwei Basisvektoren und $f(v_1) \in <v_1>$, $f(v_2) \in <v_2>$ sowie $f(v_1+v_2) \in <v_1+v_2>$.

Nach Definition eines Erzeugendensystems gibt es daher $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in K$ mit

$$\begin{aligned} f(v_1) &= \lambda_1 v_1 \\ f(v_2) &= \lambda_2 v_2 \\ f(v_1+v_2) &= \lambda_3(v_1+v_2). \end{aligned}$$

Da $f(v_1)+f(v_2) = f(v_1+v_2)$, folgt

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 = \lambda_3 v_1 + \lambda_3 v_2.$$

Wegen der Eindeutigkeit der Basisdarstellung folgt daraus

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 =: \lambda.$$

$$\begin{pmatrix} \lambda & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda \end{pmatrix}$$

□

Lösungskizze zu Aufgabe LA79:

Wir betrachten jeweils das charakteristische Polynom und bestimmen die zugehörigen Nullstellen. Diese sind die Eigenwerte der Matrizen.

$$\begin{aligned} P_A(x) &= \begin{vmatrix} 2-x & -1 & -1 \\ 3 & 4-x & -1 \\ -3 & -1 & 4-x \end{vmatrix} \\ &= (2-x)(5-x)(3-x) \\ &= -H_A \quad \text{(Minimalpolynom).} \end{aligned}$$

Da das Minimalpolynom in lauter verschiedene Linearfaktoren zerfällt, ist A diagonalisierbar. Um eine Eigenbasis zu bestimmen, muß zu jedem Eigenwert der dazugehörige Eigenvektor gefunden werden. Dies geschieht durch das Lösen des Gleichungssystems $(A-\lambda E_n)\cdot\vec{x} = \vec{0}$. Die jeweils erhaltenen Eigenvektoren spannen dann einen Unterraum $V_{A,\lambda}$ von V auf, den sogenannten Eigenraum von A zu λ.

$$\begin{aligned} \lambda_1 = 2 \Longrightarrow (A-\lambda_1 E_n) &= \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 3 & 2 & -1 \\ -3 & -1 & 2 \end{pmatrix} \\ \Longrightarrow V_{A,2} &= \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle. \\ \lambda_2 = 5 \Longrightarrow (A-\lambda_2 E_n) &= \begin{pmatrix} -3 & -1 & -1 \\ 3 & -1 & -1 \\ -3 & -1 & -1 \end{pmatrix} \\ \Longrightarrow V_{A,5} &= \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle. \\ \lambda_3 = 3 \Longrightarrow (A-\lambda_3 E_n) &= \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 3 & 1 & -1 \\ -3 & -1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \Longrightarrow V_{A,3} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle. \end{aligned}$$

Die zu den Eigenwerten $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ gehörenden drei Eigenvektoren sind linear unabhängig und bilden daher eine Eigenbasis

$$C = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

von V.
A ist also ähnlich zu

$$M_C^C(f) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix},$$

wobei f der durch A gegebene Endomorphismus ist.
Wir betrachten nun B. Es gilt

$$P_B(x) = \begin{vmatrix} -3-x & 5 & 0 \\ 0 & -3-x & 5 \\ 0 & 0 & -3-x \end{vmatrix} = (-3-x)^3.$$

Angenommen B ist diagonalisierbar. Da nach der Charakterisierung von Diagonalisierbarkeit einer Matrix das Minimalpolynom in lauter verschiedene Linearfaktoren zerfällt, wäre dann $H_B = x+3$.
Jedoch ist

$$H_B(B) = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 & 5 & 0 \\ 0 & -3 & 5 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \neq 0.$$

Dies ist ein Widerspruch zur Definition des Minimalpolynoms (als das die Matrix annullierende normierte Polynom kleinsten positiven Grades). Daher ist B nicht diagonalisierbar. $\square$
Alternative Argumentation: Der klassische Weg sieht folgendermaßen aus: Zur Bestimmung der Eigenvektoren setzten wir den (einzigen) Eigenwert $\lambda = -3$ in das homogene lineare Gleichungssystem $(B - \lambda E_n) \cdot \vec{x} = 0$ ein und lösen dies nach $\vec{x}$ auf.
Im vorliegenden Fall ist

$$B - \lambda E_n = \begin{pmatrix} 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

daher jeder Eigenvektor von der Form $\vec{x} = \begin{pmatrix} \xi \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ (mit $\xi \in \mathbb{R}$). Folglich ist $\dim V_{B,-3} \neq 3$, und es existiert keine Eigenbasis von B. Also ist B nicht diagonalisierbar.

