

Kapitel 2

Veranschaulichungen durch Graphen

2.1 Darstellung von Relationen

Im 1. Kapitel haben wir einige reale Gegebenheiten durch Graphen dargestellt. Wir kommen hierauf zurück und betrachten jetzt inner-mathematische Übergänge:

2.1.1 Graph einer Relation

a) Eine Relation R auf V , also $R \subseteq V \times V$, läßt sich als gerichteter Graph $\vec{G}(V, E)$ darstellen; dabei werden Kanten definiert durch

$$xRy \iff (x, y) \text{ Kante.}$$

Ein Beispiel zeigt Abbildung 2.1. Ist die Relation symmetrisch, so reicht auch ein ungerichteter Graph.

b) *Bipartiter Graph*: Eine Relation $R \subseteq M \times N$ zwischen den Elementen von M und N mit $M \cap N = \emptyset$ läßt sich durch einen bipartiten Graphen $G(M \dot{\cup} N, R)$ beschreiben. (Sind M und N nicht disjunkt, so kann man dies durch Übergang von M zu $M \times \{1\}$ und von N zu $N \times \{2\}$ erreichen.) Ein Beispiel für die Relation „ist Element von“ zeigt Abb. 2.2. Ein weiteres Beispiel liefert die Relation „ist befreundet mit“, nämlich den Freundschaftsgraphen, s. 1.4.3.

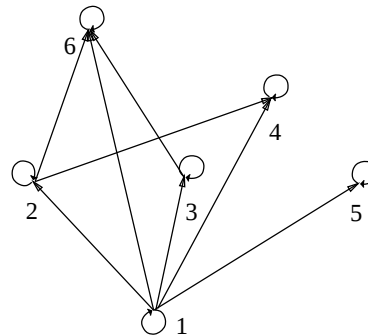


Abbildung 2.1: Graph der Relation $|$ („ist Teiler von“) auf $\mathbb{N}_6$

2.1.2 Ordnungsdigramm/Hassediagramm

Ist $(M, \leq)$ eine *geordnete* Menge, so läßt sich (analog zu 2.1.1) diese durch ein gerichtetes Diagramm in der Zeichenebene darstellen. Dabei ist für $a, b \in M$ die Beziehung $a \leq b$ durch eine aufsteigende Kante repräsentiert. Ein Beispiel zeigt wieder Abb. 2.1. (Alternativ kann man auch von rechts nach links orientieren).

Weglassen von „Brücken“ (d.h. Kanten, die gerichtete Wege der Länge

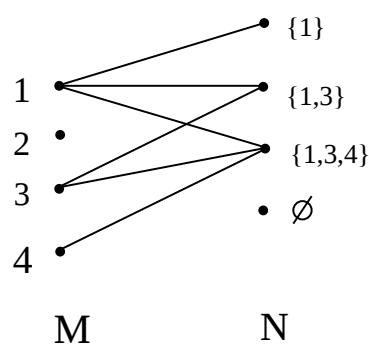


Abbildung 2.2: Beispiel zum Zusammenhang zwischen bipartiten Graphen und Relationen: $1 \in \{1\}$, $1, 3 \in \{1, 3\}$, $1, 3, 4 \in \{1, 3, 4\}$.

größer gleich 2 überbrücken und die wegen der Transitivität ja alle existieren) und Schleifen $\circ$ (die die Reflexivität beschreiben) führt zum sogenannten **Hassediagramm**; (vgl.[SchS] p. 34).

Beispiel: Teilerdiagramm $(T(n), |)$ für die Menge der positiven Teiler von n ; für $n = 2^3$, $n = 2^3 \cdot 3$ und $n = 2^3 \cdot 3 \cdot 5$, siehe Abb. 2.3 !

