



# Kapitel 3

## Flüsse, Transversalen und Vertretersysteme

### 3.1 Flüsse in Netzwerken

#### 3.1.1 Definitionen und erste Ergebnisse

a) Definition **Netzwerk**: Ein endlicher zusammenhängender einfacher gerichteter Graph  $\vec{G}(V, K)$  mit einem Paar  $(q, s)$  ausgezeichneter Knoten heißt *Netzwerk* mit *Quelle*  $q$  und *Senke*  $s$ . Bezeichnung:  $\vec{G}(q, s)$ .

Unter der **Kapazität**  $c$  in  $\vec{G}(q, s)$  versteht man eine Abbildung  $c : K \rightarrow \mathbb{Z}_0^+$  (bzw.  $\mathbb{R}_0^+$ ), durch die also jeder Kante eine nicht-negative ganze (bzw. reelle) Zahl zugeordnet ist.

b) Definition **Fluss**: Für eine Abbildung  $f : K \rightarrow \mathbb{Z}$  bzw.  $\mathbb{R}$  bezeichnet

$$(\partial f)(v) := \sum_{\substack{k \in K \\ k^+ = v}} f(k) - \sum_{\substack{\ell \in K \\ \ell^- = v}} f(\ell)$$

den Nettofluss in  $v$  (totaler Einfluß minus totaler Ausfluß aus  $v$ ), s. Abb. 3.1. Gilt für diesen

$$\partial f(v) = 0 \quad (\text{Kirchhoffsche Regel})$$

für alle  $v \in V \setminus \{q, s\}$ , so heißt  $f$  ein (ganzzahliger bzw. reellwertiger) **Fluss**. Ist zusätzlich  $0 \leq f(k) \leq c(k)$  (und  $f(k) \in \mathbb{Z}$  im ganzzahligen Fall) für alle  $k \in K$ , so heißt  $f$  **zulässig**.

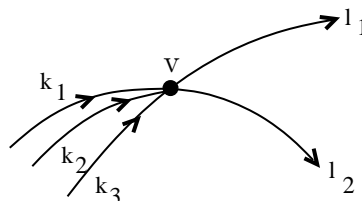


Abbildung 3.1: Zum Begriff Netto-Einfluss

$$\partial f(v) = \sum_{k^+=v} f(k) - \sum_{l^-=v} f(l)$$

**Definition und Hilfssatz**

Für den Wert eines Flusses  $w(f) := \partial f(s)$  gilt

$$w(f) = -\partial f(q).$$

Der Netto-Einfluss in die Senke, der Wert eines Flusses, ist also gleich dem Netto-Ausfluss aus der Quelle.

*Beweis:* Durch Betrachten des Beitrags einer Kante  $k$  zu den beiden Enden und Beachten der Kirchhoffschen Regel sieht man:

$$0 = \sum_{v \in V} \partial f(v) = \sum_{v \in V \setminus \{q, s\}} \partial f(v) + \partial f(q) + \partial f(s) = 0 + \partial f(q) + \partial f(s). \square$$

Ein Hauptproblem der Flusstheorie ist die Suche nach **optimalen Flüssen**, das heißt zulässigen Flüssen größtmöglichen Wertes  $w(f)$ .

*Anwendungsbeispiele* (vgl. 1.1.3):

- (i) System von Wasser-Pipelines mit dem Punkt der Wassereinspeisung als Quelle, mit den Wasserausflüssen als Senken (hier beschränken wir uns zunächst auf eine Senke; eine Verallgemeinerung ist aber leicht möglich, s. Übungsaufgabe ?) und mit den Leitungen und möglichen Durchflussmengen als Kanten mit Kapazitäten.
- (ii) Straßensystem: Kapazität der Straßen als die Maximalzahl von Wagen, die diese pro Zeiteinheit befahren können.
- (iii) Nachrichtenleitungen eines Kommunikationssystems als Kanten mit den maximalen Übertragungsraten als Kapazitäten.

c) Definition **Schnitt**: Ein *Schnitt* von  $\vec{G}(q, s)$  ist eine Partition der Eckenmenge  $V = X \dot{\cup} Y$  mit  $q \in X$  und  $s \in Y$ . Die **Kapazität** des Schnitts  $(X, Y)$  ist definiert als (s. Abb. 3.2):

$$c(X, Y) := \sum_{\substack{k \in K \\ k^- \in X, k^+ \in Y}} c(k).$$

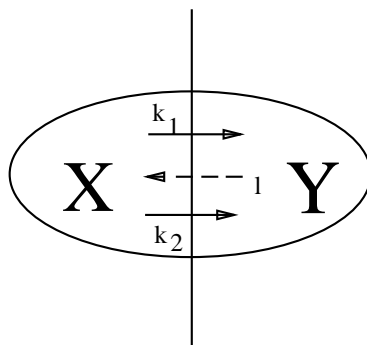


Abbildung 3.2: Zur Kapazität eines Schnittes

Es gilt laut Definition:  $c(X, Y) = c(k_1) + c(k_2)$  sowie  $\vec{f}(X, Y) = f(k_1) + f(k_2)$  und  $\vec{f}(Y, X) = f(l)$ .

d) Für einen Fluss  $f$  und einen Schnitt  $(X, Y)$  definieren wir als (*gerichteten*) **Fluss von X nach Y**:

$$\vec{f}(X, Y) := \sum_{\substack{k^- \in X \\ k^+ \in Y}} f(k) \quad \text{und als Rückfluß} \quad \vec{f}(Y, X) := \sum_{\substack{\ell^+ \in X \\ \ell^- \in Y}} f(\ell).$$

e) Erste Informationen über die maximale Größe eines Flusses liefert der folgende Hilfssatz:

**Hilfssatz.** Ist  $f$  ein Fluss im Netzwerk  $\vec{G}(q, s)$ , so gilt

(i)  $w(f) = \vec{f}(X, Y) - \vec{f}(Y, X)$   
für jeden Schnitt  $(X, Y)$  des Netzwerks und damit

(ii)  $w(f) \leq \min_{(X, Y) \text{ Schnitt}} c(X, Y)$ .

*Beweisskizze* (s.z.B. [PSW] p.446f):

$$\begin{aligned}
 \text{(i) } w(f) &= \partial f(s) + 0 = \sum_{y \in Y} \partial f(y) = \sum_{y \in Y} \left( \sum_{k^+ = y} f(k) - \sum_{\ell^- = y} f(\ell) \right) \\
 &= \sum_{y \in Y} \left( \sum_{k^+ = y, k^- \in X} f(k) + \sum_{k^+ = y, k^- \in Y} f(k) - \sum_{\ell^- = y, \ell^+ \in Y} f(\ell) - \sum_{\ell^- = y, \ell^+ \in X} f(\ell) \right) \\
 &= \sum_{k^+ \in Y, k^- \in X} f(k) + \underbrace{\sum_{k^+ \in Y, k^- \in Y} f(k) - \sum_{\ell^- \in Y, \ell^+ \in Y} f(\ell)}_0 - \sum_{\ell^- \in Y, \ell^+ \in X} f(\ell) \\
 &= \vec{f}(X, Y) - \vec{f}(Y, X)
 \end{aligned}$$

(ii) Für jeden Schnitt  $(X, Y)$  gilt, da  $f$  zulässig ist:

$$w(f) = \vec{f}(X, Y) - \vec{f}(Y, X) \leq \vec{f}(X, Y) \leq \sum_{k^- \in X, k^+ \in Y} c(k) = c(X, Y).$$

