## § 15 Determinanten

M
↓

### Motivation

Die Definition der „Determinante“ einer Matrix bzw. einer linearen Abbildung wird motiviert durch folgende Ziele:

1. **Bestimmung des Volumens** des durch die Vektoren $v_1, v_2, v_3 \in \mathbb{R}^3$ aufgespannten „Parallelflachs“ $\{\sum \alpha_i v_i \mid \alpha_i \in [0,1]\} \subseteq \mathbb{R}^3$ bzw. *Bestimmung der Fläche* des durch Vektoren $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^2$ aufgespannten Parallelogramms und damit verbunden:
2. **Test der linearen Unabhängigkeit** von $n$ Vektoren eines $n$-dimensionalen $K-$Vektorraums: bei linearer Abhängigkeit ist das Volumen bzw. das Flächenmaß gleich 0.
3. Test der **Regularität** einer quadratischen Matrix $A \in K^{(n,n)}$, d.h. eine Möglichkeit zum Feststellen, ob Rang$A = n$ gilt und damit $A$ eine multiplikative Inverse besitzt.
4. Maß für die **Änderung des Volumens** von Körpern bei linearen Abbildungen.

↑
M

### (A) Steilkurs

### 15.1 Definition: Volumen (Determinantenform)

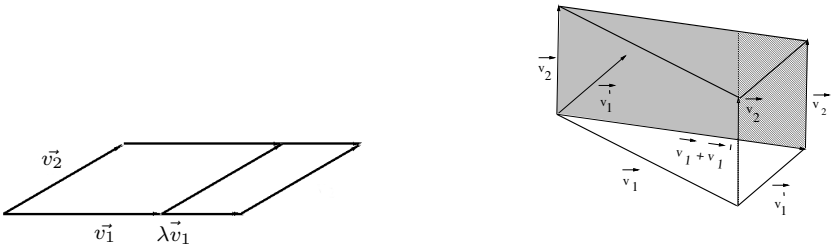
Sei $V$ ein $n-$dimensionaler $K$-Vektorraum. Eine Abbildung $\Delta : V^n \to K$ heißt *Volumen (Determinantenform)*, falls gilt:

(i) $\Delta$ ist $n$-fache Linearform, d.h. $\Delta : V^n \to K$ ist linear in jeder Komponente.

(ii) $\Delta(v_1, \ldots, v_n) = 0$ für beliebige linear abhängige Vektoren $v_1, \ldots, v_n$ aus $V$.

(iii) $\Delta(b_1, \ldots, b_n) \neq 0$ für mindestens eine Basis $B_1 = (b_1, \ldots, b_n)$ von $V$.

*Anmerkung:*
Die Forderung (i) ergibt sich ebenso wie (ii) und (iii) u. a. aus dem Ziel der Bestimmung eines (gerichteten) Volumens, (s. Figur 15.1 für $n = 2$).




a) b)

Figur 15.1 Eigenschaften eines Volumens im Fall $n = 2$
a) $\Delta(\lambda v_1, v_2) = \lambda\Delta(v_1, v_2)$
b) Additivität (Flächenumwandlungen durch 2 Scherungen !)

### 15.2 Spezialfall (n=2):

Seien $n = 2$ und $\Delta : V \times V \to K$ Volumen sowie $C = (c_1, c_2)$ Basis von $V$ ! Für $v_i = c_1\xi_{i1} + c_2\xi_{i2} \quad (i = 1, 2)$ folgt aus der Multilinearität von $\Delta$ wegen $\Delta(c_i, c_i) = 0$ und wegen $\Delta(c_2, c_1) = -\Delta(c_1, c_2)$ (s.u., 15.3) die Darstellung:

