§ 11 Lineare Gleichungssysteme II: Rang von Matrizen, elementare Zeilenumformungen und Gaußsche Elimination

Im Laufe der Entwicklung der Vektorraumtheorie haben wir die Lösungsstruktur linearer Gleichungssysteme untersucht. Die dabei erhaltenen Ergebnisse erleichtern zwar die Angabe der Lösung, liefern aber kein Verfahren zur praktischen Bestimmung. Ein solches behandeln wir im Folgenden. (Weitere Verfahren können Sie u.a. in der Vorlesung über Numerische Mathematik kennen lernen.)

11.1 Voraussetzungen und Schreibweisen

Gegeben sei (über dem Körper K) das lineare Gleichungssystem (LGS)

$$(*)\left\{\begin{array}{ccccccccc} \alpha_{11}\xi_1 & + & \alpha_{12}\xi_2 & + & \ldots & + & \alpha_{1n}\xi_n & = & \beta_1 \\ \alpha_{21}\xi_1 & + & \alpha_{22}\xi_2 & + & \ldots & + & \alpha_{2n}\xi_n & = & \beta_2 \\ \vdots & & & & & & \vdots & & \vdots \\ \alpha_{m1}\xi_1 & + & \alpha_{m2}\xi_2 & + & \ldots & + & \alpha_{mn}\xi_n & = & \beta_m \end{array}\right.$$

mit Koeffizientenmatrix

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \ldots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \ldots & \alpha_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \ldots & \alpha_{mn} \end{pmatrix} .$$

Letztere ist eine $(m \times n)-$Matrix mit Einträgen $\alpha_{i,j} \in K$, in Zeichen: $A \in K^{(m,n)} := K^{\{1,\ldots,m\}\times\{1,\ldots,n\}}$. (Vgl. §10 !) Die Elemente $\beta_1, \ldots, \beta_m \in K$ der rechten Seite schreiben wir jetzt als Spaltenvektor, also als $(m \times 1)-$Matrix:

$$b = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_m \end{pmatrix} \in K^{(m,1)} .$$

Auch eine Lösung von $(*)$ geben wir in Zukunft meist als Spaltenvektor an: Definitionsgemäß ist dann

$$x = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_n \end{pmatrix} \in K^{(n,1)}$$

Lösung von $(*)$, falls gilt:

$$A \cdot x := \begin{pmatrix} a_{1\bullet} \cdot x \\ \vdots \\ a_{m\bullet} \cdot x \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^{n} \alpha_{1j}\xi_j \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^{n} \alpha_{mj}\xi_j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ \beta_m \end{pmatrix} = b.$$

Es erweist sich als sinnvoll, A und b zusammenzufassen zur **erweiterten Koeffizientenmatrix** $(A|b)$, definiert durch

$$(A|b) := \left(\begin{array}{cccc|c} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} & \beta_1 \\ \vdots & & & \vdots & \vdots \\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \dots & \alpha_{mn} & \beta_m \end{array}\right) .$$

Diese ist eine Matrix über K mit m Zeilen und $n+1$ Spalten, also ein Element von $K^{(m,n+1)}$. Der Strich dient dabei der besseren optischen Gliederung und erinnert an die Stellung der Spalten im LGS:

$$\begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|} \hline \alpha_{11} & \xi_1 + & \alpha_{12} & \xi_2 + \dots + & \alpha_{1n} & \xi_n = & \beta_1 \\ \alpha_{21} & \xi_1 + & \alpha_{22} & \xi_2 + \dots + & \alpha_{2n} & \xi_n = & \beta_2 \\ \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\ \alpha_{m1} & \xi_1 + & \alpha_{m2} & \xi_2 + \dots + & \alpha_{mn} & \xi_n = & \beta_m \\ \hline \end{array} .$$

Beispiel: Das lineare Gleichungssystem

$$\left\{ \begin{aligned} 2\xi_1 + 3\xi_2 - \xi_3 &= 4 \\ \xi_1 + \xi_2 + \xi_3 &= 3 \end{aligned} \right.$$

lässt sich schreiben als

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Die erweiterte Koeffizientnematrix ist

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -1 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{array}\right) .$$

Wir behandeln nun ein **Kriterium für die Lösbarkeit** des LGS $(*)$: Es gilt:

$Ax = b$ besitzt eine Lösung $x \iff f_A((\xi_1, \dots, \xi_n)) = (\beta_1, \dots, \beta_m)$ ist lösbar.