Lösungskizze zu Aufgabe LA80:

Sei A eine Matrix mit den Eigenwerten 1, 2 und 3. Das charakteristische Polynom einer 3×3-Matrix hat den Grad 3 und im vorliegenden Fall die Form

$$P_A(x) = (3-x)(2-x)(1-x).$$

Da das Minimalpolynom $H_A(x)$ dieselben Nullstellen wie $P_A(x)$ besitzt, folgt $H_A(x) = -P_A(x)$. Zerfällt das Minimalpolynom H_A wie im vorliegenden Fall in lauter verschiedene Linearfaktoren, so ist A diagonalisierbar. Weiterhin gilt folgende Äquivalenz: Eine Matrix T ist genau dann diagonalisierbar, wenn sie zu einer Diagonalmatrix ähnlich ist. Ähnliche Matrizen besitzen dieselben Eigenwerte. Sei nun

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

eine Diagonalmatrix mit den Eigenwerten 1, 2 und 3. Wenn es eine Matrix $S \in \mathbb{R}^{(3,3)}$ gibt mit $T = S^{-1}AS$, dann ist T ähnlich zu A und damit ebenfalls diagonalisierbar mit den Eigenwerten 1,2 und 3. Die gesuchte Menge M ist damit

$$M = \{T \in \mathbb{R}^{(3,3)} \mid \text{Es existiert } S \in \mathbb{R}^{(3,3)} \text{ mit } T = S^{-1}AS\}.$$

□

Lösungskizze zu Aufgabe LA81:

Das charakteristische Polynom von A ist

$$P_A(x) = (-1-x)(2-x)(-1-x) = (-1-x)^2(2-x).$$

Also sind die Nullstellen von $P_A(x)$ $\lambda_1 = -1$ und $\lambda_2 = 2$ die beiden einzigen Eigenwerte von A. Ein Eigenvektor $\vec{x} \neq \vec{0}$ zum Eigenwert λ ist eine Lösung des LGS $A\vec{x} = \lambda\vec{x}$, d.h. es muss $(A-\lambda E_n)\vec{x} = \vec{0}$ gelten. Dies ergibt für $\lambda_1 = -1$ das LGS

$$\begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

welches lösbar ist für $x = y = 0$ und $z \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ beliebig. Also gilt

$$V_{A,\lambda_1} = \langle \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle,$$

woraus $\dim V_{A,\lambda_1} = 1$ folgt.
A ist nicht diagonalisierbar, da die algebraische Vielfachheit von $\lambda_1 = -1$ gleich 2, die geometrische Vielfachheit des zugehörigen Eigenraums V_{A,λ_1} aber nur 1 ist. Nur bei Übereinstimmung der algebraischen Vielfachheiten aller Eigenwerte mit den geometrischen Vielfachheiten ihrer jeweiligen Eigenräume ist A diagonalisierbar. □

Lösungskizze zu Aufgabe LA82:

Zu (a): Sei $A = M(f)$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} A^2 = E_2 &\Longrightarrow \det(A)\cdot\det(A) = \det(A^2) = \det(E_2) = 1 \\ &\Longrightarrow |\det(A)| = 1. \end{aligned}$$

$$\det(A-E_2)\cdot\det(A+E_2) = \det(A^2-E_2) = \det(E_2-E_2) = 0.$$

Zu (b): Sei $f(x) = \lambda \cdot x$ für $x \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$. Dann gilt

$$x = \mathrm{id}(x) = f^2(x) = f(f(x)) = f(\lambda x) = \lambda^2 x.$$

Damit ergibt sich sofort (da $x \neq 0$)

$$\lambda^2 = 1 \text{ bzw. } \lambda = \pm 1.$$

Zu (c): Bezüglich einer geeigneten Eigenbasis können folgende Matrizen darstellende Matrizen von Abbildungen f mit den geforderten Eigenschaften sein.
f ist die Identität:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

f ist eine Schrägspiegelung:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \text{ oder } A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

f ist eine Punktspiegelung:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$ □

Lösungskizze zu Aufgabe LA83:

Das charakteristische Polynom P_A von A hat die Gestalt

$$P_A(\lambda) = \det(A - \lambda E_n) = a_0 + a_1\lambda + a_2\lambda^2 + \cdots + a_n\lambda^n.$$

Angenommen $a_0 = 0$, dann wäre $\lambda = 0$ Nullstelle von P_A und 0 ein Eigenwert von A. Es gäbe also einen Vektor $\vec{x} \in K^n$, $\vec{x} \neq \vec{0}$ mit $A\vec{x} = 0\vec{x} = \vec{0}$. Also wäre $\dim \operatorname{Kern} A \geq 1$ und damit nach der Dimensionsformel $\operatorname{rg} A \leq n-1$, insbesondere wäre A nicht mehr regulär, was ein Widerspruch zur Voraussetzung ist, daß A nicht-singulär ist. Also ist $a_0 \neq 0$ und $\lambda = 0$ kein Eigenwert von A. Der Satz von Cayley-Hamilton besagt, daß die Matrix A ihrem eigenen charakteristischen Polynom durch die Bedingung $P_A(A) = 0$ genügt, wobei durch die Null die Nullmatrix bezeichnet wird. Es gilt also

$$\begin{aligned}
& P_A(A) = a_0E_n + a_1A + a_2A^2 + \cdots + a_nA^n = 0 \\
\iff \quad & a_0E_n = -a_1A - a_2A^2 - \cdots - a_nA^n \\
\iff \quad & a_0A^{-1} = -a_1AA^{-1} - a_2A^2A^{-1} - \cdots - a_nA^nA^{-1} \\
\iff \quad & a_0A^{-1} = -a_1E_n - a_2A - \cdots - a_nA^{n-1} \\
\iff \quad & A^{-1} = -\frac{a_1}{a_0}E_n - \frac{a_2}{a_0}A - \cdots - \frac{a_n}{a_0}A^{n-1} \\
\iff \quad & A^{-1} = b_0 + b_1A + \cdots + b_{n-1}A^{n-1},
\end{aligned}$$

wobei $b_{i-1} = -\frac{a_i}{a_0}$ für $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$. □