$$\begin{aligned}\Delta(c_1\xi_{11} + c_2\xi_{12},\, c_1\xi_{21} + c_2\xi_{22}) \\ &= \xi_{11}\xi_{21}\Delta(c_1, c_1) + \xi_{11}\xi_{22}\Delta(c_1, c_2) + \xi_{12}\xi_{21}\Delta(c_2, c_1) + \xi_{12}\xi_{22}\Delta(c_2, c_2) \\ &= (\xi_{11}\xi_{22} - \xi_{12}\xi_{21}) \cdot \Delta(c_1, c_2) = \begin{vmatrix} \xi_{11} & \xi_{12} \\ \xi_{21} & \xi_{22} \end{vmatrix} \cdot \Delta(c_1, c_2) \quad \text{mit}\end{aligned}$$

$$\begin{vmatrix} \xi_{11} & \xi_{12} \\ \xi_{21} & \xi_{22} \end{vmatrix} := \xi_{11}\xi_{22} - \xi_{12}\xi_{21} =: \det \begin{pmatrix} \xi_{11} & \xi_{12} \\ \xi_{21} & \xi_{22} \end{pmatrix}.$$

### 15.3 Hilfssatz und Definition (alternierende Multilinearform)

(a) Jedes Volumen $\Delta$ ist eine **alternierende Multilinearform** , d.h. dass die Multilinearform $\Delta$ die folgende Eigenschaft hat:

(ii') $\Delta(v_1, \ldots, v_i, \ldots, v_j, \ldots, v_n) = -\Delta(v_1, \ldots, v_j, \ldots, v_i, \ldots, v_n)$
(für alle $v_1, \ldots, v_n \in V$).

(b) Umgekehrt ist im Falle [49] char $K \neq 2$ eine Abbildung $\Delta$ mit (i), (ii') und (iii) ein Volumen.

*Beweisskizze.*

(a) $\Delta(\ldots, v_i + v_j, \ldots, v_i + v_j, \ldots) = 0 \Longrightarrow$
$$0 + 0 + \Delta(\ldots, v_i, \ldots, v_j, \ldots) + \Delta(\ldots, v_j, \ldots, v_i, \ldots) = 0.$$

(b) $\Delta(x_1, \ldots x_i, \ldots, x_i, \ldots, x_n) = -\Delta(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_i, \ldots, x_n) \Longrightarrow$
$$2\Delta(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_i, \ldots, x_n) = 0 \Longrightarrow \Delta(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_i, \ldots, x_n) = 0.$$
Ist z.B. $x_j$ linear abhängig von den übrigen $x_i$, so folgt:
$$\Delta(x_1, \ldots, \sum_{i \neq j}^{n} x_i\lambda_i, \ldots, \ldots, x_n) = \sum_{i \neq j}^{n} \Delta(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_i, \ldots, x_n)\lambda_i = 0. \qquad \square$$

Angeregt durch den Fall $n = 2$ definieren wir:

### 15.4 Definition: Determinante

(i) Als **Determinante (normiertes Volumen)** bezeichnet man ein Volumen $\Delta_0$ von $K^{(n,1)}$, das für die Basis $B = (e_1, \ldots, e_n)$ (mit den kanonischen Spaltenvektoren $e_i$) den Wert 1 hat, also für das gilt:

$$\Delta_0(e_1, \ldots, e_n) = 1.$$

[49] d.h. im Falle eines Körpers $K$ mit $1 + 1 \neq 0$

*Anmerkung:* (1) Weiter unten werden wir zeigen, dass ein solches normiertes Volumen existiert und eindeutig bestimmt ist.
(2) Durch die Determinante ist aus der Menge aller Determinantenformen gerade die des orientierten Inhalts ausgewählt: $c_1$ und $c_2$ (bzw. $c_1, c_2$ und $c_3$) spannen ja gerade das Einheitsquadrat (den Einheitswürfel) auf; und 15.3 zeigt die Abhängigkeit von der Reihenfolge der Vektoren $c_i$.