$\iff (\beta_1, \dots, \beta_m) \in$ Bild f_A (Vgl. Satz 10.10 !)

$$\iff \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_m \end{pmatrix} \in \left\{ Ax \mid x = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_n \end{pmatrix} \in K^{(n,1)} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha_{11}\xi_1 + \dots + \alpha_{1n}\xi_n \\ \vdots \quad \vdots \\ \alpha_{m1}\xi_1 + \dots + \alpha_{mn}\xi_n \end{pmatrix} \mid \xi_j \in K \right\}$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} \alpha_{11} \\ \vdots \\ \alpha_{m1} \end{pmatrix} \xi_1 + \dots + \begin{pmatrix} \alpha_{1n} \\ \vdots \\ \alpha_{mn} \end{pmatrix} \xi_n \mid \xi_1, \dots, \xi_n \in K \right\} = \left\langle \begin{pmatrix} \alpha_{11} \\ \vdots \\ \alpha_{m1} \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} \alpha_{1n} \\ \vdots \\ \alpha_{mn} \end{pmatrix} \right\rangle .$$

Das LGS $(*)$ist also genau dann lösbar, wenn der Vektor b der rechten Seite in dem von den Spalten der Koeffizientenmatrix A aufgespannten Unterraum liegt, sich also durch Hinzunahme von b dieser Unterraum , d.h. auch dessen Dimension, nicht vergrößert. Wir vereinbaren folgende Bezeichnung:

11.2 Definition: Rang einer Matrix

Zu $A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \dots & \alpha_{mn} \end{pmatrix}$ definiert man als (Spalten-) **Rang von A** die Dimension des von den Spaltenvektoren von A aufgespannten Unterraumes von $K^{(n,1)}$:

$$\operatorname{Rang} A := \operatorname{rg} A := \dim_K(\left\langle \begin{pmatrix} \alpha_{11} \\ \vdots \\ \alpha_{m1} \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} \alpha_{1n} \\ \vdots \\ \alpha_{mn} \end{pmatrix} \right\rangle) \quad .$$

11.3 Definition (Rang einer linearen Abbildung) und Anmerkung

Für eine lineare Abbildung $f : V \to W$ definiert man:

$$\operatorname{Rang} f := \dim_K \operatorname{Bild} f = \dim_K f(V).$$

Ist nun A eine Matrix über K und f_A wie oben definiert (d.h. durch Multiplikation mit der Matrix A gegeben), so gilt wegen Bild $f_A = \langle a_{\bullet 1}, \dots, a_{\bullet n} \rangle$:

$$\boxed{\operatorname{Rang} f_A = \operatorname{Rang} A.}$$

Beispiel: Sind $K = \mathbb{R}, m = 2, n = 3$ und $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, so erhält man

$$\operatorname{Rang} A = \dim_K < \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} >= 2,$$

da die angegebenen Spalten als Vektoren des 2-dim Vektorraum $\mathbb{R}^{(2,1)}$ einen Unterraum der Dimension höchstens und damit genau 2 erzeugen.

Mit den eben eingeführten Bezeichnungen können wir dann die vorigen Überlegungen zusammenfassen zu folgendem

11.4 Satz (Lösbarkeitskriterium)

Das lineare Gleichungssystem $Ax = b$ ist genau dann lösbar, wenn b von den Spaltenvektoren der Koeffizientenmatrix A linear abhängt, d.h. wenn der Rang der Koeffizientenmatrix A gleich dem der erweiterten Koeffizientenmatrix $A_{\text{erw}} := (A|b)$ ist, also wenn gilt:

$$\boxed{\operatorname{Rang} A = \operatorname{Rang} A_{\text{erw}}}$$

11.5 Anmerkung (Dimension des Lösungsraums)

Wir werden später sehen, dass gilt:

$$\dim_K(\operatorname{Kern} f_A) = n - \operatorname{Rang} f_A \quad .$$

Im Fall der Lösbarkeit des LGS $(*)$ folgt daher (unter Verwendung von Satz 10.12) für den Lösungsraum L von $(*)$:
$\dim_K L = \dim_K(p + L_0) = \dim_K L_0 = \dim(\operatorname{Kern} f_A) = n - \operatorname{Rang} f_A = n - \operatorname{Rang} A$.
Wir halten fest:

$$\boxed{\dim_K L = n - \operatorname{Rang} A} \quad .$$

Um zu einem Lösungsverfahren von Lineare Gleichungssystemen zu kommen, überlegen wir nun, welche Umformungen von (11.1) die Lösungsmenge von (11.1) „erhalten“. Es sind dies u.a. :

(i) die Multiplikation der k–ten Gleichung mit einem Skalar $\lambda \in K \setminus \{0\}$ (für $k \in \{1, \ldots, m\}$)

(ii) die Addition der k–ten Gleichung zur i–ten Gleichung (für $i, k \in \{1, \ldots, m\},\ i \neq k$)

(iii) das Vertauschen zweier Gleichungen

(iv) die Addition des λ–fachen der k–ten Gleichung zur i–ten Gleichung (für $\lambda \in K$ und $i, k \in \{1, \ldots, m\},\ i \neq k$).