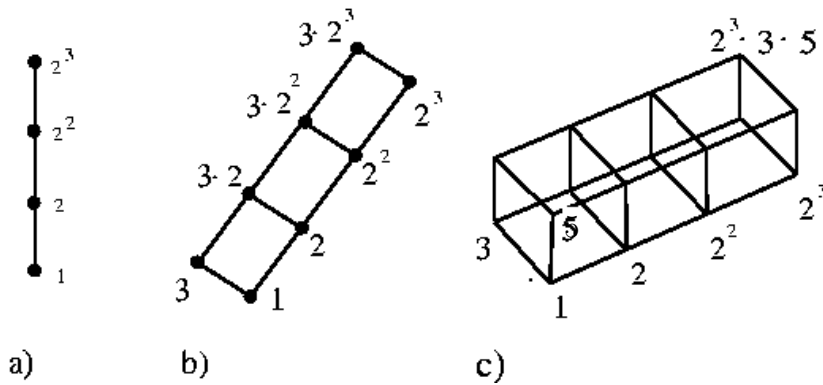
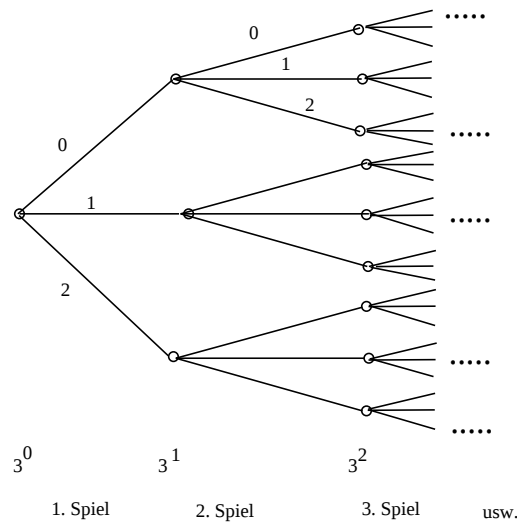


Abbildung 2.3: Teilbarkeitsrelation auf
 a) $T(2^3)$ b) $T(2^3 \cdot 3)$ und c) $T(2^3 \cdot 3 \cdot 5)$

2.2 Veranschaulichung von Wortmengen durch Bäume

Die Menge der Wörter der Länge n über einem Alphabet A , also A^n , läßt sich durch einen Baum repräsentieren. Der i -ten Komponente des Wortes $a_1 \dots a_{i-1} a_i \dots$ entspricht dabei ein Verzweigungs-Ast, der von dem $a_1 \dots a_{i-1}$ darstellenden Knoten ausgeht und der z. B. mit a_i numeriert wird ($i = 1, \dots, n-1$). Es entsteht so rekursiv ein Baum mit n „Niveaus“, dessen $|A|^n$ Blätter den Elementen von A^n entsprechen. Anstelle der Blätter können auch die zu ihnen führenden Wege zur Beschreibung der Wörter dienen.

Neben den schon im 1. Kapitel angeführten Beispielen erwähnen wir hier noch den Baum zur Menge der Wörter der Länge 11 über dem Alphabet



Elferwette:

Anzahl der möglichen Tipreihen

$$3^{11} = 177147 \text{ Möglichkeiten}$$

Abbildung 2.4: Fußballtoto-Baum (Ausschnitt)

$\{0, 1, 2\}$. Ein Ausschnitt (bis zum Niveau 3) ist in Abb. 2.4 dargestellt. Interpretiert man 0 als Unentschieden, 1 als Sieg der Heimmannschaft, 2 als Gewinn der Gastmannschaft, so beschreibt ein Wort aus $\{0, 1, 2\}^{11}$ eine mögliche Tipreihe zu 11 Spielen im Fußball-Toto. Daher heißt der entsprechende Baum auch **Totobaum**.

Allgemeiner läßt sich auch $A_1 \times \dots \times A_n$ anhand eines Baumes darstellen. An den Knoten des $(i - 1)$ -ten Niveaus des Baumes sind dann jeweils $|A_i|$ Verzweigungen, mit den Elementen von A_i numeriert, angetragen. Ein Beispiel liefert der **Skatbaum**, Abb. 3.5.