Lösungskizze zu Aufgabe LA84:

Zu (a):

$$\begin{aligned}
\lambda_1\psi(v_1, v_2) &= \psi(\lambda_1 v_1, v_2) && (\psi \text{ ist bilinear}) \\
&= \psi(f(v_1), v_2) && (\lambda_1 \text{ ist Eigenwert von } f \text{ zu } v_1) \\
&= \psi(v_1, f(v_2)) && (f \text{ ist selbstadjungiert}) \\
&= \psi(v_1, \lambda_2 \cdot v_2) && (\lambda_2 \text{ ist Eigenwert von } f \text{ zu } v_2) \\
&= \lambda_2\psi(v_1, v_2)) && (\psi \text{ ist bilinear})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\implies \quad & (\lambda_1 - \lambda_2)\psi(v_1, v_2) = 0 \\
\implies \quad & \psi(v_1, v_2) = 0 && (\text{da } \lambda_1 \neq \lambda_2) \\
\implies \quad & v_1 \perp v_2
\end{aligned}$$

Zu (b): Seien $v, w \in V$. Da f nach Voraussetzung selbstadjungiert ist, gilt

$$\begin{aligned}
& \psi(f(v), w) = \psi(v, f(w)) \\
\iff \quad & (M_B^B(f) \cdot v)^T M_B(\psi)\, w = v^T M_B(\psi) M_B^B(f) w
\end{aligned}$$

(Es gilt $M_B(\psi) = E_n$, da B ONB ist.)

$$\iff \qquad v^T (M_B^B(f))^T w = v^T M_B^B(f) w$$

(, da $v, w \in V$ beliebig, also z. B. als Einheitsvektoren, gewählt werden können.)

$$\iff \qquad (M_B^B(f))^T = M_B^B(f)$$

□

Lösungskizze zu Aufgabe LA86:

Zu (a): Da λ Eigenwert von A ist, gibt es einen Vektor $\vec{v} \neq \vec{0}$ mit $A\vec{v} = \lambda\vec{v}$. Es folgt

$$\begin{aligned} A\vec{v} = \lambda\vec{v} &\Longrightarrow \overline{A\vec{v}} = \overline{\lambda\vec{v}} \\ &\Longrightarrow \overline{A} \cdot \overline{\vec{v}} = \overline{\lambda} \cdot \overline{\vec{v}} \\ &\Longrightarrow A \cdot \overline{\vec{v}} = \overline{\lambda} \cdot \overline{\vec{v}}, && \text{da } A \text{ reelle Matrix ist.} \end{aligned}$$

Also ist auch $\overline{\lambda}$ Eigenwert von A mit Eigenvektor $\overline{\vec{v}}$.

Zu (b): Es gilt $A = A^T$, da A symmetrisch ist. Seien $\lambda \neq \mu$ zwei verschiedene Eigenwerte von A. Dann gibt es zwei Vektoren $\vec{v} \neq \vec{0}$ und $\vec{w} \neq \vec{0}$ mit $A\vec{v} = \lambda\vec{v}$ und $A\vec{w} = \mu\vec{w}$. Es gilt

$$\begin{aligned} \lambda\langle\vec{v},\vec{w}\rangle &= \lambda\vec{v}^{\,T}\overline{\vec{w}}, && \text{da das Skalarprodukt kanonisch ist} \\ &= \lambda\vec{v}^{\,T}\vec{w}, && \text{da } \vec{w} \text{ reell} \\ &= (\lambda\vec{v})^T\vec{w} \\ &= (A\vec{v})^T\vec{w} \\ &= \vec{v}^{\,T}A^T\vec{w} \\ &= \vec{v}^{\,T}A\vec{w}, && \text{da } A \text{ symmetrisch} \\ &= \vec{v}^{\,T}(\mu\vec{w}) \\ &= \mu\vec{v}^{\,T}\vec{w} \\ &= \mu\langle\vec{v},\vec{w}\rangle. \end{aligned}$$

Da $\lambda \neq \mu$ und $\lambda \neq 0 \neq \mu$, folgt $\langle\vec{v},\vec{w}\rangle = 0$.

Zu (c): Sei λ Eigenwert von A. Dann gibt es einen komplexwertigen Vektor $\vec{v} \neq \vec{0}$ mit $A\vec{v} = \lambda\vec{v}$. Es gilt $\vec{v} \in \mathbb{C}^{(n,1)}$. Dann folgt

$$\begin{aligned} \lambda\langle\vec{v},\vec{v}\rangle &= \lambda\vec{v}^{\,T}\overline{\vec{v}}, && \text{mit dem kanonischen Skalarprodukt} \\ &= (\lambda\vec{v})^T\overline{\vec{v}} \\ &= (A\vec{v})^T\overline{\vec{v}} \\ &= \vec{v}^{\,T}A^T\overline{\vec{v}} \\ &= \vec{v}^{\,T}A\overline{\vec{v}}, && \text{da } A \text{ symmetrisch} \\ &= \vec{v}^{\,T}\overline{A}\overline{\vec{v}}, && \text{da } A \text{ reellwertig} \\ &= \vec{v}^{\,T}(\overline{\lambda}\overline{\vec{v}}) \\ &= \overline{\lambda}\vec{v}^{\,T}\overline{\vec{v}} \\ &= \overline{\lambda}\langle\vec{v},\vec{v}\rangle. \end{aligned}$$

Damit folgt $\lambda = \overline{\lambda}$, also ist $\lambda \in \mathbb{R}$. □

Lösungskizze zu Aufgabe LA87:

Sei $f \in End_K(V)$ und alle Vektoren $v \in V \setminus \{0\}$ seien Eigenvektoren von f. Dann gibt es nach Definition eines Eigenvektors für jedes $v \in V \setminus \{0\}$ ein $\lambda_v \in K$ mit $f(v) = \lambda_v \cdot v$.