Wir bemerken, dass die Umformungen (iii) und (iv) durch mehrfache Anwendung von Umformungen der ersten beiden Typen erreicht werden kann, nämlich[39]

(iv) durch (i) und danach (ii) und

(iii) mittels $z_i \longrightarrow \overline{z_i} := z_i - z_k \longrightarrow \overline{z_k} := z_k + \overline{z_i} = z_i \longrightarrow \overline{\overline{z_i}} := -\overline{z_i} + \overline{z_k} = z_k$.

Untersucht man, wie sich die erwähnten Umformungen auf die erweiterte Koeffizientenmatrix von (11.1) auswirkt, so stößt man auf folgende sogenannte elementare Zeilenumformungen einer Matrix:

11.6 Definition: Elementare Zeilenumformungen

Unter einer elementaren Zeilenumformung an einer $(m \times s)$–Matrix C über K versteht man eine der folgenden Operationen:

(i) Die Multiplikation einer Zeile von C mit einem Skalar $\lambda \in K \setminus \{0\}$.

(ii) Die Addition der k–ten Zeile von C zur i–ten Zeile (für $i, k \in \{1, \ldots, m\},\ i \neq k$).

(iii) Das Vertauschen zweier Zeilen von C.

(iv) Die Addition des λ–fachen der k–ten Zeile von C zur i–ten Zeile (für $\lambda \in K$ und $i, k \in \{1, \ldots, m\}$, $i \neq k$).

[39] Dabei bezeichnen wir mit z_i die i–te Zeile (bzw. Gleichung), mit $\overline{z_i}$ die i–te Zeile nach der ersten Umformung dieser Zeile, mit $\overline{\overline{z_i}}$ die i–te Zeile nach der zweiten Umformung dieser Zeile usw..

11.7 Anmerkung

Die Umformungen (iii) und (iv) erhält man durch wiederholte Anwendungen der Umformungen der ersten beiden Typen, s.o.: Ad (iii):

$$(z_i, z_k) \longrightarrow (z_i, z_k + z_i) \longrightarrow (-z_i, z_k + z_i) \longrightarrow (z_k + z_i - z_i, z_k + z_i) \longrightarrow (z_k, z_i).$$

(iv): Übungsaufgabe.

Beispiel: Seien $K = \mathbb{R}$, $C = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & -3 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ und $z_i, \bar{z}_i, \bar{\bar{z}}_i$ die Zeilenvektoren von C und den daraus erhaltenen Matrizen.

$$C \xrightarrow[z_2 \to \bar{z}_2 = z_2 + z_1]{} \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow[\bar{z}_3 \to \bar{\bar{z}}_3 = \bar{z}_3 - 2\bar{z}_2]{} \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Wir vermerken, dass C die erweiterte Koeffizientenmatrix des LGS' s

$$\left\{ \begin{array}{rl} -\xi_1 + 2\xi_2 + 3\xi_3 = & 1 \\ \xi_1 - \xi_2 - 3\xi_3 = & 0 \\ 2\xi_2 \qquad = & 4 \end{array} \right.$$

ist.
Die obigen elementaren Umformungen entsprechen dem Übergang zu folgenden LGS'en:

$$\left\{ \begin{array}{rl} -\xi_1 + 2\xi_2 + 3\xi_3 = & 1 \\ \xi_2 \qquad = & 1 \\ 2\xi_2 \qquad = & 4 \end{array} \right. \quad \text{bzw.} \quad \left\{ \begin{array}{rl} -\xi_1 + 2\xi_2 + 3\xi_3 = & 1 \\ \xi_2 \qquad = & 1 \\ 0 = & 2 \end{array} \right. ,$$

deren Unlösbarkeit offensichtlich ist.
Dass die Lösungsmenge eines LGS's durch elementare Umformungen erhalten bleibt, besagt der folgende Satz:

11.8 Satz (Lösungsräume bei elementaren Umfomungen)

Entsteht die Matrix $\hat{B} = \left(\begin{array}{c|c} B & \begin{array}{c} \gamma_1 \\ \vdots \\ \gamma_m \end{array} \end{array} \right)$ aus $\hat{A} = \left(\begin{array}{c|c} A & \begin{array}{c} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_m \end{array} \end{array} \right)$ durch elementare **Zeilen**umformungen, so stimmen die Lösungsmengen der Gleichungssysteme mit den erweiterten Koeffizientenmatrizen $\hat{A}$ bzw. $\hat{B}$, also von

$$f_A(x) = (\beta_1, \ldots, \beta_m) \quad \text{und} \quad f_B(x) = (\gamma_1, \ldots, \gamma_m),$$

überein.

Beweis. Wie bemerkt entspricht einer elementaren Zeilenumformung der erweiterten Koeffizientenmatrix eine Multiplikation einer der Gleichungen mit einem Skalar bzw. die Addition einer der Gleichungen zu einer anderen oder eine daraus zusammengesetzte Operation. Damit sind die Lösungen des LGS mit erweiterter Koeffizientenmatrix $\hat{A}$, also von $f_A(x) = (\beta_1, \ldots, \beta_m)$, unter denen des LGS mit erweiterter Koeffizientenmatrix $\hat{B}$, also von $f_B(x) = (\gamma_1, \ldots, \gamma_m)$, enthalten.
Die umgekehrte Inklusion erhält man, wenn man beachtet, dass die **elementaren Zeilenumformungen durch ebensolche umgekehrt werden können,** nämlich z.B. die Multiplikation einer Zeile mit $\lambda \in K \setminus \{0\}$ durch die Multiplikation der entstandenen Zeile mit λ^{-1}, die Addition zweier Zeilen $z_i \longrightarrow \bar{z}_i = z_i + z_k$ durch $\bar{z}_i \longrightarrow z_i - \bar{z}_k = (z_i + z_k) - z_k = z_i$. $\square$

Ein weiteres Beipiel (mit $K = \mathbb{R}$) zeigt Figur 11.1.

$$\left.\begin{array}{rrrrl} \xi_1 + & \xi_2 - & \xi_3 & & = 0 \\ \xi_1 - & 2\xi_2 + & \xi_3 & & = 1 \\ \xi_1 - & 2\xi_2 & & - \ \xi_4 & = 2 \\ & & \xi_3 + & 2\xi_4 & = -1 \end{array}\right\} \longrightarrow A_{\text{erw.}} = \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -1 \end{array}\right)$$

$$\Big\downarrow \text{ elementare Zeilenumformung}$$

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -1 \end{array}\right)$$

$$\Big\downarrow \text{ elementare Zeilenumformung}$$

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -1 \end{array}\right)$$

$$\Big\downarrow \text{ elementare Zeilenumformung}$$

$$\left.\begin{array}{rrrl} \xi_1 + \xi_2 - & \xi_3 & & = 0 \\ -\ \xi_2 + & \frac{2}{3}\xi_3 & & = \frac{1}{3} \\ - & \xi_3 - & \xi_4 & = 1 \\ & & \xi_4 & = 0 \end{array}\right\} \longleftarrow B_{\text{erw.}} = \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & \frac{2}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

Figur 11.1: Ein weiteres Beispiel zu elementaren Umformungen
mit $\overline{z_2} := z_2 - z_1$, $\overline{z_3} := z_3 - z_1$, $\overline{\overline{z_3}} := \overline{z_3} - \overline{z_2}$, $\overline{\overline{\overline{z_4}}} := \overline{\overline{z_4}} + \overline{\overline{z_3}}$, $\overline{\overline{\overline{z_2}}} := \frac{1}{3}\overline{\overline{z_2}}$.

Aus letzterem LGS in „Zeilen-Stufenform“ lassen sich nun leicht die Komponenten einer Lösung „von unten her“ berechnen:

$$\xi_4 = 0,\ \xi_3 = -1,\ \xi_2 = \frac{2}{3}\xi_3 - \frac{1}{3} = -1,\ \xi_1 = -\xi_2 + \xi_3 = 0;$$