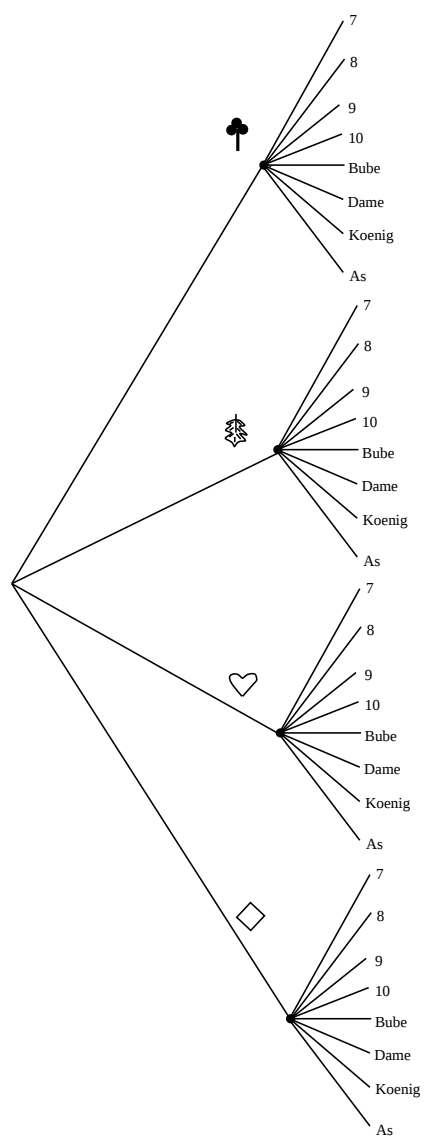


Abbildung 3.5: Skatbaum

2.3 Mengensysteme und bipartite Graphen

2.3.1 Mengensystem und Inzidenzgraph

a) Definition **Mengensystem**: Ein *Mengensystem* $(S, \mathbf{A})$ mit $\mathbf{A} = (A_1, \dots, A_n)$ ist ein n -Tupel von Mengen $A_1, \dots, A_n$ derart, daß gilt:

$$\bigcup_{i=1}^n A_i \subseteq S.$$

b) Definition **Inzidenzgraph**: Jedes Mengensystem hat eine Darstellung als bipartiter Graph auf

$$V = S \cup \mathbf{A},$$

wenn wir als Kante definieren

$$\boxed{(p, A) \in E : \iff p \in A} \quad (\text{für alle } p \in S, A \in \mathbf{A}).$$

Der Graph $G(V, E)$ heißt *Inzidenzgraph* von $(S, \mathbf{A})$.

c) Umgekehrt bestimmt jeder bipartite Graph $G(S \dot{\cup} U, E)$ den Graphen eines Mengensystems mit

$$\boxed{A_i := \{p \in S \mid (p, b_i) \in E\}} \quad \text{für jedes } b_i \in U.$$

d) *Beispiel*: $A_1 = \{3\}$, $A_2 = A_3 = \{1, 2, 3\}$, $A_4 = \{1, 3, 4, 5\}$,
 $S = \bigcup_{i=1}^4 A_i = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, s. Abb. 2.6 a.

Anwendung: Beantwortung der Frage nach Bedingungen für die Existenz von *Vertretersystemen*:

2.3.2 Transversalen, Vertretersysteme

a) Definition: Unter einer **Transversalen** (einem **Vertretersystem**, einem System von verschiedenen Repräsentanten) von $(S, \mathbf{A})$ versteht man eine injektive Abbildung (Auswahlfunktion)

$$\Psi : \mathbf{A} \rightarrow S \text{ mit } \Psi(A) \in A \text{ für alle } A \in \mathbf{A}$$

bzw. das n -Tupel $(\Psi(A_1), \dots, \Psi(A_n))$.

Einem Vertretersystem von $(S, \mathbf{A})$ entspricht im bipartiten Graphen $G = G(S \cup \mathbf{A}, E)$ ein Matching (vgl. 1.4.2) von G , das $\mathbf{A}$ bedeckt.

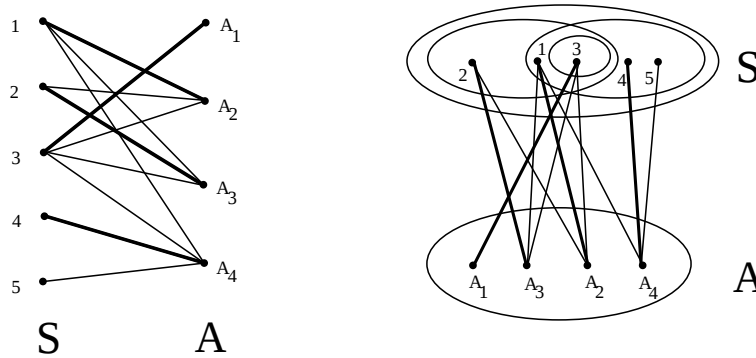


Abbildung 2.6: a) Inzidenzgraph mit Transversale b) zugehöriges Mengensystem

b) *Beispiele:* (i) In Abb. 2.6 bestimmen die dick gezeichneten Kanten eine Transversale. (ii) Es existiert keine Transversale zu dem in Abb. 2.7 dargestellten Graphen.