(ii) Ist nun $A = (\alpha_{ij})_{i,j=1,\dots,n} \in K^{(n,n)}$ eine quadratische Matrix mit Spalten $a_{\bullet 1} := \begin{pmatrix} \alpha_{11} \\ \vdots \\ \alpha_{n1} \end{pmatrix}, \dots, a_{\bullet n} := \begin{pmatrix} \alpha_{1n} \\ \vdots \\ \alpha_{nn} \end{pmatrix}$, so definiert man $\det A = \Delta_0 (a_{\bullet 1}, \dots, a_{\bullet n})$.

**A 15.1** *Übungsaufgabe:*
Zeigen Sie die Existenz und Eindeutigkeit der Determinante im Fall $n = 2$ !

Unmittelbar aus der Definition des Volumens erhält man eine Richtung von (i), ferner (ii) und (iii) (für die Spalten) des folgenden Satzes; die Aussagen über die Zeilen folgt aus (iv); die restlichen Aussagen werden weiter unten, (v) erst in Teil II der Vorlesung gezeigt.

## 15.5 Eigenschaften von Determinanten

**Eigenschaften von Determinanten**

(i) Sei $A \in K^{(n,n)}$. Es gilt dann $\det A \neq 0$ genau dann, wenn Rang $A = n$ gilt, also $A$ regulär ist.

(ii) $\det : A \mapsto \det A$ ist linear in jeder Spalte von $A$.
(Man kann zeigen, dass $\det A$ auch linear in jeder Zeile von $A$ ist.)

(iii) Verhalten bei elementaren Umformungen:
- Die Determinante bleibt unverändert bei Addition einer Linearkombination von Spalten (Zeilen) zu einer anderen Spalte (bzw. Zeile).
- $\det B = \alpha \cdot \det A$, falls $B$ aus $A$ durch Multiplikation einer Spalte (Zeile) mit $\alpha \in K$ hervorgeht.
- $\det B = -\det A$, falls $B$ aus $A$ durch Vertauschen zweier Spalten (Zeilen) hervorgeht.

(iv) $\det A = \det A^T$ für $(\alpha_{ij})^T_{i,j=1,\dots,n} := (\alpha_{ji})_{i,j=1,\dots,n}$.
(Determinante der „**transponierten**“ Matrix).

(v) $\det(A \cdot B) = \det A \cdot \det B$ für $A, B \in K^{(n,n)}$ **(Multiplikationssatz)**.

## 15.6 Berechnung von $3 \times 3$–Determinanten

(i) Spezialfall: **Dreiecksmatrix**[50]

$$\begin{vmatrix} \alpha_{11} & & \star \\ & \alpha_{22} & \\ \bigcirc & & \alpha_{33} \end{vmatrix} := \det \begin{pmatrix} \alpha_{11} & & \star \\ & \alpha_{22} & \\ \bigcirc & & \alpha_{33} \end{pmatrix} = \prod_{i=1}^{3} \alpha_{ii}.$$

*Beweis (unter Verwendung von 15.1, 15.4 und 15.5 (iii)):*
Ist $\alpha_{11} = 0$. Dann existiert eine 0-Spalte. Laut (15.1 ii) ist die Determinante dann gleich 0 und die Aussage richtig. Ist $\alpha_{11} \neq 0$, so kann das $\alpha_{11}^{-1}\alpha_{12}$-fache der ersten Spalte von der zweiten Spalte abgezogen werden (s.15.5 (iii)); entsprechendes Vorgehen bei der 3.Spalte führt zu $\det \begin{pmatrix} \alpha_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_{22} & \star \\ 0 & 0 & \alpha_{33} \end{pmatrix}$.
Analoge Argumentation für die weitere Zeile führt zu

$$\det \begin{pmatrix} \alpha_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_{33} \end{pmatrix} = \det I_3 \cdot \prod_{i=1}^{3} \alpha_{ii} = \prod_{i=1}^{3} \alpha_{ii}.$$

*Anmerkung:* Eine Verallgemeinerung auf $n \times n$– Dreiecksmatrizen ist möglich.

