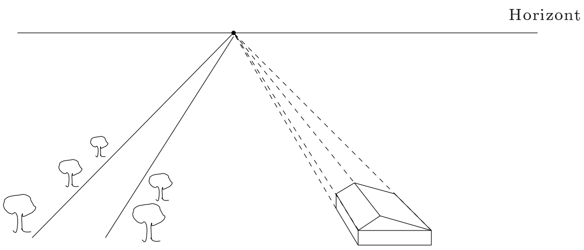
§ 1 Etwas projektive Geometrie

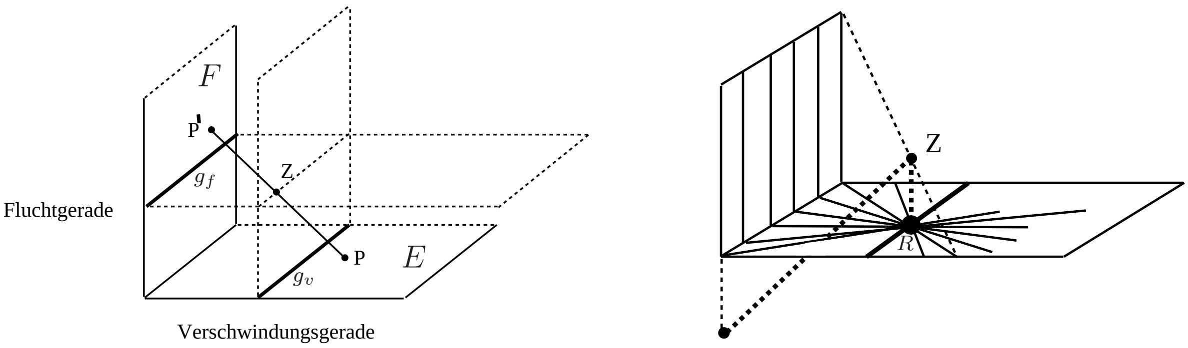
1.1 Motivation: Zentralprojektion

Auf Fotografien und Bildern treffen sich parallele Geraden oft in einem Punkt am Horizont. Bei perspektivischen Zeichnungen sind solche Punkte, sogenannte *Fluchtpunkte*, wesentliche Konstruktionshilfen.



Figur 16.1: Parallele Geraden treffen sich im „Unendlichen“.

Wir behandeln nun zuerst eine **Zentralprojektion** ζ in $\mathbb{R}^3$ mit Zentrum Z von einer Ebene E auf eine dazu nicht parallele Ebene F. Dabei wird einem Punkt P von E der Schnittpunkt P' der Geraden ZP mit F zugeordnet. (Siehe Figur 16.2 a) !)



a) b)

Figur 16.2: Zentralprojektion der Ebene E auf die Ebene F mit Zentrum Z

Nicht alle Punkte von E haben einen Bildpunkt und nicht alle Punkte von F ein Urbild: Die Schnittgerade g_v der durch Z gehenden zu F parallelen Ebene mit E besteht genau aus denjenigen Punkten, die kein Bild besitzen. Analog besitzen die Punkte der Schnittgeraden g_f der mit Z inzidierenden zu E parallelen Ebene mit F kein Urbild. (Siehe ebenfalls Figur 16.2 a) !). Die Gerade g_v heißt **Verschwindungsgerade**, die Gerade g_f **Fluchtgerade**,

Bei der Abbildung $\zeta : E \backslash g_v \to F \backslash g_f$ werden Geraden von $E \backslash g_v$ (die ja mit Z eine Ebene aufspannen) auf Geraden von $F \setminus g_f$ (die Schnitte dieser Ebenen mit F) abgebildet – und umgekehrt haben Geraden von $F \setminus g_f$ als Urbilder Geraden von $E \setminus g_v$.

Betrachtet man nun, was mit einem Geradenbüschel durch einen Punkt R von g_v passiert, so sieht man, dass die Bilder dieser Geraden in F keinen Punkt gemeinsam haben und damit parallel sind. (Siehe Figur 16.2 b)!) „Der Bildpunkt von R liegt also auf dieser Parallelenschar im Unendlichen“. Dadurch motiviert definiert man:

1.2 Projektive Erweiterung der reellen affinen Ebene

Als *projektive Erweiterung* $\mathrm{PG}(\mathcal{A})$ der reellen affinen Ebene $\mathcal{A} = \mathrm{AG}(\mathbb{R}^2) =: \mathrm{AG}(2, \mathbb{R})$ bezeichnen wir folgende Geometrie:

(i) *Punkte* von $\mathrm{PG}(\mathcal{A})$ sind die Punkte von $\mathcal{A}$ (die **eigentlichen Punkte**) und die Parallelenscharen der Geraden von $\mathcal{A}$. Also: Jede Menge aller zu einer Geraden parallelen Geraden bildet per definitionem einen neuen Punkt, einen sogenannten „**uneigentlichen oder idealen Punkt**“.

(ii) *Geraden* von $\mathrm{PG}(\mathcal{A})$ sind die Geraden von $\mathcal{A}$, jede erweitert um den eindeutig bestimmten uneigentlichen Punkt in ihrer Richtung, und eine weitere Gerade, bestehend aus allen uneigentlichen Punkten, die **uneigentliche Gerade** g_∞.