1. Fall: $\dim V = 1$.

Sei $b \in V$, $b \neq 0$. Dann ist $\{b\}$ Basis von V. Nach Voraussetzung ist $f(b) = \lambda_b \cdot b$.

2. Fall: $\dim V \geq 2$.

Seien $b_1, b_2 \in V$ zwei linear unabhängige Vektoren. Dann gilt nach Voraussetzung

$$f(b_1) = \lambda_{b_1} \cdot b_1 \quad \text{und} \quad f(b_2) = \lambda_{b_2} \cdot b_2.$$

Wegen $b_1 + b_2 \neq 0$ existiert ein $\mu \in K$ mit

$$f(b_1 + b_2) = \mu(b_1 + b_2) = \mu \cdot b_1 + \mu \cdot b_2.$$

Andererseits gilt

$$f(b_1 + b_2) = f(b_1) + f(b_2) = \lambda_{b_1} \cdot b_1 + \lambda_{b_2} \cdot b_2,$$

da f linear ist. Insgesamt folgt nun

$$\begin{aligned} & \lambda_{b_1} b_1 + \lambda_{b_2} b_2 = \mu \cdot b_1 + \mu \cdot b_2 \\ \Longleftrightarrow & (\lambda_{b_1} - \mu) b_1 + (\lambda_{b_2} - \mu) b_2 = 0 \\ \Longleftrightarrow & (\lambda_{b_1} - \mu) = (\lambda_{b_2} - \mu) = 0, \qquad && \text{da } b_1 \text{ und } b_2 \text{ l.u.} \\ \Longleftrightarrow & \lambda_{b_1} = \lambda_{b_2} = \mu. \end{aligned}$$

Also sind je zwei linear unabhängige Vektoren Eigenvektoren zum selben Eigenwert λ. Wenn $B = \{b_i | i \in I\}$ eine Basis von V ist, gilt damit $f(b_i) = \lambda \cdot b_i = \lambda \cdot \mathrm{id}_V(b_i)$. Nach dem Satz von der linearen Fortsetzung ist f durch die Wirkung auf eine Basis von V eindeutig bestimmt, so daß alle gesuchten Endomorphismen von der Form sind

$$f = \lambda \cdot \mathrm{id}_V, \quad \lambda \in K.$$

□

Lösungskizze zu Aufgabe LA88:

Zu (a): Zu zeigen ist $||P_0|| = ||P_1|| = 1$ und $\langle P_0, P_1 \rangle = 0$. Es gilt

$$\begin{aligned} ||P_0|| = \sqrt{\langle P_0, P_0 \rangle} &= \sqrt{\int_{-1}^{1} \frac{\sqrt{2}}{2} id^0(x) \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} id^0(x) dx} \\ &= \sqrt{\int_{-1}^{1} \frac{1}{2} dx} = \sqrt{\frac{x}{2}\Big|_{-1}^{+1}} \\ &= 1. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} ||P_1|| = \sqrt{\langle P_1, P_1 \rangle} &= \sqrt{\int_{-1}^{1} \frac{\sqrt{6}}{2} id^1(x) \cdot \frac{\sqrt{6}}{2} id^1(x) dx} \\ &= \sqrt{\int_{-1}^{1} \frac{3}{2} x^2 dx} = \sqrt{\frac{x^3}{2}\Big|_{-1}^{+1}} \\ &= 1. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\langle P_0, P_1\rangle &= \int_{-1}^{1} P_0(x)P_1(x)dx = \int_{-1}^{1} \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{6}}{2}xdx\\ &= \int_{-1}^{1}\frac{\sqrt{3}}{2}xdx = \frac{\sqrt{3}x^2}{4}\Big|_{-1}^{+1}\\ &= 0.\end{aligned}$$

Zu (b): Wir verwenden das Schmidt'sche Orthonormalisierungsverfahren, um einen Vektor P_2 zu bestimmen, so daß $\langle P_2, P_0\rangle = 0$ und $\langle P_2, P_1\rangle = 0$ sowie $||P_2|| = 1$. P_0, P_1, P_2 bilden dann eine Orthonormalbasis von U. Es gilt

$$\begin{aligned}\hat{P}_2 &= id^2 - P_0\cdot\langle P_0, id^2\rangle - P_1\cdot\langle P_1, id^2\rangle\\ &= x^2 - \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\int_{-1}^{1}\frac{\sqrt{2}}{2}x^2dx - \frac{\sqrt{6}}{2}x\cdot\int_{-1}^{1}\frac{\sqrt{6}}{2}x^3dx\\ &= x^2 - \frac{1}{3}.\end{aligned}$$

Um P_2 zu bekommen müssen wir nur noch $\hat{P}_2$ normieren. Es gilt

$$||\hat{P}_2|| = \sqrt{\langle\hat{P}_2, \hat{P}_2\rangle} = \sqrt{\int_{-1}^{1}\left(x^2 - \frac{1}{3}\right)^2 dx} = \frac{4}{3\sqrt{10}}.$$