(ii) *Regel von Sarrus* (gesprochen Sarrü) (nur für $3 \times 3$-Matrizen !) :

$$\begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{vmatrix} \begin{matrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} \end{matrix}$$

$$= \alpha_{11}\alpha_{22}\alpha_{33} + \alpha_{12}\alpha_{23}\alpha_{31} + \alpha_{13}\alpha_{21}\alpha_{32} - \alpha_{31}\alpha_{22}\alpha_{13} - \alpha_{32}\alpha_{23}\alpha_{11} - \alpha_{33}\alpha_{21}\alpha_{12}.$$

*Beweisandeutung:* Spezialisierung von 15.7, s. auch (iv) !
*Beispiel:*

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2^2 \\ 1 & 3 & 3^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2^2 \\ 1 & 3 & 3^2 \end{vmatrix} \begin{matrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{matrix} = 1\cdot 2\cdot 3^2 + 1\cdot 2^2\cdot 1 + 1\cdot 1\cdot 3 - 1\cdot 2\cdot 1 - 3\cdot 2^2\cdot 1 - 3^2\cdot 1\cdot 1 = 2$$

(iii) Durch **elementare Umformungen** und Zurückführung auf $(i)$ :

Beispiel: 1.) Beweis zu (i)

2) $$\begin{vmatrix} \lambda & k & k \\ k & \lambda & k \\ k & k & \lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda - k & 0 & k \\ k - \lambda & \lambda - k & k \\ 0 & k - \lambda & \lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda - k & 0 & k \\ 0 & \lambda - k & 2k \\ 0 & 0 & \lambda + 2k \end{vmatrix} \underset{(i)}{=}$$

| | |
|---|---|
| 1. Spalte minus 2. Spalte | 2. Zeile plus 1. Zeile |
| 2. Spalte minus 3. Spalte | 3. Zeile plus neue 2. Zeile |

[50] Dabei sind die Einträge des oberen Dreiecks beliebige Körperelemente, durch $\star$ angedeutet, die Einträge des unteren Dreiecks sämtlich 0, durch $\bigcirc$ angedeutet.

$$= (\lambda - k)^2(\lambda + 2k).$$

(iv) **Laplace'sche Entwicklung (im Fall n=3)** nach der ersten Zeile (Zurückführung auf $2 \times 2-$Matrizen) :

$$\begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{vmatrix} = \alpha_{11} \begin{vmatrix} \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{vmatrix} - \alpha_{12} \begin{vmatrix} \alpha_{21} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{33} \end{vmatrix} + \alpha_{13} \begin{vmatrix} \alpha_{21} & \alpha_{22} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} \end{vmatrix}$$

*Beispiel*

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2^2 \\ 1 & 3 & 3^2 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 2^2 \\ 3 & 3^2 \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2^2 \\ 1 & 3^2 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = (2 \cdot 3^2 - 2^2 \cdot 3) - (1 \cdot 3^2 - 1 \cdot 2^2) + (1 \cdot 3 - 1 \cdot 2) = 2$$

*Anmerkung:* 15.6 (iv) ist eine Spezialisierung von 15.7, s.u..
Wir erwähnen hier schon die Verallgemeinerung:

### 15.7 Laplace'sche Entwicklung (nach einer Zeile):

Allgemein gilt für $A = (\alpha_{ij})_{i,j=1,\dots,n}$ mit $A_{kj} := (-1)^{k+j} \begin{vmatrix} \alpha_{11} \cdots & \alpha_{1j} \cdots & \alpha_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ \alpha_{k1} & \alpha_{kj} & \alpha_{kn} \\ \vdots & & \vdots \\ \alpha_{n1} \cdots & \alpha_{nj} \cdots & \alpha_{nn} \end{vmatrix}$

die Formel

$$\boxed{\det A = \sum_{j=1}^{n} \alpha_{kj} A_{kj}} \qquad (\text{für } k \in \{1, \dots, n\} \text{ fest}).$$