Die Menge der Kapazitäten von Schnitten ist durch 0 nach unten beschränkt und, weil es nur endlich viele Schnitte in  $\vec{G}(q, s)$  gibt, abgeschlossen. Daher existiert ein Minimum und ein Schnitt  $(X_0, Y_0)$  mit

$$\min c(X, Y) = c(X_0, Y_0) \geq w(f). \quad \square$$

### 3.1.2 Maximum-Fluss–Minimum-Schnitt-Satz

a) In einem Netzwerk ist also die minimale Kapazität eines Schnittes eine obere Schranke für den Wert jeden Flusses. Wir wollen zeigen, dass diese Schranke stets angenommen werden kann, also folgender Satz gilt (Maximum-Fluss–Minimum-Schnitt-Satz, im Englischen auch „Max-flow min-cut“-Theorem genannt), vgl. [Ai<sub>5</sub>]p. 132, [Di],[We]:

**Satz 3.1 ( Satz von Ford und Fulkerson, 1956)** *In einem Netzwerk  $\vec{G}(q, s)$  mit Kapazität  $c$  gilt*

$$\max_{\substack{f \text{ zulässiger} \\ \text{Fluss}}} w(f) = \min_{(X, Y) \text{ Schnitt}} c(X, Y)$$

b) *Beispiel* s. Abb. 3.3 !

c) Ein *Beweis zum Satz von Ford und Fulkerson* ergibt sich aus den (in den nächsten Abschnitten beschriebenen) Konstruktionen eines minimalen Schnittes bzw. der Verbesserung eines Flusses.

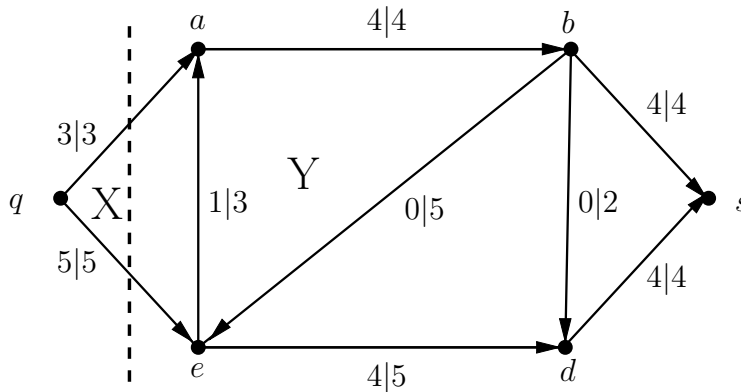


Abbildung 3.3: Beispiel zum Satz von Ford und Fulkerson  
 Netzwerk mit Kapazität  $c$ , Schnitt  $(X, Y)$  und optimalem Fluss  $f$ .  
 (An den Kanten ist  $f|c$  vermerkt). Es gilt  $w(f) = 8 = c(X, Y)$ .

Alternativ lässt sich der Satz von Ford und Fulkerson auch aus dem Hauptsatz der linearen Optimierung (s. z.B. [Ai<sub>5</sub>] §13) oder aus dem Satz von Menger (s.u., Satz 3.2) herleiten, in dessen Beweis dann natürlich nicht mehr (wie hier) Satz 3.1 eingehen darf.

### 3.1.3 Verbesserung von Flüssen

Unser Ziel ist es, die Existenz eines Flusses  $f$  mit  $w(f) = \min c(X, Y)$  zu zeigen und einen optimalen Fluss zu konstruieren; dabei verwenden wir einen Algorithmus, der gegebene Flüsse verbessert: Wir betrachten "zunehmende Wege" von  $q$  nach  $s$ :

a) Definition **zunehmender Weg**: Ist  $\vec{G} = \vec{G}(q, s)$  ein Netzwerk mit Kapazität  $c$  und Fluss  $f$ . Dann heißt der Weg  $qk_1p_1 \dots p_{n-1}k_n s$  (mit  $k_i = \{p_{i-1}p_i\}$  und  $p_0 := q, p_n := s$ ) des zugrundeliegenden ungerichteten Graphen ein *zunehmender Weg* bzgl.  $f$ , falls gilt

- (i)  $f((p_{i-1}, p_i)) < c((p_{i-1}, p_i))$  für jede gerichtete Kante  $(p_{i-1}, p_i)$  in  $\vec{G}$  ( $k_i$  heißt dann *Vorwärtskante*) und
- (ii)  $f((p_i, p_{i-1})) > 0$  für jede gerichtete Kante  $(p_i, p_{i-1})$  in  $\vec{G}$  ( $k_i$  heißt dann *Rückwärtskante*).

b) *Beispiel eines zunehmenden Weges:* s. Abb. 3.4! (Mit den Bezeichnungen des folgenden Abschnitts ist  $\lambda_1 = 1 = \lambda_2$ ).

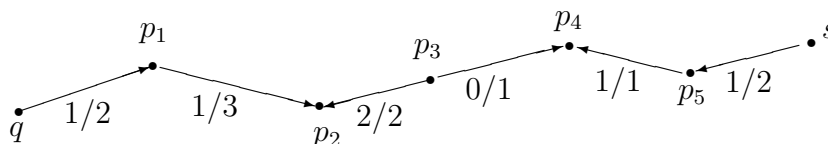


Abbildung 3.4: Beispiel eines zunehmenden Weges (mit der Markierung  $f/c$  an den Kanten)

c) **Algorithmus zur Verbesserung eines Flusses.** Enthält ein Netzwerk mit zulässigem Fluss  $f$  einen zunehmenden Weg  $W$  von  $q$  nach  $s$ , dann liefert der folgende Algorithmus einen zulässigen Fluss  $g$  mit  $w(f) < w(g)$ . (Man beachte, dass die Anzahl der Kanten von  $W$  endlich ist): Seien

$$\lambda_1 := \min\{c(k) - f(k) \mid k \text{ Vorwärtskante in } W\} \quad \text{und} \\ \lambda_2 := \min\{f(\ell) \mid \ell \text{ Rückwärtskante in } W\}$$

sowie  $\lambda := \min\{\lambda_1, \lambda_2\}$ ; (existiert keine Vorwärtskante, so setzt man  $\lambda = \lambda_2$ , analog  $\lambda = \lambda_1$ , falls es keine Rückwärtskante gibt.) Da  $W$  zunehmender Weg ist, gilt  $\lambda > 0$ . Wir definieren nun einen neuen Fluss  $g$  durch

$$g(k) := \begin{cases} f(k) + \lambda, & \text{falls } k \text{ Vorwärtskante von } W \\ f(k) - \lambda & \text{falls } k \text{ Rückwärtskante von } W \text{ ist,} \\ f(k) & \text{sonst.} \end{cases}$$

**Hilfssatz:** Der oben konstruierte Fluss  $g$  ist ein zulässiger Fluss mit  $w(g) = w(f) + \lambda$ .

*Beweisskizze:* Nach Konstruktion ist  $0 \leq g(k) = f(k) \leq c(k)$  für  $k \notin W$ , ferner  $0 \leq f(k) \leq f(k) + \lambda = g(k) \leq f(k) + \lambda_1 \leq f(k) + (c(k) - f(k))$  für jede Vorwärtskante und  $0 \leq f(k) - \lambda_2 \leq g(k) = f(k) - \lambda \leq f(k) \leq c(k)$  für jede Rückwärtskante. Liegt ein Knoten nicht auf  $W$ , so ändert sich nichts am Nettoeinfuss; liegt  $v$  auf  $W$  und ist  $v \neq q, s$ , so unterscheidet man vier Fälle der Richtungen der Kanten von  $W$  mit Knoten  $v$ . Durch die verschiedenen Vorzeichen heben sich jeweils die Veränderungen von  $g$  gegenüber  $f$  auf:  $\partial g(v) = 0$ . Also ist  $g$  zulässiger Fluss. Mündet der Weg

$W$  mit einer Vorwärtskante in  $s$ , so erhöht sich der Nettoeinfluß um  $+\lambda$ , andernfalls um  $-(-\lambda)$ .  $\square$

**d) Beispiele und Anmerkungen:**

(i) *Beispiel:* Wir betrachten das Netzwerk, das in Abb. 3.3 dargestellt ist, beginnen mit dem Null-Fluss  $f_1$  und den beiden zunehmenden Wegen  $W_1 : q \rightarrow a \rightarrow b \rightarrow s$  und  $W_2 : q \rightarrow e \rightarrow d \rightarrow s$ . Beide Wege besitzen nur Vorwärtskanten, und  $\lambda_1$  ist gleich der kleinsten Kapazität einer solchen Kante, also  $\lambda = \lambda_1 = 3$  (für  $W_1$ ) bzw.  $\lambda = \lambda_1 = 4$  (für  $W_2$ );  $\lambda_2$  ist nicht definiert. Durch Verbesserung beider Wege ergibt sich der Fluß  $f_2$  mit  $w(f_2) = 7$ , der in Abbildung 3.5 wiedergegeben ist.