Also ist $P_2 = \frac{(id^2 - \frac{1}{3})\cdot 3\sqrt{10}}{4} = \frac{3\sqrt{10}}{4}id^2 - \frac{\sqrt{10}}{4}$ der gesuchte Vektor. □

Lösungskizze zu Aufgabe LA89:

Ein Skalarprodukt hat die Koordinatendarstellung

$$\langle x, y\rangle = \begin{pmatrix} x_1 & x_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b\\ b & c\end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1\\ y_2\end{pmatrix},$$

da es sich in $\mathbb{R}$ um eine symmetrische Bilinearform handelt. Wir setzen die gegebenen Bedingungen in die Gleichung ein und bekommen

$$1 = \begin{pmatrix} 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b\\ b & c\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1\\ 0\end{pmatrix} \Longrightarrow a = 1,$$

$$0 = \begin{pmatrix} 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & b\\ b & c\end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1\\ 1\end{pmatrix} \Longrightarrow b = 1,$$

$$1 = \begin{pmatrix} -1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1\\ 1 & c\end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1\\ 1\end{pmatrix} \Longrightarrow c = 2,$$

Als Fundamentalmatrix des Skalarprodukts bzgl. der kanonischen Basis kommt also höchstens die Matrix $M = \begin{pmatrix} 1 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix}$ in Frage. Zu zeigen bleibt, daß M positiv definit ist. Es gilt

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 & x_2\end{pmatrix} = x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 + x_2^2 \geq 0,$$

sowie

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix} = (x_1+x_2)^2 + x_2^2 = 0 \Longrightarrow x_1 = x_2 = 0.$$

Als Alternativlösung hätte man auch die Basis

$$B = (b_1, b_2) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

wählen können, bzgl. der die Fundamentalmatrix die Form

$$M = \begin{pmatrix} \langle b_1, b_1 \rangle & \langle b_1, b_2 \rangle \\ \langle b_2, b_1 \rangle & \langle b_2, b_2 \rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

hat. Dass M positiv definit ist, sieht man sofort.

Lösungskizze zu Aufgabe LA90:

Zu (a): Wir verwenden die Eigenschaft $|z|^2 = z\bar{z}$, die für alle $z \in \mathbb{C}$ gilt. Seien $a = v + iw$ und $b = x + iy$ zwei komplexe Zahlen, wobei $v, w, x, y \in \mathbb{R}$. Dann gilt

$$\begin{aligned} |a+b|^2 &= (a+b)(\overline{a+b}) \\ &= (v+iw+x+iy)(v-iw+x-iy) \\ &= v^2 - ivw + vx - ivy + ivw - i^2w^2 + iwx - i^2wy \\ &\quad + vx - iwx + x^2 - ixy + ivy - i^2wy + ixy - i^2y^2 \\ &= v^2 + 2vx + w^2 + x^2 + 2wy + y^2. \end{aligned}$$

Weiterhin gilt

$$\begin{aligned} |a-b|^2 &= (a-b)(\overline{a-b}) \\ &= (v+iw-x-iy)(v-iw-x+iy) \\ &= v^2 - ivw - vx + ivy + ivw - i^2w^2 - iwx + i^2wy \\ &\quad - vx + iwx + x^2 - ixy - ivy + i^2wy + ixy - i^2y^2 \\ &= v^2 - 2vx + w^2 + x^2 - 2wy + y^2. \end{aligned}$$

Damit gilt insgesamt

$$|a+b|^2 + |a-b|^2 = 2(v^2 + w^2 + x^2 + y^2).$$

Aus

$$|a|^2 = |v+iw|^2 = (v+iw)(v-iw) = v^2 + w^2$$

und

$$|b|^2 = |x+iy|^2 = (x+iy)(x-iy) = x^2 + y^2$$

folgt nun

$$|a+b|^2 + |a-b|^2 = 2(|a|^2 + |b|^2).$$

Zu (b): Für eine durch ein Skalarprodukt Φ definierte Norm $||.||$ gilt $||a|| = \sqrt{\Phi(a,a)}$ für alle $a \in V$. Damit ergibt sich

$$\begin{aligned} ||a+b||^2 &= \Phi(a+b, a+b) \\ &= \Phi(a,a) + \Phi(a,b) + \Phi(b,a) + \Phi(b,b), \qquad \text{da } \Phi \text{ additiv ist} \end{aligned}$$

Weiterhin gilt

$$\begin{aligned}
||a-b||^2 &= \Phi(a-b, a-b) \\
&= \Phi(a,a)+\Phi(a,-b)+\Phi(-b,a)+\Phi(-b,-b), \qquad \text{da } \Phi \text{ additiv ist} \\
&= \Phi(a,a)-\Phi(a,b)-\Phi(b,a)+\Phi(b,b)
\end{aligned}$$

Also folgt

$$\begin{aligned}
||a+b||^2+||a-b||^2 &= \Phi(a,a)+\Phi(a,b)+\Phi(b,a)+\Phi(b,b)+ \\
&\qquad \Phi(a,a)-\Phi(a,b)-\Phi(b,a)+\Phi(b,b) \\
&= 2(\Phi(a,a)+2\Phi(b,b)) \\
&= 2(||a||^2+||b||^2).
\end{aligned}$$