*Beispiel:* siehe 15.6 (iv) !
Diese Formel werden wir in Teil II der Vorlesung beweisen. Wegen 15.5 (iv) ist auch die Entwicklung nach einer Spalte möglich:

$$\det A = \sum_{i=1}^{n} \alpha_{ik} A_{ik} \quad (\text{für } \ k \in \{1, \dots, n\} \ \text{ fest}).$$

Im Folgenden gehen wir fast zurück zum Anfang und diskutieren das Thema:

## (B) Zur Existenz und Eindeutigkeit des Volumens

*Analyse:* Sei eine Determinantenform $\Delta$ gegeben. Aus den definierenden Eigenschaften folgt mit $x_j = \sum\limits_{i_j=1}^{n} b_{i_j}\xi_{i_j j}$ für $j = 1, \ldots, n$ und Basis $B = (b_1, \ldots, b_n)$ :

$$\begin{aligned}
\Delta(x_1, x_2, \ldots, x_n) &= \Delta(\sum_{i_1=1}^{n} b_{i_1}\xi_{i_1 1}, \ldots, \sum_{i_n=1}^{n} b_{i_n}\xi_{i_n n}) \\
&= \sum_{i_1=1}^{n} \xi_{i_1 1}\, \Delta(b_{i_1}, \sum_{i_2=1}^{n} b_{i_2}\xi_{i_2 2}, \ldots, \sum_{i_n=1}^{n} b_{i_n}\xi_{i_n n}) \\
&= \sum_{i_1=1}^{n}\sum_{i_2=1}^{n} \xi_{i_1 1}\xi_{i_2 2}\, \Delta(b_{i_1}, b_{i_2}, \sum_{i_3=1}^{n} b_{i_3}\xi_{i_3 3}, \ldots, \sum_{i_n=1}^{n} b_{i_n}\xi_{i_n n}) \\
&= \sum_{i_1}^{n}\sum_{i_2}^{n}\cdots\sum_{i_n}^{n} \xi_{i_1 1}\xi_{i_2 2}\cdots\xi_{i_n n}\, \Delta(b_{i_1}, b_{i_2}, \ldots, b_{i_n}).
\end{aligned}$$

Zu summieren ist zunächst über alle Kombinationen $(i_1, i_2, \ldots, i_n) \in \{1, 2, \ldots, n\}^n$, also über die Bilder aller Abbildungen $f : \{1, \ldots, n\} \to \{1, \ldots, n\}$ mit $k \mapsto i_k$. Kommt jedoch ein $b_j$ an mehreren Positionen vor, so ist der Summand definitionsgemäß gleich Null. Damit kann man sich auf diejenigen $n-$Tupel $(i_1, i_2, \ldots, i_n)$ beschränken, die eine Permutation $k \mapsto i_k$ von $\{1, 2, \ldots, n\}$ darstellen, also Elemente der symmetrischen Gruppe $S_n$ sind. Es folgt daher

$$(*) \qquad \Delta(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{\pi \in S_n} \xi_{\pi(1)1}\xi_{\pi(2)2}\cdots\xi_{\pi(n)n}\, \Delta(b_{\pi(1)}, b_{\pi(2)}, \ldots, b_{\pi(n)}).$$

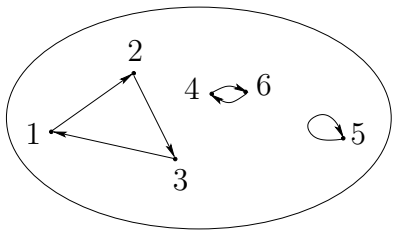
Wir wissen nach Satz 15.3 (a), dass die Vertauschung zweier Vektoren das Vorzeichen der Determinante ändert. Die Frage ist nun, als Produkt von wievielen solcher Vertauschungen eine Permutation $\pi \in S_n$ geschrieben werden kann.