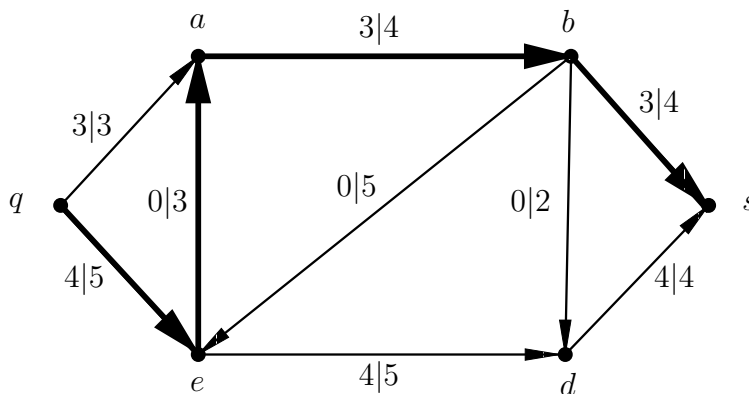


Abbildung 3.5: Ergebnis der ersten beiden Wegverbesserungen und zunehmender Weg zum Beispiel von Abb. 3.3 (angegeben ist  $f_2|c$ )

Der dick markierte Weg ist nun ein zunehmender Weg mit  $\lambda_1 = 1$ ; seine Verbesserung führt zum Fluss  $f$ , dem optimalen Fluss von Abbildung 3.3. Weitere Beispiele (auch mit Rückwärtskanten enthaltenden Wegen) zeigen Abb. 3.6 und Abb. 3.7.

(ii) Eine Kante kann sowohl Vorwärts- als auch Rückwärtskante von zunehmenden Wegen sein, s. Abb. 3.6. Ebenso kann die Verbesserung eines Weges zur Verschlechterung eines anderen führen.

(iii) Der obige Algorithmus kann einen Weg mehrfach als zunehmenden Weg haben, s. Abb. 3.7.



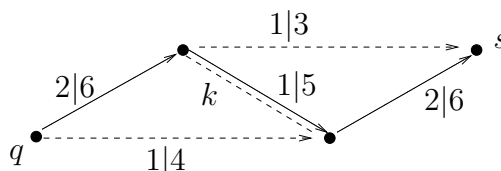


Abbildung 3.6: Es ist  $k$  Vorwärtskante des durchgezogenen und Rückwärtskante des gestrichelten Weges. (An den Kanten ist  $f|c$  markiert.)

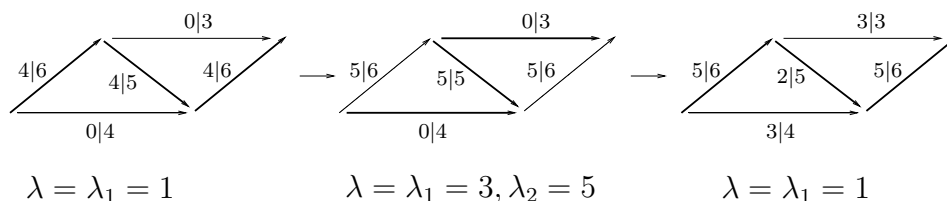


Abbildung 3.7: Beispiele zum Verbessern eines Flusses (Ein Weg kann mehrfach zunehmender Weg sein.)

### 3.1.4 Minimale Schnitte und optimale Flüsse

a) *Zur Existenz zunehmender Wege:* Da wir einen optimalen Fluss suchen, ist die Frage wichtig, ob man durch Verbessern von Wegen zu einem solchen gelangen kann. Eine Antwort gibt der folgende Hilfssatz.

**Hilfssatz 1 :** Sei  $\vec{G}(q, s)$  Netzwerke mit Kapazität  $c$  und zulässigem Fluss  $f$ . Dann enthält  $\vec{G}(q, s)$  entweder einen zunehmenden Weg oder  $f$  ist optimal.

*Beweisskizze:* Enthält  $\vec{G}(q, s)$  einen zunehmenden Weg, so kann man  $f$  verbessern, und  $f$  ist nicht optimal. Existiert kein solcher Weg, so zeigt die folgende Konstruktion, dass  $f$  optimal ist.

b) **Konstruktion eines minimalen Schnittes:** Zu einem Fluss  $f$  definieren

wir zwei Teilmengen von  $V$ , nämlich  $A_f := \{q\} \cup \{v \in V \mid \text{Es existiert ein zunehmender Weg von } q \text{ nach } v\}$  und  $B_f := C_V A_f$ .

**Hilfssatz 2 :**  $(A_f, B_f)$  ist genau dann ein Schnitt, wenn es keinen zunehmenden Weg von  $q$  nach  $s$  gibt. In diesem Fall hat  $(A_f, B_f)$  die minimale Kapazität  $w(f)$ , und  $f$  ist optimaler Fluss.

*Beweisskizze:* Gibt es einen zunehmenden Weg von  $q$  nach  $s$ , so ist  $s \in A_f$  und  $(A_f, B_f)$  kein Schnitt; andernfalls ist  $s \in B_f$  und  $(A_f, B_f)$  Schnitt. Im letzteren Fall betrachten wir die Kanten von  $A := A_f$  nach  $B := B_f$ . Seien

$$k \in K(A, B) := \{k \in K \mid k^- \in A \wedge k^+ \in B\} \text{ und } \ell \in K(B, A).$$

Nach Definition gibt es einen zunehmenden Weg von  $q$  nach  $k^-$  bzw.  $\ell^+$ , nicht aber nach  $k^+$  bzw.  $\ell^-$ . Daher muss  $f(k) = c(k)$  und  $f(\ell) = 0$  gelten. Mit Teil (i) des Hilfssatzes aus 3.1.1e) erhält man

$$w(f) = \vec{f}(A, B) - \vec{f}(B, A) = \sum_{k \in K(A, B)} f(k) - \underbrace{\sum_{\ell \in K(B, A)} f(\ell)}_0 = c(A, B)$$

und, mit Teil (ii), dann  $c(A, B) = w(f) \leq \min_{(X, Y) \text{ Schnitt}} c(X, Y) \leq c(A, B)$ . Also ist  $(A, B)$  minimaler Schnitt,  $f$  optimaler Fluss, und es gilt die Gleichung des Satzes von Ford und Fulkerson.  $\square$