Existiert keine Transversale, so kann man nach maximalen partiellen Transversalen bzw. maximalen Matchings fragen:

2.3.3 Definition: Partielle Transversale

Sei $G(V, E)$ bipartiter Graph mit Eckenmenge $V = S \dot{\cup} U$ und Kantenmenge E . Eine Teilmenge $T \subseteq S$ heißt *partielle Transversale*, falls eine Injektion $\varphi : T \rightarrow U$ existiert mit $(p, \varphi(p)) \in E$ für alle $p \in T$. Analog definiert man partielle Transversalen zu U .

Jedes Matching von $G(V, E)$ bestimmt eine partielle Transversale des zugeordneten Mengensystems und umgekehrt.

Um Vertretersysteme bzw. Transversalen untersuchen zu können, betrachten wir im nächsten Kapitel Flüsse in Netzwerken und wenden diese Theorie u.a. auf bipartite Graphen an.

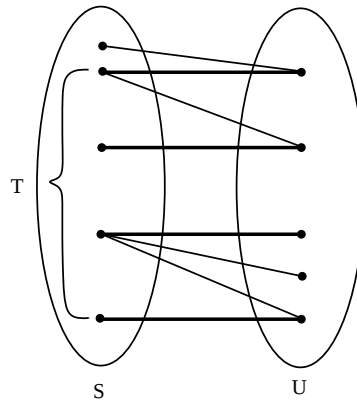


Abbildung 2.7: Beispiel einer partiellen Transversalen

2.4 Schubfachprinzipien

Abweichend vom gegenwärtigen Thema behandeln wir zunächst das klassische Schubfachprinzip, kommen aber dann bei den Verallgemeinerungen auf Darstellungen durch Graphen zurück.

2.4.1 Das (klassische) Schubfachprinzip

Eines der elementarsten Prinzipien der Kombinatorik ist das folgende *Schubfachprinzip*, im Englischen pigeon-hole principle, im Deutschen auch (Dirichlet'sches) Taubenschlagprinzip genannt:

Halten sich n Tauben in weniger als n Taubenschlägen auf, so gibt es mindestens einen Taubenschlag, indem sich wenigstens zwei Tauben befinden.

oder auch:

Werden n Elemente in weniger als n Fächer gelegt, so enthält mindestens eines der Fächer mehr als ein Element.

Formaler formuliert:

Satz 2.1 (Schubfachprinzip) Seien S eine n -Menge; $r \in \mathbb{N}$ und $S = A_1 \dot{\cup} \dots \dot{\cup} A_r$ eine beliebige Partition von S in r Blöcke (mit $r < n$). Dann existiert ein $i \in \{1, \dots, r\}$ mit $|A_i| \geq 2$.

Beweis (mit Hilfe des Satzes $|A \cup B| \leq |A| + |B|$ der Mengenlehre, der durch vollständige Induktion auf mehrere Teilmengen verallgemeinert werden kann):

Annahme: Es gelte $|A_i| \leq 1$ für alle $i \in \{1, \dots, r\}$. Es folgte

$$n = |S| = \left| \bigcup_{i=1}^r A_i \right| \underset{\text{s. o.}}{\leq} \sum_{i=1}^r |A_i| \leq r \leq n - 1, \text{ ein Widerspruch.} \quad \square$$

2.4.2 Anwendungsbeispiele

a) Unter 8 Leuten gibt es mindestens 2, deren Geburtstag auf den gleichen Wochentag fällt; (vgl. [StW]).

Beweis: Seien S die Menge der 8 Leute und A_i die Menge derjenigen unter diesen Leuten, deren Geburtstag auf den i -ten Tag der Woche fällt ($i = 1, \dots, 7$); die Wochentage werden also als Schubladen aufgefaßt. Nach Satz 2.1 existiert ein i mit $|A_i| \geq 2$. $\square$

b) Unter 13 Leuten gibt es mindestens 2, deren Geburtstag im gleichen Monat liegt.

2.4.3 Monochromatische Dreiecke bei Kantenfärbungen

Wir beginnen mit einer Verallgemeinerung des Schubfachprinzips auf 2-Teilmengen: Gegeben sei eine n -Menge M und eine Partition der 2-Teilmengen von M in 2 Komponenten: $\binom{M}{2} = A_1 \dot{\cup} A_2$. Wir veranschaulichen $\binom{M}{2}$ durch die Kanten des vollständigen Graphen K_n , dessen Knoten mit den Elementen von M identifiziert werden können und dessen Kanten alle 2-Teilmengen von M repräsentieren, s. Abb. 2.8. Die Partition von $\binom{M}{2}$ kann dann durch eine Färbung der Kanten mit einer von zwei Farben (z. B. rot und blau) beschrieben werden: Z. B. ist dann A_1 die Menge der roten und A_2 die der blauen Kanten.