### Exkurs: Gerade und ungerade Permutationen

Sei $\pi \in S_n$, also $\pi$ Permutation von $\{1, \ldots, n\}$. Wir wollen wiederholte Anwendungen von $\pi$ betrachten; im Folgenden bezeichne wieder $\pi^i$ die $i-$fache Hintereinanderausführung von $\pi$, also $\underbrace{\pi \circ \pi \circ \pi \ldots \circ \pi}_{i \text{ mal}}$.

*Beispiel:* $n = 6$; $\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 3 & 1 & 6 & 5 & 4 \end{pmatrix}$ (Vgl. Figur 5.1 !)

$$\begin{aligned}
\pi^0 &= \mathrm{id}_{\{1,\ldots,6\}} \\
\pi^1(1) &= \pi(1) = 2 \\
\pi^2(1) &= \pi(\pi((1)) = \pi(2) = 3 \\
\pi^3(1) &= \pi(\pi^2(1)) = \pi(3) = 1 \\
\pi^4(1) &= \pi(1) \ldots \\
\pi(4) &= 6 \\
\pi^2(4) &= \pi(6) = 4 \\
\pi(5) &= 5 \quad \text{(Fixpunkt)}
\end{aligned}$$




Figur 15.1 Bahnen einer Permutation

### 15.8 Bahnen einer Permutation

(a) *Definition:* Sei $\pi \in S_n$; für $a, b \in \{1, \ldots, n\}$ definieren wir eine Relation

$$a \underset{\pi}{\sim} b :\Leftrightarrow \exists\, k \in \mathbb{Z} : b = \pi^k(a).$$

(b) *Hifssatz:* Für $\pi \in S_n$ ist $\underset{\pi}{\sim}$ eine Äquivalenzrelation auf $\{1, \ldots, n\}$. (Beweis $\cdots$).

(c) *Definition:* Die Äquivalenzklasse von $a \in \{1, \ldots, n\}$ bzgl. $\underset{\pi}{\sim}$, also

$$\{a, \pi(a), \pi^2(a), \ldots\},$$

heißt **Bahn** oder auch **Transitivitätsgebiet** von $a$ unter $\pi$.

*Fortsetzung des letzten Beispiels ( siehe wieder Figur 15.1):*
Bahnen von $\pi$ sind in diesem Fall $\{1, 2, 3\}, \{4, 6\}$ und $\{5\}$.

### 15.9 Definition: Zyklus

(a) Eine Permutation, deren Bahnen bis auf höchstens eine einelementig sind, (also außerhalb einer Bahn die Punkte fest läßt,) heißt *Zyklus*. Ein Zyklus ist also von der Form

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \ldots & a_m & a_{m+1} & \ldots & a_n \\ a_2 & a_3 & a_4 & \ldots & a_1 & a_{m+1} & \ldots & a_n \end{pmatrix}.$$

Wir schreiben den Zyklus auch in der Form $(a_1\ a_2\ a_3 \ldots a_m)(a_{m+1}) \ldots (a_n)$ oder noch kürzer

$$(a_1\ a_2\ a_3 \ldots a_m) \in S_n.$$

(b) **Beispiel:**

(i) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 3 & 1 & 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} = (1\ 2\ 3)(4)(5)(6) = (1\ 2\ 3) \in S_6.$

(ii) $(2\ 5\ 1\ 3) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 5 & 2 & 4 & 1 & 6 \end{pmatrix}$, falls $(2\ 5\ 1\ 3) \in S_6$ gilt.