### c) Beweisskizze zum Satz von Ford und Fulkerson

Wie gesehen, ist im Fall der Existenz eines zunehmenden Weges ein Fluss  $f$  verbesserbar, andernfalls optimal. Die Frage ist, ob der Algorithmus der Flussverbesserungen nach endlich vielen Schritten endet, so dass dann kein zunehmender Weg existiert. Bei ganzzahligen Kapazitäten und Flüssen ist dies aber wegen der Beschränkung der Flusswerte durch  $\min_{(X, Y) \text{ Schnitt}} c(X, Y)$  offensichtlich. Daher gilt der Satz von Ford und Fulkerson für ganzzahlige Kapazitäten und Flüsse, außerdem, wie man durch Multiplikation mit dem Hauptnenner der Kapazitäten sieht, dann auch für rationalzahlige Kapazitäten und Flüsse. Im reellen Fall folgt die Existenz von  $\max_{f \text{ zul. Fluss}} w(f)$  aus folgenden Stetigkeitsüberlegungen: Die Abbildung  $w$ , die jeder Abbildung  $f$  aus  $\mathbb{R}^K = \{f \mid f : K \rightarrow \mathbb{R}\}$  den Wert  $w(f)$  zuordnet, ist eine lineare Abbildung zwischen endlich-dimensionalen Vektorräumen und damit stetig; ferner ist  $\mathcal{F} := \{f \mid f \text{ zulässiger Fluss}\} \subseteq \mathbb{R}^K$  beschränkt (z.B. bzgl. der Supremums-Norm:  $\|f\| = \sup_{k \in K} |f(k)| \leq \sup_{k \in K} c(k)$ ), ferner abgeschlossen; denn ist  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$

eine konvergente Folge zulässiger Flüsse mit  $f_n \rightarrow f$ , so folgt aus  $\partial f_n(v) = 0$  auch  $\partial f(v) = 0$  und aus  $0 \leq f_n(k) \leq c(k)$  auch  $0 \leq f(k) \leq c(k)$ . Wegen der Kompaktheitseigenschaft von  $w$  ist daher auch das Bild  $w(\mathcal{F})$  beschränkt und abgeschlossen. Es existiert also ein optimaler Fluss  $f_{\text{opt}}$ , und für diesen gilt wiederum  $w(f_{\text{opt}}) = \min_{(X,Y) \text{ Schnitt}} c(X,Y)$  nach Hilfssatz 2.  $\square$

### 3.1.5 Anwendungsbeispiel: Angebot- und Nachfrage-Netzwerk

(i) *Problemstellung*: Einige Hersteller produzieren ein Produkt, das auf Zwischen- und Einzelhändler unter der Berücksichtigung des Produktions- Ausstoßes und der Nachfrage der Kunden verteilt werden soll.

(ii) *Übersetzung in ein Graphenproblem*: Die Verteilungswege werden durch einen gerichteten Graphen  $\vec{G}(V, K)$  dargestellt, dessen Quellen  $q_1, \dots, q_k$  die Hersteller, dessen Senken  $s_1, \dots, s_\ell$  die Einzelhändler, dessen weitere Knoten die Zwischenhändler repräsentieren und bei dem die Kapazität  $c$  der (die Lieferwege angehenden) Kanten jeweils die maximale Beförderungsmenge quantifiziert. Auch in diesem Fall spricht man von einem *Netzwerk*.

Jeder Quelle  $q_i$  ist ferner eine positive reelle Zahl  $\alpha(q_i)$ , der maximale Produktionsausstoß, zugeordnet, jeder Senke  $s_j$  eine positive reelle Zahl  $\beta(s_j)$ , die maximale Nachfrage bei  $s_j$ . Das Angebot kann dann die Nachfrage befriedigen, wenn ein (die Kapazitäten berücksichtigender) Fluss existiert, der durch den Produktions-Ausstoß an den Quellen beschränkt ist und dessen Wert an den Senken gleich dem dortigen Bedarf ist.

(iii) *Veränderung des Modells*: Um die oben behandelte Theorie anwenden zu können, konstruiert man nun ein neues Netzwerk  $\vec{G}_1$  durch Einführung zweier neuer Ecken  $q_0$  und  $s_0$  und Verbinden von  $q_0$  mit allen Quellen, von  $s_0$  mit allen Senken und Definition einer neuen Kapazitätsfunktion  $c_1$  mit

$$\begin{aligned} c_1(q_0, q_i) &:= \alpha(q_i) \\ c_1(s_j, s_0) &:= \beta(s_j) \\ c_1(k) &:= c(k) \quad \text{für } k \in K. \end{aligned}$$

Ein maximaler Fluss in  $\vec{G}_1$  induziert dann einen unter den Nebenbe-

dingungen maximalen Fluss von  $\vec{G}$ . Falls alle Kanten zu  $s_0$  gefüllt sind, kann die Nachfrage befriedigt werden, andernfalls nicht. Ein konkretes Beispiel behandelt Übungsaufgabe ??.

## 3.2 Übertragung auf Wegesysteme

Wir wollen nun die Fluss-Theorie auf Wegesysteme und Zusammenhang in gerichteten Graphen anwenden. Dazu benötigen wir folgende Begriffe:

### 3.2.1 Definition:

#### Trennende Kanten und disjunkte Wegesysteme

- a) Sei  $\vec{G}(V, K)$  ein endlicher einfacher gerichteter Graph und  $u, v \in V$  mit  $u \neq v$ ,  $(u, v) \notin K$ . Eine Teilmenge  $A$  von  $K$  heißt  *$u, v$ -trennende Kantenmenge*, falls in  $\vec{G}(V, K \setminus A)$  kein gerichteter Weg von  $u$  nach  $v$  existiert.
- b) Eine Menge  $W$  gerichteter Wege von  $u$  nach  $v$  heißt (*kantendisjunktes*)  *$u, v$ -Wegesystem*, falls je zwei Wege aus  $W$  keine gemeinsame Kante besitzen.
- c) Analog definiert man *trennende Eckenmengen* und *eckendisjunkte Wegesysteme* (auch als *kreuzungsfreie Wegesysteme* bezeichnet).

### 3.2.2 Übertragung der Flusstheorie in die Sprache der Wegesysteme

- a) Wir fassen  $\vec{G}(V, K)$  als ein Netzwerk mit Quelle  $q = u$  und Senke  $s = v$  sowie konstanter Kapazitätsfunktion  $c : K \rightarrow \{1\}$  auf.
- b) Jeder zulässige (ganzahlige) Fluss führt zu einer Menge kantendisjunkter Wege von  $u$  nach  $v$  (bestehend aus Kanten vom Fluss 1); umgekehrt definiert jedes  $u, v$ -Wegesystem  $W$  einen zulässigen Fluss vom Wert  $|W|$ .
- c) Zu jedem Schnitt  $(X, Y)$  gehört die Kantenmenge

$$K'(X, Y) := \{k \in K \mid k^- \in X \wedge k^+ \in Y\};$$

diese ist trennende Kantenmenge mit  $|K'(X, Y)| = c(X, Y)$ . Umgekehrt gibt es in jeder trennenden Kantenmenge eine minimale trennende

Kantenmenge  $K'$ . Zu dieser gehört ein Schnitt, nämlich  $(X, \mathcal{C}X)$ , wobei  $X$  die Menge aller Ecken  $x \neq q$  ist, für die es in  $\vec{G}(V, K \setminus K')$  einen Weg von  $q$  nach  $x$  gibt, zusammen mit  $q$ . (Beweis?)

d) Aus dem Satz von Ford-Fulkerson ergibt sich so der

**Satz 3.2 (Satz von Menger – Kantenversion)** Ist  $\vec{G} = \vec{G}(V, K)$  endlicher einfacher gerichteter Graph,  $u, v \in V$ ,  $u \neq v$ , so gilt

$$\max \{|W| \mid W \text{ ist kantendisjunktes } u, v\text{-Wegesystem in } \vec{G}\}$$

$$= \min \{|A| \mid A \text{ ist } u, v\text{-trennende Kantenmenge in } \vec{G}\}.$$

e) *Beispiel* s. Abb. 3.8 !