die Lösungsmenge L, nach (11.8) auch des Ausgangsgleichungssystems, ist also

$$L = \{(0, -1, -1, 0)\}.$$

11.9 Bemerkung (Gaußsche Elimination)

Der im Beispiel geschilderte Prozess zum Auflösen eines LGS's (oder auch die entsprechenden Operationen mit den Gleichungen selbst) heißt **Gaußsches Eleminationsverfahren**. Bei ihm wird durch elementare Umformungen ein Gleichungssystem in Stufenform hergestellt, das sich dann leicht auflösen lässt.
Im vorhergehenden Beispiel (s. Figur 11.1) hat das betrachtete LGS eine eindeutig bestimmte Lösung. Wie geht man vor, wenn die Dimension der Lösungsmannigfaltigkeit größer als 0 ist?
Dazu erneut ein **Beispiel** (mit $K = \mathbb{R}$ und Umformungen $\overline{z_2} = z_2 - z_1, \overline{z_3} = z_3 + \overline{z_2}$), s. Figur 11.2 ! Es gilt hier: Rang $B = 2$ =Rang B_{erw}, woraus $\dim L = 4 - \text{Rang} B = 2$ folgt.

$$\left.\begin{array}{rcr} \xi_1 - 2\xi_2 + \xi_3 \phantom{{}-\xi_4} &=& 1 \\ \xi_1 - 2\xi_2 \phantom{{}+\xi_3} - \xi_4 &=& 2 \\ \xi_3 + \xi_4 &=& -1 \end{array}\right\} \longrightarrow A_{\text{erw.}} = \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & -2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right)$$

$$\Big\downarrow \text{elementare Zeilenumformung}$$

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & -2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right)$$

$$\Big\downarrow \text{elementare Zeilenumformung}$$

$$\left.\begin{array}{rcr} \xi_1 - 2\xi_2 + \xi_3 &=& 1 \\ \xi_3 + \xi_4 &=& -1 \end{array}\right\} \longleftarrow B_{\text{erw.}} = \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & -2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) = (B|c)$$

Figur 11.2: Zu einem Beispiel mit mehrdimensionalem Lösungsraum

Beim Beispiel der Figur 11.2 gilt Rang $B = 2$ =Rang B_{erw}, woraus $\dim L = 4-$ Rang$B =$ 2 folgt. Zur Bestimmung der Lösungen hat man nun u.a. zwei Möglichkeiten:

(a) Man löst das letztere LGS, in dem man „von unten her“ Variable „separiert“:

$$\begin{aligned} &\xi_3 = -1 - \xi_4 \\ &\xi_1 = 2\xi_2 - \xi_3 + 1 = 2\xi_2 + \xi_4 + 2. \end{aligned}$$

Die höhere Dimension von L macht sich in der „freien Verfügbarkeit über ξ_2 und ξ_4“ bemerkbar. Mit $\xi_2 = \lambda$ und $\xi_4 = \mu$ erhält man

$$\begin{aligned} L &= \{(2\lambda + \mu + 2, \lambda, -1 - \mu, \mu) \mid \lambda, \mu \in \mathbb{R}\} \\ &= (2, 0, -1, 0) + (2, 1, 0, 0)\mathbb{R} + (1, 0, -1, 1)\mathbb{R}\,. \end{aligned}$$

(b) Man wählt auf der Suche nach einer Partikulärlösung z.B.

$$(\xi_2, \xi_3) = (0,0) \text{ und erhält } (1,0,0,-1) \in L \;;$$

Zur Bestimmung von linear unabhängigen Lösungen des homogenen Systems setzt man z.B.
$(\xi_2, \xi_3) = (1,0)$ [Damit erhält man $\rightarrow$ $\xi_4 = 0, \xi_1 = 2$] bzw. $(\xi_2, \xi_3) = (0,1)$ und gewinnt so $(2,\mathbf{1},\mathbf{0},0)$ bzw. $(-1,\mathbf{0},\mathbf{1},-1)$ als linear unabhängige Vektoren von L_0, also

$$L = (1,0,0,-1) + (2,1,0,0)\mathbb{R} + (1,0,-1,1)\mathbb{R}\;.$$

Abschließend präzisieren wir den Begriff der Zeilen-Stufenform einer Matrix und gehen auf die Möglichkeit ein, eine gegebene Matrix in eine Matrix von Stufenform überzuführen.

11.10 Satz (Zeilenstufenform durch elementare Umformungen)

Jede $(m \times n)$-Matrix A über K lässt sich durch endlich viele elementare Zeilenumformungen in eine Matrix der Form

$$B = \left(\begin{array}{cccccc} \beta_{1j_1} & \dots & & & & \\ 0 & \beta_{2j_2} & \dots & & & \\ \vdots & & \ddots & & & \\ 0 & \dots & 0 & \beta_{kj_k} & \dots & \beta_{kn} \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \end{array}\right)$$

mit $\beta_{ij_i} \neq 0$ für alle $i \in \{1, \dots, k\}$ und $j_1 < j_2 < \dots < j_k$ überführen. Die Form von B nennen wir **Zeilenstufenform**. (Evtl. ist $\{1, \dots, k\} = \emptyset$, d.h. B Nullmatrix.)