(iii) Ein eigentlicher Punkt *inzidiert* mit einer eigentlichen Geraden, falls das auch in $\mathcal{A}$ der Fall ist. Ein uneigentlicher Punkt inzidiert mit einer eigentlichen Geraden, falls diese zu seiner Parallenschar gehört. Und g_∞ inzidiert genau mit den uneigentlichen Punkten.

Übungsaufgabe 16.1 Zeigen sie, dass in $\mathrm{PG}(\mathcal{A})$ je zwei Punkte durch genau eine Gerade verbunden sind und je zwei Geraden sich in genau einem Punkt schneiden.

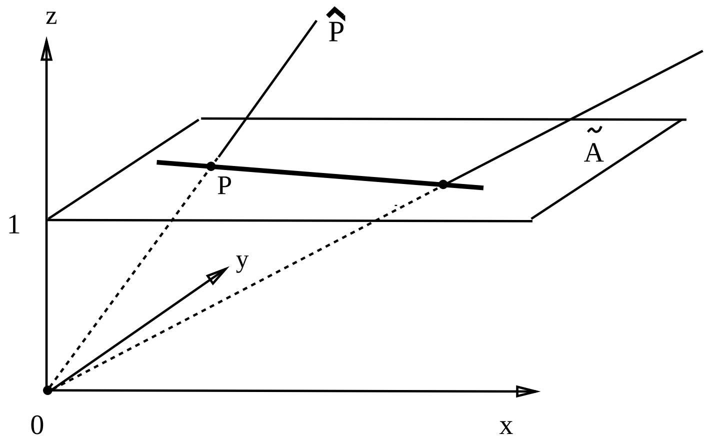
Um die neue Geometrie koordinatisieren zu können, wählen wir Z als den Nullpunkt O unseres Koordinatensystem und E als die (zu $\mathcal{A}$ isomorphe) Ebene $\tilde{A}$ mit der Gleichung $z = 1$; nun ordnen wir jedem Punkt P von $\tilde{A}$ die Gerade $\hat{P} := PO$ zu und jeder Geraden g von $\tilde{A}$ die Ebene, die von g und O aufgespannt wird. (Siehe Figur 16.3).

1.3 Definition: homogene Koordinaten

Ein eigentlicher Punkt der affinen Ebene $\mathcal{A}$ mit den Koordinaten $(x, y) \in \mathcal{A}$ (bzw. $(x, y, 1) \in \tilde{A}$) entspricht der Geraden $(x, y, 1)\mathbb{R}$; die uneigentlichen Punkte entsprechen den Geraden der Form $(x, y, 0)\mathbb{R}$. Umgekehrt definiert jede Gerade einen eigentlichen oder uneigentlichen Punkt.
Jedem Koordinatentripel (ξ_1, ξ_2, ξ_0) mit $\xi_0 \neq 0$ ordnen wir daher einen affinen Punkt zu durch:

$$\hat{P} := (\xi_1, \xi_2, \xi_0)\mathbb{R} \mapsto (\frac{\xi_1}{\xi_0}, \frac{\xi_2}{\xi_0}, 1) = P.$$

(ξ_1, ξ_2, ξ_0) heißt *homogenes Koordinatentripel* von P; es ist nur bis auf einen Faktor eindeutig bestimmt.
Analog lässt sich jedem $(\xi_1, \xi_2, 0)$ mit $\xi_1 \neq 0 \vee \xi_2 \neq 0$ ein uneigentlicher Punkt zuordnen. Man kommt damit zu der in folgender Definition beschriebenen Geometrie:



Figur 16.3: Zur Einführung homogener Koordinaten
$(x, y) \mapsto P = (x, y, 1) \mapsto \hat{P} = (x, y, 1)\mathbb{R})$.

1.4 Definition: Reelle projektive Ebene

Die *projektive Ebene* $\mathrm{PG}(2, \mathbb{R})$ $=\mathrm{PG}(\mathbb{R}^3)$ ist wie folgt definiert:

(i) Punkte sind die $1-$dim Unterräume von $\mathbb{R}^3$.

(ii) Geraden sind die $2-$dim Unterräume von $\mathbb{R}^3$.

(iii) Inzidenz ist Enthaltensein.

1.5 Anmerkungen zur projektiven Geometrie

a.) Eine Verallgemeinerung auf beliebige Schiefkörper und auf andere Dimensionen ist möglich.

b.) Der Vorteil der projektiven Geometrie ist u.a., dass

- die Punkte, Geraden, Ebenen etc. jetzt lineare Unterräume und keine anderen affinen Unterräume sind
- affin-lineare Abbildungen, wie man zeigen kann, nun durch lineare Abbildungen dargestellt werden
- Fallunterscheidungen bzgl. Existenz von Schnittpunkten von Geraden in einer Ebene nicht nötig sind
- Punkte und Hyperebenen „dual“ zueinander sind
- die reelle affine Ebene (nach Auszeichnung einer Geraden als uneigentliche Gerade) in $\mathrm{PG}(2, \mathbb{R})$ wiederzufinden ist (bzw. der $n-$dim affine Raum über K durch Auszeichnung einer Hyperebene in $\mathrm{PG}(K^{n+1})$ als uneigentliche Hyperebene erhalten wird.)