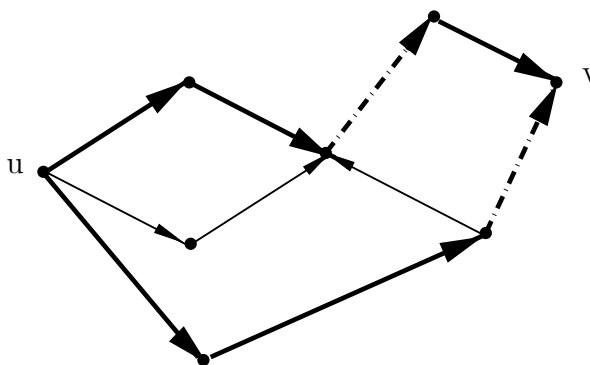


Abbildung 3.8: Beispiel eines maximalen  $(u, v)$ -Wegesystems (fett) und einer minimalen trennenden Kantenmenge (gestrichelt)

### 3.2.3 Verwandlung eines eckendisjunkten Wegesystems in ein kantendisjunktes

Natürlich ist ein eckendisjunktes Wegesystem auch kantendisjunkt. Die Umkehrung gilt aber im allgemeinen nicht. Durch Übergang zu einem abgewandelten Graphen lässt sich aber auch die Umkehrung erreichen:

a) Aus einem gerichteten Graphen  $\vec{G}(V, K)$  definieren wir einen Graphen  $\vec{G}'(V', K')$  wie folgt : Zu  $e \in V \setminus \{q, s\}$  seien  $e^{(1)}$  und  $e^{(2)}$  zwei Ebenbilder mit  $e^{(1)} \neq e^{(2)}$ , ferner setzen wir  $q^{(1)} = q^{(2)}$  und  $s^{(1)} = s^{(2)}$ ; nun sei  $V' :=$

$\{e^{(i)} \mid e \in V \text{ mit } i = 1, 2\}$  und

$$K' := \{(e^{(2)}, f^{(1)}) \mid (e, f) \in K\} \cup \{(e^{(1)}, e^{(2)}) \mid e \in V \setminus \{q, s\}\}.$$

(Ein *Beispiel* zeigt Abb. 3.9.) Aus einem System eckendisjunkter Wege von  $\vec{G}(V, K)$  wird in  $\vec{G}'(V', K')$  nun ein kantendisjunktes. Umgekehrt stammt jedes kantendisjunkte  $(q, s)$ -Wegesystem von  $\vec{G}'$  von einem System kreuzungsfreier Wege von  $q$  nach  $s$  in  $\vec{G}$ .

Jede Kante  $(x^{(2)}y^{(1)})$  einer minimalen  $q, s$ -trennenden Kantenmenge von  $\text{vec}G'$  kann durch die (in  $\vec{G}$  einer Ecke entsprechende) Kante  $(x^{(1)}x^{(2)})$  oder  $(y^{(1)}y^{(2)})$  ersetzt werden (außer im trivialen Fall eines Graphen mit nur zwei Ecken); wegen der Minimalität des Systems kommt diese Kante nur einmal vor.

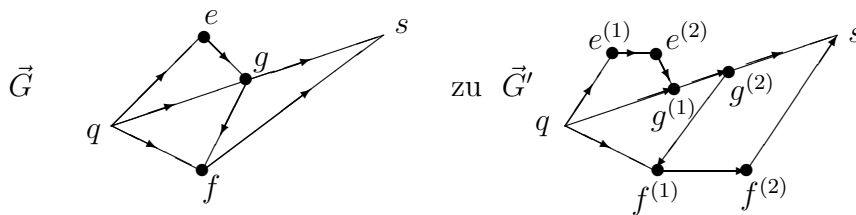


Abbildung 3.9: Zur Verwandlung von Graphen mit kreuzungsfreien Wegesystemen in Graphen mit kantendisjunkten Wegesystemen

b) Damit ergibt sich der folgende Satz über den "lokalen Eckenzusammenhang":

**Satz 3.3 (Satz von Menger – Eckenversion)**

Ist  $\vec{G}(V, K)$  endlicher einfacher gerichteter Graph,  $q, s \in V$  mit  $q \neq s$  und  $(q, s) \notin K$ , dann gilt:

$$\begin{aligned} & \max \{ |W| \mid W \text{ ist kreuzungsfreies } q, s \text{ - Wegesystem von } \vec{G} \} \\ & = \min \{ |F| \mid F \text{ ist } q \text{ von } s \text{ trennende Eckenmenge von } \vec{G} \text{ mit } q, s \notin F \}. \end{aligned}$$

### 3.3 Von bipartiten Graphen zu Vertretersystemen und Netzwerken

#### 3.3.1 Anwendung des Satzes von Menger

Die Anwendung des Satzes von Menger auf einen bipartiten Graph  $G(S \dot{\cup} U, R)$  wird durch die Einführung einer Quelle  $q$  und Senke  $s$  möglich, die mit allen Knoten aus  $S$  bzw.  $U$  verbunden wird; die Richtung der Kanten geht z.B. von  $q$  zu  $S$ , von  $S$  zu  $U$  und von  $U$  zu  $s$ . Wie in 3.2.2 a) kann jede Kante mit Gewicht 1 versehen werden. So entsteht ein Netzwerk, siehe z.B. Abb. 3.10.

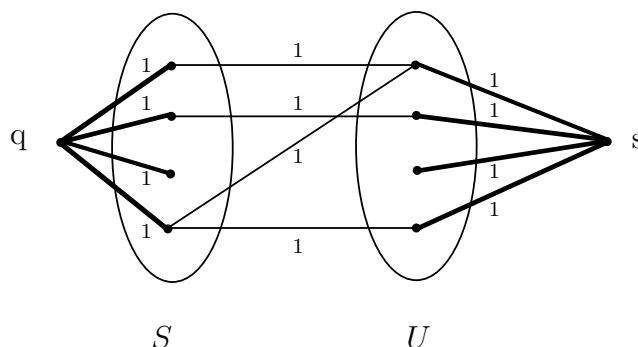


Abbildung 3.10: Verwandlung eines bipartiten Graphen in ein Netzwerk

Wie ist hier der Eckenzusammenhang zu übersetzen? Einem Matching bzw. einer partiellen Transversalen entspricht ein System eckendisjunkter Wege von  $q$  nach  $s$  und umgekehrt. Ein Beispiel zeigt Abb. 3.11.

Wie sehen trennende Eckenmengen aus? Falls eine Kante existiert, von der keine Ecke in einer gegebenen zu entfernenden Eckenmenge  $D$  liegt, so existiert ein Weg von  $q$  nach  $s$ . Also enthält eine trennende Eckenmenge mindestens eine Ecke jeder der Kanten von  $G$ . Nun heißt  $D \subseteq V$  **Träger** (engl. *vertex cover*) von  $G(V, R)$ , falls jede Kante aus  $R$  mindestens einen Endpunkt in  $D$  hat, also gilt:

$$(u, v) \in R \implies u \in D \vee v \in D.$$

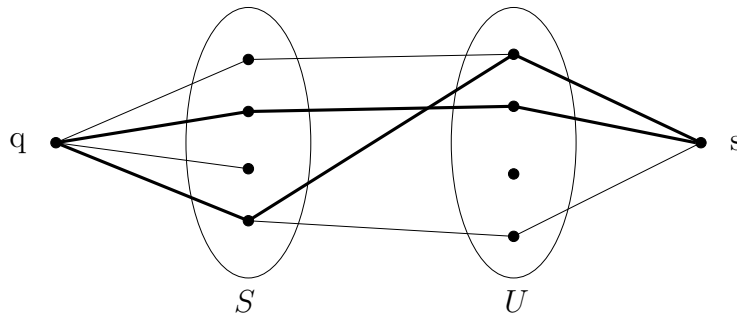


Abbildung 3.11: Partielle Transversale und eckendisjunkte Wege (Beispiel)

Aus dem Satz von Menger über den lokalen Eckenzusammenhang eines Graphen (Satz 3.3) folgt nun

**Satz 3.4 (Satz von König und Egerváry, 1931)** Für jeden bipartiten Graphen  $G(S \dot{\cup} U, R)$  gilt:

$$\max_{\substack{T \subseteq S \\ \text{partielle} \\ \text{Transversale}}} |T| = \min_{D \text{ Träger}} |D|.$$

Analog ist die Maximalzahl disjunkter Kanten ( Matching) gleich dieser Minimalzahl von Ecken, welche alle Kanten treffen.