Frage: Für welche n kann man den K_n wie beschrieben färben, ohne daß er ein monochromatisches Dreieck enthält?

Für $n \leq 5$ ist dies möglich, s. Abb. 2.8. Für $n \geq 6$ gehen von einer Ecke v des K_n mindestens 5 Kanten aus; o. B. d. A. seien mindestens

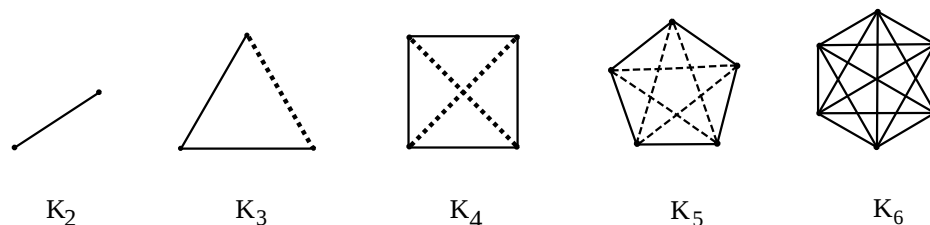


Abbildung 2.8: Die vollständigen Graphen K_n ($n = 2, 3, 4, 5, 6$) mit Kanten-Färbung — rot und - - - blau

3 davon rot: $\{v, u_1\}$, $\{v, u_2\}$, $\{v, u_3\}$; ist eine der Kanten $\{u_i, u_j\}$ rot, so ist $\{v, u_i, u_j\}$ ein rotes Dreieck; sind alle drei blau, so ist $\{u_1, u_2, u_3\}$ ein blaues Dreieck, (s. Abb. 2.9).

Für $n \geq 6$ enthält K_n also stets ein monochromatisches Dreieck, also eine 3-Teilmenge, deren 2-Teilmengen alle zur selben Partitions-Komponenten gehören.

Verallgemeinerung zum Satz von Ramsey (vgl. Artikel in Spektrum der Wissenschaft xxx):

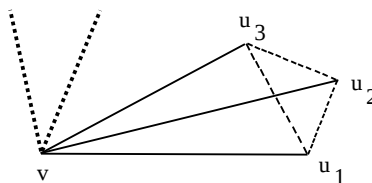


Abbildung 2.9: Zum Satz von Ramsey

Satz 2.2 (Satz von Ramsey) Seien $k, \ell_1, \dots, \ell_r$ natürliche Zahlen mit $k \leq \ell_1, \ell_2, \dots, \ell_r$, dann existiert eine kleinste natürliche Zahl $N(k; \ell_1, \ell_2, \dots, \ell_r)$ derart, daß für alle $n \geq N(k; \ell_1, \ell_2, \dots, \ell_r)$ folgendes gilt: Ist M eine n -Menge und

$$\binom{M}{k} = A_1 \dot{\cup} \dots \dot{\cup} A_r$$

eine Zerlegung¹ der k -Teilmengen von M , dann existiert ein $i \in \{1, \dots, r\}$ und eine ℓ_i -Teilmenge T_i von M mit ² $\binom{T_i}{k} \subseteq A_i$.

Beweis: s. z. B. [Ai₂] p. 442 f, [HH] p. 135 ff oder [Li] p. 69 ff.

Anmerkung: (i) Die Zahlen $N(k; \ell_1, \dots, \ell_r)$ heißen Ramsey-Zahlen; sie sind exakt meist nur für kleine Argumente bekannt.

(ii) Der Satz von Ramsey zeigt, daß vollständige Unordnung nicht möglich ist: Jede hinreichend große Menge von Zahlen oder Punkten enthält zwangsläufig eine regelmäßige Substruktur.

Beispiel: Bei der Frage nach monochromatischen Dreiecken in einem Graphen, dessen Kanten mit zwei Farben gefärbt sind (s. 2.4.3), ist (mit den Bezeichnungen des Satzes von Ramsey) $k = 2, r = 2, \ell_1 = \ell_2 = 3$; wir haben damit $N(2; 3, 3) = 6$ gezeigt.