Zu (c): Die geometrische Interpretation der bewiesenen Gleichung ist die, daß die Summe der Quadrate der vier Seiten eines Parallelogramms gleich der Summe der Quadrate der beiden Diagonalen des Parallelogramms ist. □

Lösungskizze zu Aufgabe LA91:

Zu (a): Wir zerlegen die angegebene Permutation in Zyklenform und bekommen

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & 5 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & 5 \end{pmatrix}$$

Der Zyklus $(1,2,3)$ hat die Ordnung 3, der Zyklus $(4,5)$ hat die Ordnung 2. Es gilt also $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}^3 = \mathrm{id}$ und $\begin{pmatrix} 4 & 5 \end{pmatrix}^2 = \mathrm{id}$. Wegen $1202 \equiv 2 \pmod 3$ und $1202 \equiv 0 \pmod 2$ folgt nun

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & 5 & 4 \end{pmatrix}^{1202} &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}^{1202}\begin{pmatrix} 4 & 5 \end{pmatrix}^{1202} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}^2 \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & 2 & 4 & 5 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Zu (b): Wir zerlegen die angegebene Permutation in Zyklenform und bekommen

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 7 & 5 & 1 & 2 & 4 & 3 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 7 & 6 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 5 & 4 \end{pmatrix}.$$

Der Zyklus $\begin{pmatrix} 1 & 7 & 6 & 3 \end{pmatrix}$ hat die Ordnung 4, der Zyklus $\begin{pmatrix} 2 & 5 & 4 \end{pmatrix}$ hat die Ordnung 3. Es gilt also $\begin{pmatrix} 1 & 7 & 6 & 3 \end{pmatrix}^4 = \mathrm{id}$ und $\begin{pmatrix} 2 & 5 & 4 \end{pmatrix} = \mathrm{id}$. Wegen $1111 \equiv 3 \pmod 4$ und $1111 \equiv 1 \pmod 3$ folgt nun

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 7 & 5 & 1 & 2 & 4 & 3 & 6 \end{pmatrix}^{1111} &= \begin{pmatrix} 1 & 7 & 6 & 3 \end{pmatrix}^{1111}\begin{pmatrix} 2 & 5 & 4 \end{pmatrix}^{1111} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 7 & 6 & 3 \end{pmatrix}^3\begin{pmatrix} 2 & 5 & 4 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 5 & 6 & 2 & 4 & 7 & 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

□

Lösungskizze zu Aufgabe LA92:

Angenommen $e+\pi$ und $e-\pi$ sind beide rational, also $e+\pi \in \mathbb{Q}$ und $e-\pi \in \mathbb{Q}$. Wegen der Abgeschlossenheit des Körpers $\mathbb{Q}$ bzgl. der Addition folgt $(e+\pi)+(e-\pi) = 2e \in \mathbb{Q}$. Bekanntlich gilt jedoch $e \notin \mathbb{Q}$, also auch $2e = e+e \notin \mathbb{Q}$. Also war die Annahme falsch. Mindestens eine der beiden Zahlen $e+\pi$ und $e-\pi$ ist irrational. $\square$

Lösungskizze zu Aufgabe LA93:

Zu (a): Zunächst ist zeigen, dass τ linear ist, also $\tau(\vec{v}+\vec{w}) = \tau(\vec{v})+\tau(\vec{w})$ und $\tau(\lambda\vec{v}) = \lambda\tau(\vec{v})$ für alle $v,w \in V$ und alle $\lambda \in K$ gilt.

Dazu betrachte man die Definition von τ und nutze die Linearität von μ.

Wir bestimmen nun $\operatorname{Kern}\tau$.

Sei $\vec{v} \in \operatorname{Kern}\tau$, so gilt

$$\vec{0} = \tau(\vec{v}) = \vec{v} - \mu(\vec{v})\vec{a},$$

also ist

$$\vec{v} = \mu(\vec{v})\vec{a} \in \operatorname{Kern}\mu,$$

da $\mu(\vec{v}) \in K$ und $\vec{a} \in \operatorname{Kern}\mu$ ist. Hieraus folgt nun $\mu(\vec{v})\vec{0}$ und damit $\vec{v} = \vec{0}$, d.h. $\operatorname{Kern}\tau = \{\vec{0}\}$. Dies zeigt die Injektivität von τ und da $\dim V < \infty$ ist τ auch surjektiv, also ist τ bijektiv.

Zu (b): Sei nun $v \in Kern\,\mu$. Dann gilt

$$\tau(\vec{v}) = \vec{v} - \mu(\vec{v})\vec{a} = \vec{v} - 0\vec{a} = \vec{v}.$$

Also ist $\tau|_H = id$.

Zu (c): Sei nun $v \notin \operatorname{Kern}\mu$, also $\mu(\vec{v}) \neq 0$. Dann gilt

$$\tau(\vec{v}) = \vec{v} - \mu(\vec{v})\vec{a} \neq \vec{v},$$

da $\mu(\vec{v})\vec{a} \neq \vec{0}$, wegen $\vec{a} \neq \vec{0}$ und i$\mu(\vec{v}) \neq 0$.