*Anmerkung:* Es kann maximale partielle Transversalen kleinerer Mächtigkeit geben: Die Mächtigkeit einer maximalen Transversalen ist evtl. verschieden von der Mächtigkeit einer Transversale maximaler Mächtigkeit.

### 3.3.2 Zu partiellen Transversalen

a) Wie sehen Träger  $D$  minimaler Mächtigkeit aus?

Ist  $S \setminus D =: A$ , dann muß  $D$  alle Ecken aus der Menge der Nachbarn von  $A$  enthalten, also aus der Menge

$$R(A) := \{v \in U \mid \exists a \in A : (a, v) \in R\} \text{ (auch mit } N(A) \text{ bezeichnet).}$$



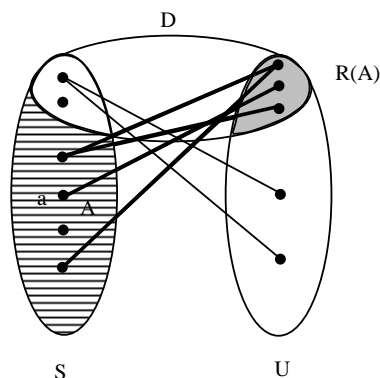


Abbildung 3.12: Zum Beweis des Satzes von Ore

Daher gilt  $(S \setminus A) \cup R(A) \subseteq D$ . Umgekehrt ist jede Menge der Form  $(S \setminus A) \cup R(A)$  Träger. *Minimale Träger* haben daher die Gestalt  $D = (S \setminus A) \cup R(A)$  für ein geeignetes  $A \subseteq S$ . Es ergibt sich somit aus Satz 3.4:

**Satz 3.5 (Satz von Ore)** Sei  $G(V, R)$  bipartiter Graph auf den definierenden Eckenmengen  $S$  und  $U$ . Dann gilt

$$\max_{T \subseteq S \text{ part. Transversale}} |T| = \min_{A \subseteq S} (|S - A| + |R(A)|).$$

Falls ganz  $S$  partielle Transversale ist, gilt

$$\max |T| = |S| (= \min |S| - |A| + |R(A)|).$$

b) *Folgerung:*

Ist  $G(S \dot{\cup} U, R)$  bipartiter Graph. Dann gilt:  
 $S$  ist partielle Transversale  $\iff |A| \leq |R(A)|$  für alle  $A \subseteq S$ ,  
 analog  
 $U$  ist partielle Transversale  $\iff |B| \leq |R^{-1}(B)|$  für alle  $B \subseteq U$ .

*Beweisskizze:*

$$S \text{ partielle Transversale} \iff |S| = \max_{T \text{ partielle Transvers.}} |T| = \min_{A \subseteq S} |S| - |A| + |R(A)|$$

$$\begin{array}{l}
\text{"}\implies\text{" } (|R(A)| - |A|) + |S| \geq |S| \implies |R(A)| - |A| \geq 0 \\
\text{"}\impliedby\text{" } \left. \begin{array}{l} |R(A)| - |A| \geq 0 \quad \text{für alle } A \\ = 0 \quad \text{z. B. falls } A = \emptyset \end{array} \right\} \implies |S| = \min(|S|, \underbrace{-|A| + |R(A)|}_{\geq 0}).
\end{array}$$

Zur Frage, wann  $U$  partielle Transversale ist: Betrachte den bipartiten Graph zu  $R^{-1}$  (d.h. mit Kanten in umgekehrter Richtung) und wende den 1. Teil an!  $\square$

### 3.3.3 Anwendung auf Mengensysteme

Als Folgerung läßt sich nun die Hall-Bedingung (Party-Bedingung) für die Existenz eines Vertretersystems herleiten:

**Satz 3.6 (Satz von König und Hall)** *Ein Mengensystem  $(S, \mathbf{A})$  mit  $\mathbf{A} = (A_i | i \in \mathbb{N}_n)$  besitzt ein Vertretersystem genau dann, wenn  $|\mathfrak{S}| \leq |\bigcup_{i \in \mathfrak{S}} A_i|$  für alle  $\mathfrak{S} \subseteq \mathbb{N}_n$ , d.h. die **Hall-Bedingung**, auch **Party-Bedingung** genannt, gilt.*

*Beweisskizze:* Anwendung der Folgerung aus dem Satz von Ore (Satz 3.5) auf den bipartiten Graphen, der das Mengensystem beschreibt, mit  $\mathfrak{S} \stackrel{\Delta}{=} \{A_i | i \in \mathfrak{S}\} \stackrel{\Delta}{=} B$  und  $|\bigcup_{i \in \mathfrak{S}} A_i| \stackrel{\Delta}{=} |R^{-1}(B)|$ .  $\square$

*Anmerkung:* Die Notwendigkeit der Bedingung ist offensichtlich. Wichtig ist hier, dass sie hinreichend ist.

### 3.3.4 Einkleidungen zu Vertretersystemen

a) **Partyproblem:** Bei einer Party mit Leuten, von denen sich einige kennen, stellt sich die Frage, ob alle Damen einen Tänzer finden können, den sie vorher kannten, vgl. 1.4.3. Wie schon bemerkt, ist der Freundschafts-Graph ein bipartiter Graph. Wir erhalten damit als generelle Antwort: Die Frage läßt sich positiv beantworten, wenn für **jede** Teilmenge  $T$  der Damen die Menge  $H_T$  der ihnen bekannten Herren die Ungleichung  $|T| \leq |H_T|$ , eben die Party-Bedingung, erfüllen.

b) *Heiratssatz* (Einkleidung von H. WEYL; s. auch 1.4.3 und Abb. 3.13!)

**Satz 3.7 (Heiratssatz)** *In einem Kreis unverheirateter Frauen und Männer können alle Männer eine ihnen sympathische Frau heiraten, wenn (für alle möglichen  $k$ ) je  $k$  Männer mindestens  $k$  Frauen sympathisch finden (, die umgekehrt auch zur Heirat bereit sind).*

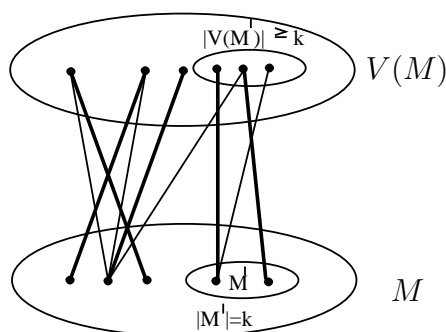


Abbildung 3.13: Zum Heiratssatz

Der Heiratssatz ist eine spezielle Version des folgenden Haremssatzes (mit  $n(s) = 1$ ):

c) **Haremssatz** ( Halmos & Vaughan, 1950, vgl. [HH])

Jeder Sohn  $s$  aus der Menge der Söhne  $S$  des Kalifen al-Mutabit will sich aus dem Kreis der ihm bekannten Frauen einen Harem vorgegebener Größe  $n(s)$  einrichten. Wann ist das möglich?