Anwendungsbeispiel:

Satz 2.3 (Erdős und Szekeres) (für $s = 4$ von Esther Klein): Sei $s \geq 3$; dann existiert eine kleinste Zahl N_s , so daß gilt: Ist $n \geq N_s$, und sind n beliebige Punkte der euklidischen Ebene gegeben, von denen keine drei kollinear sind, so gibt es s von ihnen, die Eckpunkte eines konvexen Polygons sind.

Beweis-Skizze: Für $s = 3$ ist die Behauptung mit $N_3 = 3$ richtig. Sei $s \geq 4$ und $n \geq N(4; s, 5)$, ferner M eine n -Menge von Punkten der Ebene und A_1 die Menge der konvexen Vierecke mit Eckpunkten aus M ; dann ist $\binom{M}{4} = A_1 \dot{\cup} \mathcal{C}_{\binom{M}{4}} A_1$ eine Zerlegung, für die nach dem Satz von Ramsey gilt: Es existiert ein s -Eck, dessen Vierecke alle konvex sind, oder es existiert ein 5-Eck, dessen 4-Ecke alle nicht-konvex sind.

¹einer Färbung der k -Teilmengen entsprechend

²also eine ℓ_i -Teilmenge T_i , deren k -Teilmengen alle die Farbe i haben.

Man kann zeigen, daß der letzte Fall nicht eintreten kann und im ersten Fall die s Punkte ein konvexes s -Eck bilden. $\square$

2.5 Übungsaufgaben zu Kap. 2

Übungsaufgabe 2.1

Folgende Aufgabe ist als **3-Türen-Problem** (oder **Ziegenproblem**) bekannt: In einer Talkshow steht hinter einer von 3 verschlossenen Türen³ als Hauptgewinn ein Auto, während hinter den beiden anderen je eine Ziege zu finden ist. Der Kandidat wählt auf gut Glück eine der 3 Türen. Der über die Position des Autos informierte Talkmaster öffnet eine der beiden anderen Türen⁴, hinter der eine Ziege steht. Jetzt darf der Kandidat sich noch umentscheiden. Soll er das tun?

(Eine analoge Aufgabe ist das **“Bürgermeisterproblem”**, siehe H. Winter, [Win]!

Lösung zu Aufg. 2.1: Die vom Kandidat gewählte Tür habe die Nummer 1, die vom Talkmaster geöffnete die Nummer 2. Wir betrachten den zugehörigen *Wahrscheinlichkeitsbaum*, s. Abb. 2.10.

Die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis G , dass der Hauptgewinn hinter Tür 1 ist, unter der Bedingung Z , daß der Talkmeister Tür 2 öffnet, erfüllt

$$P(G|Z) = \frac{P(G \wedge Z)}{P(Z)} = \frac{P(G) \cdot P(Z|G)}{P(Z)} = \frac{\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}}{(\frac{1}{3} + \frac{1}{6})} = \frac{1}{3}.$$

Daher ist $P(\text{non } G | Z) = \frac{2}{3}$. Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass der Hauptgewinn sich hinter Tür 3 verbirgt, ist also doppelt so groß, und der Kandidat sollte sich also umentscheiden.

³mit gleicher Wahrscheinlichkeit für jede Tür

⁴Vorausgesetzt wird, daß der Talkmaster für den Fall, dass er überhaupt eine Wahl hat, sich für eine der beiden Türen mit Wahrscheinlichkeit $1/2$ entscheidet.

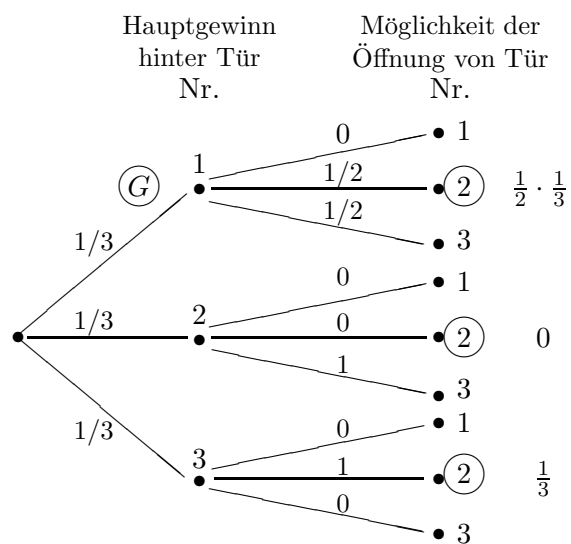


Abbildung 2.10: Wahrscheinlichkeits-Baum zu Übungsaufgabe 2.1