Also hat τ außerhalb von H keinen Fixpunkt. $\square$

Lösungskizze zu Aufgabe LA94:

M hat die Gestalt

$$M = \begin{pmatrix} a_1b_1 & a_1b_2 & \dots & a_1b_n \\ a_2b_1 & a_2b_2 & \dots & a_2b_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_nb_1 & a_nb_2 & \dots & a_nb_n \end{pmatrix}.$$

Man sieht, dass die Spalten von M lineare Vielfache des Vektors $\vec{a} \in \mathbb{R}^n$ sind, wobei

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}.$$

Also gilt $\operatorname{rg} M \leq 1$. Wenn

$$\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix},$$

dann gilt

$$\operatorname{rg} M = \begin{cases} 1 & \text{wenn } \vec{a} \neq \vec{0} \text{ und } \vec{b} \neq \vec{0} \\ 0 & \text{wenn } \vec{a} = \vec{0} \text{ oder } \vec{b} = \vec{0} \end{cases}$$

Interpretiert man M als darstellende Matrix einer linearen Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, so folgt aus der Dimensionsformel

$$\dim \operatorname{Kern} f = \begin{cases} n-1 & \text{wenn } \vec{a} \neq \vec{0} \text{ und } \vec{b} \neq \vec{0} \\ n & \text{wenn } \vec{a} = \vec{0} \text{ oder } \vec{b} = \vec{0} \end{cases}$$

$\dim Kern\ f = n$ bedeutet, dass die Dimension des Lösungsraums L_0 der homogenen linearen Gleichung $M \cdot \vec{x} = \vec{0}$ gleich n ist, dass also ganz $\mathbb{R}^n$ eine Lösung des LGS darstellt. In diesem Fall ist M die Nullmatrix.
$\dim Kern\ f = n-1$ bedeutet, dass $\dim L_0 = n-1$, dass L_0 also eine Hyperebene im $\mathbb{R}^n$ ist. □

Lösungskizze zu Aufgabe LA95:

Wir berechnen zunächst das charakteristische Polynom von A.

$$\begin{aligned} \chi_A &= \det(A - \lambda E_3) \\ &= \det \begin{pmatrix} \frac{3}{2} - \lambda & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{3}{2} - \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 2 - \lambda \end{pmatrix} \\ &= \left(\frac{3}{2} - \lambda\right)^2 (2-\lambda) - \frac{1}{4}(2-\lambda) \\ &= (2-\lambda)\left(\left(\frac{3}{2} - \lambda\right)^2 - \frac{1}{4}\right) \end{aligned}$$

Also ist $\lambda_1 = 2$ Eigenwert von A. Mit der pq-Formel folgt, dass $\lambda_2 = 2$ und $\lambda_3 = 1$ Eigenwerte von A sind. $\lambda_1 = \lambda_2 = 2$ ist also eine doppelte Nullstelle des charakteristischen Polynoms χ_A.
Wir bestimmen nun die Eigenräume $V_{A,\lambda_{1/2}}$ und V_{A,λ_3}. Es gilt: Wenn $\vec{x} \in V_{A,\lambda_i}$, dann ist $(A - \lambda_i E_3) \cdot \vec{x} = \vec{0}$. Wir stellen folgendes Gleichungssystem auf:

$$\begin{pmatrix} \frac{3}{2} - 2 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{3}{2} - 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Auflösen des Systems ergibt für $\vec{x}$ als einzige Bedingung $x_1 = x_2$. Damit ist sowohl

$$\vec{p}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in V_{A,\lambda_{1/2}} \text{ als auch } \vec{p}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \in V_{A,\lambda_{1/2}}.$$

$\vec{p}_1$ und $\vec{p}_2$ sind linear unabhängige Eigenvektoren zum Eigenwert $\lambda_{1/2} = 2$ und bilden damit eine Basis des Eigenraums $V_{A,\lambda_{1/2}}$.
Analog erhält man durch Auflösen des Gleichungssystems

$$\begin{pmatrix} \frac{3}{2} - 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{3}{2} - 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

als Bedingungen $x_1 = -x_2$ und $x_3 = 0$. Daher wird der Eigenraum V_{A,λ_3} von $\vec{p}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ aufgespannt.

Man sieht sofort, dass $\vec{p}_1, \vec{p}_2$ und $\vec{p}_3$ linear unabhängig sind. Also ist $B = (\vec{p}_1, \vec{p}_2, \vec{p}_3)$ eine aus Eigenvektoren von A bestehende Basis von V. Allerdings bilden diese drei Vektoren bzgl. des kanonischen Skalarprodukts Φ keine Orthonormalbasis, da z.B. $\vec{p}_1 \not\perp_\Phi \vec{p}_2$. Um eine Orthonormalbasis zu erhalten, wenden wir das Schmidt'sche Orthonormalisierungsverfahren an. Dieses transformiert die Menge $\{\vec{p}_1, \vec{p}_2, \vec{p}_3\}$ l.u. Vektoren in eine Menge $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ l.u. Vektoren, die zusätzlich zueinander orthonormal sind.
Die Vektoren $\vec{e}_i$ lassen sich dabei nach folgender Regel berechnen:

$$\begin{aligned}
\vec{e}_1 &:= \frac{\vec{p}_1}{||\vec{p}_1||}, \\
\vec{e}_{j+1} &:= \frac{\vec{b}_{j+1}}{||\vec{b}_{j+1}||} \text{ mit } \vec{b}_{j+1} := \vec{p}_{j+1} - \sum_{i=1}^{j} \Phi(\vec{p}_{j+1}, \vec{e}_i)\vec{e}_i.
\end{aligned}$$