*Hinreichend und notwendig ist die Bedingung: Für alle Teilmengen  $T$  von  $S$  gilt, daß die Anzahl der Frauen, die den Söhnen aus  $T$  bekannt sind,  $|\bigcup_{s \in T} F(s)|$ , größer gleich  $\sum_{s \in T} n(s)$  ist.*

*Beweisskizze:* Jeder Sohn  $s$  wird durch  $s^{(1)} \dots s^{(n(s))}$  Ebenbilder ersetzt; diese sind zu verheiraten, (s. Abb. 3.14). Die angegebene Bedingung ist die Hall-Bedingung (und garantiert damit eine Transversale), denn die Hall-Bedingung lautet hier

$$\forall \mathfrak{S} \subseteq \bigcup_{\substack{s \in S \\ i=1, \dots, n(s)}} s^{(i)} \quad : \quad |\mathfrak{S}| \leq \left| \bigcup_{t \in \mathfrak{S}} A_t \right| = \left| \bigcup_{\substack{s \text{ hat Eben-} \\ \text{bild in } \mathfrak{S}}} F(s) \right|$$

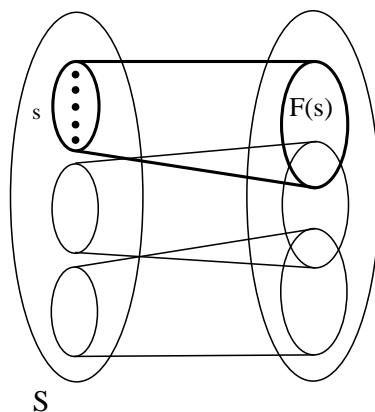


Abbildung 3.14: Zum Haremssatz

Bei gegebenem  $\bigcup F(s)$  ist  $|\mathfrak{S}|$  maximal, falls jedes vorkommende  $s$  in allen Ebenbildern vorhanden ist:  $|\mathfrak{S}| = \sum_{\substack{s \text{ kommt} \\ \text{in } \mathfrak{S} \text{ vor}}} n(s)$ . (Ein Sprung von  $|\bigcup F(s)|$  tritt nur bei neuem  $s$  ein.) □

### 3.4 Von Matrizen zu bipartiten Graphen

#### 3.4.1 Übertragung auf Matrizen

a) Zu einer Matrix  $A = (a_{ij})_{\substack{i=1 \dots m \\ j=1 \dots n}}$  läßt sich ein bipartiter Graph auf der Eckenmenge  $\{z_1, \dots, z_m\} \dot{\cup} \{s_1, \dots, s_n\}$  so definieren, daß  $\{z_i, s_j\}$  Kante ist genau dann, wenn  $a_{ij} \neq 0$  gilt. (Ein *Beispiel* zeigt Abb. 3.15.)

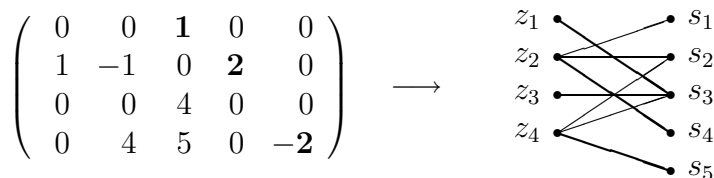


Abbildung 3.15: Bipartiter Graph zu einer Matrix

Diese Zuordnung ist zwar nur bei  $\{0, 1\}$ -Matrizen umkehrbar eindeutig, jedoch läßt sich auch so der Satz von König-Egerváry übertragen; dieser Satz lautet, formuliert für Matchings (vgl. Satz 3.4):

$$\max_{T \text{ Matching}} |T| = \min_{D \text{ Träger}} |D|$$

Ein Matching im Graphen entspricht in der Matrix eine Menge *unabhängiger Elemente*  $\neq 0$  (- dabei heißt eine Menge  $M$  von Einträgen ungleich 0 aus einer Matrix unabhängig, falls in jeder Linie, d. h. Zeile oder Spalte, höchstens ein solches Element erscheint), und einem Träger entspricht eine Menge von *bedeckenden Linien* (d. h. Zeilen und Spalten, die alle Elemente ungleich 0 überdecken). So erhält man das folgende Resultat:

**Satz 3.8 (Korollar zum Satz von König und Egerváry)** Die Maximalzahl unabhängiger Elemente  $\neq 0$  (der Termrang) ist gleich der Minimalzahl von Linien, die die Matrix überdecken.

*Beispiel* (Fortsetzung): Unabhängige Elemente  $\neq 0$  (bzw. das zugehörige Matching) sind in Abb. 3.15 fett markiert. Die Zeilen 2 und 4 und die Spalte 3 bedecken die Matrix; s. Abb. 3.16.

$$\left( \begin{array}{cc|cc} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 5 & 0 & -2 \end{array} \right)$$

Abbildung 3.16: Bedeckende Linien einer Matrix

b) *Folgerungen:*

**Satz 3.9 (Satz von König)** Zu jeder  $(v \times v)$ - $\{0, 1\}$ -Matrix  $A$ , deren Spalten- und Zeilensummen gleich  $k$  sind, gibt es  $k$   $v$ -reihige Permutationsmatrizen  $P_1, \dots, P_k$  mit  $A = P_1 + \dots + P_k$ .

Dabei ist eine  $v$ -reihige Permutationsmatrix definitionsgemäß eine  $v \times v$ -Matrix über  $\{0, 1\}$  derart, dass in jeder Zeile und in jeder Spalte genau eine 1 steht.

$$\text{Beispiel: } \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

*Beweisidee zum Satz von König:* Es existiert eine Minimalzahl von  $v$  überdeckenden Linien: (Anzahl der Einsen ist  $v \cdot k$ ; zum Bedecken sind mindestens  $v$  und damit genau  $v$  Linien nötig). Subtraktion einer Matrix  $P_1$  mit 1 in den  $v$  Positionen einer maximalen unabhängigen Menge liefert eine Matrix  $A_2$  mit Liniensumme  $k - 1$ .  $\square$

### 3.4.2 Anwendungs-Beispiele

a) **Vorlesungsplan** (s. [HH] p.156): In einer Universität gibt es  $b$  Professoren, die  $v$  Vorlesungen in einem Semester anbieten sollen. Jede dieser Vorlesungen gehört zum Lehrgebiet von genau  $k$  dieser Professoren. Auch das Lehrgebiet jedes Dozenten umfasst jeweils  $k$  dieser  $v$  Vorlesungen. Dann kann jede Vorlesung von einem kompetenten Dozenten gehalten werden, und jeder Dozent kann genau eine Vorlesung anbieten. (Man beachte den Kommentar von Halder & Heise!)

*Beweis-Skizze:* Ist  $A = (a_{ij})$  die zugehörige Matrix (mit dem Eintrag  $a_{ij} = 1$ , falls Professor  $i$  die Vorlesung Nr.  $j$  halten kann, und  $a_{ij} = 0$  andernfalls), so ergibt doppeltes Abzählen der Summe der Einträge:

$$b \cdot (\text{Spaltensumme}) = b \cdot k = \sum \sum a_{ij} = v \cdot k = v \cdot (\text{Zeilensumme})$$

und damit  $b = v$ . Jede der Permutationsmatrizen  $P_i$  ist eine mögliche Lösung.  $\square$

#### b) "End-of-term-dance-problem"

Am Ende des Terms gibt es am College einen Abschlussball. Jeder Student möchte mit  $k$  bestimmten Studentinnen und jede Studentin mit  $k$  bestimmten Studenten tanzen. Gibt es Paarungen zu  $k$  Tänzen, so daß jeder der Tanzwünsche genau einmal erfüllt wird? Antwort: ja, jedes  $P_i$  beschreibt eine mögliche Tanzformation.

c) **Doppeltstochastische Matrizen.** : Eine  $v \times v$ - Matrix über  $\mathbb{R}^+$  heißt *doppeltstochastisch*, falls ihre sämtlichen Zeilen- und Spaltensummen gleich 1 sind.