Beweisskizze. Die Überführung der Matrix A in die Matrix B erfolgt in mehreren Schritten.
Nach q Schritten sei

$$B_q = \left(\begin{array}{cccccc} \beta_{1j_1} & \dots & & & & \\ 0 & \beta_{2j_2} & \dots & & & \\ \vdots & & \ddots & & & \\ 0 & \dots & 0 & \beta_{qj_q} & \dots & \\ 0 & \dots & & 0 & * & \dots \\ \vdots & & & \vdots & \vdots & \\ 0 & \dots & & 0 & * & \dots \end{array}\right)$$

(Im Falle $q = 0$ setzen wir $B_q := A$). Der „eingerahmte Teil“ habe o.B.d.A. in der ersten Spalte ein von 0 verschiedenes Element (andernfalls verkleinern wir ihn oder sind fertig). Eventuell durch Zeilenvertauschungen erreichen wir, dass in der entstandenen Matrix

$$\bar{B}_q = \begin{pmatrix} \beta_{1j_1} & \cdots & & & \\ 0 & \ddots & & & \\ \vdots & & \beta_{qj_q} & \cdots & \\ 0 & \cdots & 0 & \beta_{q+1j_{q+1}} & \cdots \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \\ 0 & \cdots & 0 & \beta_{mj_{q+1}} & \cdots \end{pmatrix}$$

nun $\beta_{q+1\,j_{q+1}} \neq 0$ ist.
Durch Umformungen vom Typ (iv) mit $k = q+1$, $i \in \{q+2, \ldots, m\}$ und $\lambda = -\left(\beta_{(q+1)j_{q+1}}\right)^{-1}\beta_{ij_{q+1}}$ gelangen wir zu

$$B_{q+1} = \begin{pmatrix} \beta_{1j_1} & \cdots & & & & & \\ 0 & \ddots & & & & & \\ \vdots & & \beta_{qj_q} & & \cdots & & \\ 0 & \cdots & 0 & \beta_{q+1j_{q+1}} & \cdots & & \\ 0 & & \cdots & & 0 & * & \cdots \\ \vdots & & & & \vdots & \vdots & \\ 0 & & \cdots & & 0 & * & \cdots \end{pmatrix}$$

mit $\beta_{q+1\,j_{q+1}} \neq 0$ und $\beta_{sj_{q+1}} = 0$ für jedes $s \geq q+2$, falls ein solches existiert.
Nach endlich vielen Schritten wird eine Matrix der Form B erreicht. $\square$

Anmerkung. Das Element $\beta_{q+1\,j_{q+1}}$ im Beweis zu 11.10 heißt **Pivot**-Element. Zwar ist theoretisch unerheblich, welches der dafür in Frage kommenden Elemente gewählt wird; für praktische Rechnungen spielt die Auswahl jedoch eine Rolle, da Rundungsfehler etc. je nach Wahl des Pivot-Elements verschieden ausfallen können. In folgendem Beispiel ist das Pivotelement jeweils eingekästelt:

Beispiel.

(i) $A_{\mathrm{erw}} = \left(\begin{array}{cc|c} \boxed{10^{-4}} & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 10^{-4} & 1 & 1 \\ 0 & -9999 & -9998 \end{array}\right)$

(ii) $A_{\mathrm{erw}} = \left(\begin{array}{cc|c} 10^{-4} & 1 & 1 \\ \boxed{1} & 1 & 2 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0{,}9999 & 0{,}9998 \end{array}\right)$
(Vertauschung von z_1 und z_2 und Addition von $-10^{-4}\bar{z}_1$ zu $\bar{z}_2$.)

Als „Lösung“ des LGS’s mit erweiterter Koeffizientenmatrix A_{erw} erhält man bei Rechnung mit 3-stelliger Mantisse im Falle (i) aus $10^{-4}\xi_1 + \xi_2 = 1$ und $-10^4\xi_2 = -10^4$ das Ergebnis $\xi_1 = 0$, $\xi_2 = 1$, im Falle (ii) aus $\xi_1 + \xi_2 = 2$ und $1 \cdot \xi_2 = 1$ die Werte $\xi_1 = \xi_2 = 1$.