Damit folgt nun zunächst

$$\vec{e}_1 := \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Weiterhin folgt

$$\begin{aligned}
\vec{b}_2 &= \vec{p}_2 - \Phi(\vec{p}_2, \vec{e}_1)\vec{e}_1 \\
&= \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \Phi\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{2}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Da $||\vec{b}_2|| = \sqrt{6}$, folgt

$$\vec{e}_2 := \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Schließlich gilt

$$\vec{b}_3 = \vec{p}_3 - \Phi(\vec{p}_3, \vec{e}_1)\vec{e}_1 - \Phi(\vec{p}_3, \vec{e}_2)\vec{e}_2.$$

Da $\Phi(\vec{p}_3, \vec{e}_1) = 0$ und $\Phi(\vec{p}_3, \vec{e}_2) = 0$, folgt $\vec{b}_3 = \vec{p}_3$ und damit

$$\vec{e}_3 := \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Man sieht sofort, dass $\vec{e}_1, \vec{e}_2 \in V_{A,\lambda_{1/2}}$ und $\vec{e}_3 \in V_{A,\lambda_3}$. Also bilden $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ eine Orthonormalbasis C von V aus Eigenvektoren von A.
Sei B die Kanonische Basis und $S = M_B^C(id_V)$, also

$$S = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{2}{\sqrt{6}} & 0 \end{pmatrix}$$

dann gilt:

$$S^T A S = D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

D ist eine Diagonalmatrix mit Eigenwerten von A.

Lösungsskizze zu Aufgabe LA96:

Man betrachte die Vektoren

$$\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}.$$

Lösungsskizze zu Aufgabe LA98:

(i) Wegen $\operatorname{char} K \neq 2$ gilt $\lambda_1 = 1 \neq -1 = \lambda_2$; da Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten linear unabhängig sind, existiert eine Basis $B = (v_1, v_2)$ aus Eigenvektoren zu den Eigenwerten λ_1 und λ_2.
(ii) Für diese gilt

$$f^2(v_i) = f(\lambda_i v_i) = \lambda_i^2 v_i = v_i \qquad (i = 1,2).$$

Da B Basis ist und $f^2|_B = \mathrm{id}|_B$, folgt die Behauptung mit dem 'Fortsetzungssatz', also wegen der eindeutigen Fortsetzbarkeit einer auf einer Basis gegebenen linearen Abbildung. □

Anmerkung: Alternativ zu (ii) kann man auch wie folgt argumentieren: Ist A die f bzgl. Basis B darstellende Matrix, so gilt

$$A = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix} \text{ und damit } A^2 = I,$$

woraus die Behauptung folgt.

Lösungsskizze zu Aufgabe LA99:

(a) Da $W = \langle u, v\rangle$ und u, v linear unabhängig sind, folgt $\dim\, W = 2$; nach der Dimensionsformel für orthogonale Unterräume gilt

$$\dim\, W^\perp = \dim \mathbb{R}^4 - \dim W = 4 - 2 = \underline{2}.$$

(b) Wir suchen Vektoren $x = (\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4)$ aus $W^\perp$:

$$\begin{aligned}
x \in W^\perp &\iff u \cdot x = 0 = v \cdot x\\
&\iff \begin{pmatrix}1 & 0 & -1 & 2\\ 2 & 0 & 2 & -1\end{pmatrix} x^T = 0\\
&\iff \begin{pmatrix}1 & 0 & -1 & 2\\ 0 & 0 & 4 & -5\end{pmatrix} (\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4)^T = 0\\
&\iff \begin{cases}\xi_1 - \xi_3 + 2\xi_4 = 0\\ 4\xi_3 - 5\xi_4 = 0\end{cases}
\end{aligned}$$

Wir erhalten z. B. $w_1 = (0,1,0,0)$ und $w_2 = (-3,0,5,4) \in W^\perp$ (Probe ?[1]), sodass (w_1, w_2) eine Basis von $W^\perp$ ist.

(c) Es gilt $w_1 = (0,1,0,0) \perp (-3,0,5,4) = w_2$; durch Normierung folgt, dass $B = \Big((0,1,0,0), \big(\frac{3}{\sqrt{50}}, 0, \frac{5}{\sqrt{50}}, \frac{4}{\sqrt{50}}\big)\Big)$ eine Orthonormalbasis von $W^\perp$ ist. □

Anmerkung: Bei ungünstiger Wahl von w_2 kann man analog zu folgendem Beispiel vorgehen:
Es sind $w_1 = (0,1,0,0)$ und $w_2' = (-3,1,5,4)$ Elemente von $W^\perp$. Wir suchen einen Vektor aus $W^\perp$, der senkrecht zu w_1 ist. Sei daher

$$[(-3,1,5,4)\lambda + (0,1,0,0)\mu] \cdot (0,1,0,0) = 0,$$

[1] Sind nicht, wie hier, alle Umformungen Äuivalenzumformungen, so ist (wegen der Beweisrichtung) die Probe unerlässlich.

und damit $\lambda + \mu = 0$, also z. B. $\lambda = 1 = -\mu$. Man erhält somit

$$B' = \{(0,1,0,0),(-3,0,5,4)\}$$

als Basis und kann dann wie in Teil (c) fortfahren.
Eine Alternative dazu ist die Anwendung des Schmidtschen Orthonormierungs-Verfahrens.

Themenindex