**Satz 3.10** Eine  $v \times v$ -Matrix  $A$  ist genau dann doppeltstochastisch, wenn  $A = \sum_{i=1}^t c_i P_i$  ist für gewisse Permutationsmatrizen  $P_i$  und gewisse  $c_i \in \mathbb{R}^+$  mit  $\sum_{i=1}^t c_i = 1$ .

Das heißt: Die konvexe Hülle der  $v \times v$  Permutationsmatrizen in  $\mathbb{R}^{v \times v}$  besteht genau aus den  $v \times v$ -doppeltstochastischen Matrizen.

*Beweisidee:* Wie beim Beweis zum Satz von König beachtet man, daß genau  $v$  bedeckende Linien und damit  $v$  unabhängige Elemente existieren. Statt  $P_1$  zieht man hier  $c_1 P_1$  von  $A$  ab, wobei  $c_1$  das Minimum über alle Einträge von  $A$  an den Positionen mit Eintrag 1 von  $P_1$  ist. Die Anzahl der Einträge mit Wert 0 erhöht sich so mindestens um eins, sodass wiederholte Anwendung dieses Vorgehens schließlich zur 0-Matrix führt.  $\square$

*Beispiel:*

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{8} & \frac{3}{4} & \frac{1}{8} \\ \frac{3}{8} & 0 & \frac{5}{8} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} + 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{8} & \frac{1}{2} + \frac{1}{4} & \frac{1}{8} \\ \frac{3}{8} & 0 & \frac{1}{2} + \frac{1}{8} \end{pmatrix} = \\ \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{8} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{8} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

### 3.5 Das Dimer-Problem\*

(Erste Erwähnung 1937 durch Fowler & Rushbrooke [FR])<sup>1</sup>

a) *Problemstellung:* Auf wieviele Arten können zweiatomige Moleküle an einer regelmäßigen Oberfläche anlagern? (Di-mer= zweiatomiges Molekül). (Wenn Plätze unbesetzt bleiben dürfen, so liegt das „Monomen-Dimer-Problem“ vor, das bisher ungelöst ist.)

*Vereinfachendes Modell:* Auf wieviele Arten kann man ein Schachbrett mit Dominosteinen ganz belegen? Ein *Beispiel* für eine Belegung eines verkleinerten Schachbrett zeigt Abb. 3.17 !

b) *Vorgehensweise:* Umwandlung in ein Problem auf Graphen: Ecken des Graphen sind die Schachbrettfelder, zwei Ecken sind durch eine

<sup>1</sup>Auf dieses Thema wurde ich aufmerksam beim Lesen der schönen Diplomarbeit von Hans Mielke, FB Mathematik & Informatik, Freie Universität Berlin 1995.

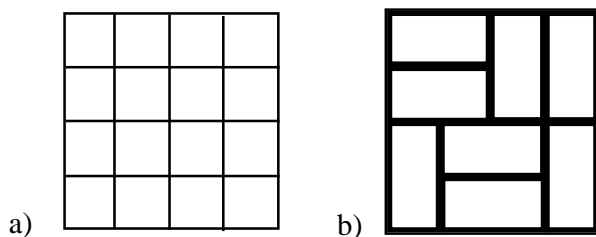


Abbildung 3.17: Schachbrettbelegung durch Dominosteine

Kante verbunden, wenn die entsprechenden Felder von einem Dominostein bedeckt werden können, s. z.B. Abb. 3.18 a. Eine Belegung entspricht dann einem *perfekten Matching* (*1-Faktor*), d. h. einer Teilmenge von Kanten, von denen keine zwei inzidieren und für die jede Ecke des Graphen von einer Matchingkante bedeckt wird; (vgl. 1.4.2). *Beispiel:* In Abb. 3.18 b) ist ein zu Abb. 3.17 b) gehörendes Matching dargestellt. c) *Die Anzahl vollständiger Matchings:* Die Anzahl vollständiger Matchings in ebenen Graphen wurde unabhängig voneinander von P.W. Kasteleyn und von H.N.V. Temperley und M.F. Fisher (1961) bestimmt. Eine Lösung geht etwa wie folgt (s. z.B. [Lo] Ex.4.2):

Man orientiert den zum Schachbrett gehörenden Graphen geeignet, etwa wie in Abb. 3.19, stellt dann für diesen gerichteten Graphen  $\vec{G} = (V, \vec{E})$  die „gerichtete Adjazenzmatrix“  $\vec{A} = (a_{ij})$  auf, also eine Matrix, deren Zeilen und Spalten durch die Ecken des Graphen nummeriert sind und für die die  $a_{ij}$  wie folgt definiert sind:

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{falls } (i, j) \in \vec{E} \\ -1 & \text{falls } (j, i) \in \vec{E} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Z.B. ist die Adjazenzmatrix  $\vec{A}$  des Gittergraphen aus Abb. 3.19 bei geeigneter Nummerierung (von rechts nach links zeilenweise) gegeben



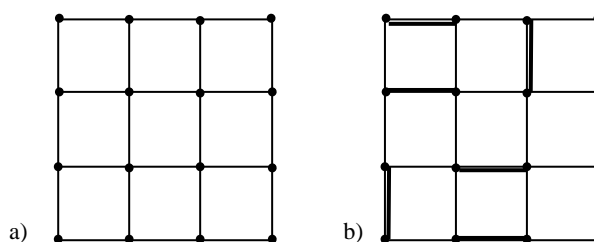


Abbildung 3.18: Gittergraph und vollständiges Matching  
 a) Zu Abbildung 3.17 a) gehörender Gittergraph  
 b) Zu Abbildung 3.17 b) gehörendes vollständiges Matching

durch

$$\vec{A} = \begin{pmatrix} Q_4 & I_4 & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ -I_4 & -Q_4 & I_4 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -I_4 & Q_4 & I_4 \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & -I_4 & -Q_4 \end{pmatrix} \text{ mit } Q_4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

und Einheitsmatrix  $I_4$ . Man kann nun zeigen, daß für die Anzahl  $\mu$  der perfekten Matchings eines  $n \times m$ -Schachbretts gilt:

$$\mu^2 = \det \vec{A}$$

*Anmerkungen:* 1. Allgemein folgt nach Kasteleyn, Temperley und Fisher: Jeder ebene Graph  $G = (V, E)$  läßt sich so orientieren, daß

$$\mu^2(G) = \det \vec{A}$$

gilt, falls  $\vec{A}$  die gerichtete Adjazenzmatrix ist.

2. Für Gitter  $Q_{m,n}$  erhält man die Formel

$$\mu(Q_{m,n}) = 2^{nm/2} \prod_{k=1}^n \prod_{l=1}^m \sqrt{4 \left( \cos^2 \frac{k\pi}{n+1} + \cos^2 \frac{l\pi}{m+1} \right)},$$

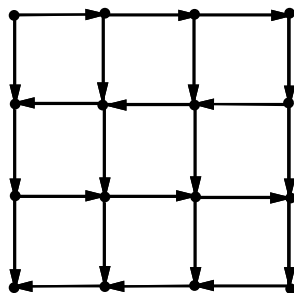


Abbildung 3.19: Orientierung des Gittergraphen aus Abb. 3.18

asymptotisch  $\mu(Q_{m,n}) \approx 1,34^{nm}$ .

3. Für bipartite ebene Graphen  $G = (V, E)$  gilt

$$\mu^2(G) = \text{per} A(G)$$

mit der „ungerichteten Adjazenzmatrix“  $A = (a_{ij})$  ( mit  $a_{ij} = 1$  für  $\{i, j\} \in E$  und  $a_{ij} = 0$  sonst) und der Permanenten

$$\text{per} A := \sum_{\pi \in S_n} \prod_{i=1}^n a_{i\pi(i)}.$$