(c) *Definition:* Zwei Zyklen $(a_1 \ldots a_s)$ und $(b_1 \ldots b_t)$ aus $S_n$ heißen **disjunkt**, falls

$$\{a_1, \ldots, a_s\} \cap \{b_1, \ldots, b_t\} = \emptyset.$$

### 15.10 Hilfssatz (Disjunkte Zyklen)

| Disjunkte Zyklen aus $S_n$ kommutieren. |
|---|

*Beweisskizze.* $\begin{pmatrix} b_1 & \ldots & b_t \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} a_1 & \ldots & a_s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & \ldots & a_s & b_1 & \ldots & b_t & \ldots & \ldots \\ a_2 & \ldots & a_1 & b_2 & \ldots & b_1 & \ldots & \ldots \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} a_1 & \ldots & a_s \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} b_1 & \ldots & b_t \end{pmatrix}.$$

□

### 15.11 Hilfssatz (Zerlegung in Zyklen)

Seien $n \geq 2$ und $\pi \in S_n \setminus \{\mathrm{id}\}$; dann lässt sich $\pi$ (bis auf die Reihenfolge der Faktoren) eindeutig als Produkt paarweise disjunkter Zyklen schreiben.

*Beweisandeutung:* Die Zyklenzerlegung entspricht der Partition in Bahnen. □

*Beispiel (Fortsetzung):* $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 3 & 1 & 6 & 5 & 4 \end{pmatrix} = (123) \circ (46) =: (123)(46).$

### 15.12 Definition: Transposition

Ein Zyklus der Länge 2, d.h. ein solcher von der Form $(a_1 a_2)$, heißt *Transposition.* (Eine Transposition vertauscht also genau 2 Elemente aus $\{1, \ldots, n\}$ und lässt die übrigen fest.)

### 15.13 Satz ( Darstellung als Produkt von Transpositionen)

Jede Permutation aus $S_n$ (mit $n \geq 2$) lässt sich als Produkt von (nicht notwendig disjunkten) Transpositionen schreiben.

*Beweis-Andeutung.* Nach 15.11 existiert eine Zerlegung in disjunkte Zyklen; jeder Zyklus $(a_1\ a_2\ \ldots\ a_t)$ lässt sich schreiben als[51] $(a_1\ a_t) \circ (a_1\ a_{t-1}) \circ \ldots \circ (a_1\ a_3) \circ (a_1\ a_2)$. □

**Beispiel:** $\pi_1 := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 5 & 1 & 6 & 4 & 2 \end{pmatrix} = (1\ 3) \circ (2\ 5\ 4\ 6) = (1\ 3) \circ (2\ 6) \circ (2\ 4) \circ (2\ 5).$
Andereseits gilt auch $\pi_1 = (1\ 2) \circ (1\ 6) \circ (1\ 4) \circ (1\ 5) \circ (2\ 3) \circ (1\ 2)$. Die Darstellung als Produkt von Transpositionen ist also nicht eindeutig.
Jedoch gilt: ( hier ohne Beweis zitiert):

### 15.14 Satz (Anzahl der Faktoren)

Sei $\pi \in S_n$ mit $n \geq 2$. Dann ist die Anzahl der Faktoren bei Darstellungen von $\pi$ als Produkt von Transpositionen entweder stets gerade oder stets ungerade.

Damit werden folgende Definitionen sinnvoll:

### 15.15 Definition: gerade Permutation; Signum

(a) Ist $\pi$ Produkt einer geraden Anzahl von Transpositionen, so heißt $\pi$ *gerade Permutation*, andernfalls ungerade Permutation.
(b) Wir definieren das *Signum* einer Permutation wie folgt:

$$\operatorname{sgn} \pi := \begin{cases} +1 & \text{falls } \pi \text{ gerade} \\ -1 & \text{falls } \pi \text{ ungerade.} \end{cases}$$

[51] hier von rechts aus zu lesen; d.h. der letzte Faktor wird zuerst angewandt

*Beispiele:* sgn id$= +1$, sgn $\tau = -1$ für jede Transposition $\tau$;

$$\text{sgn } \pi_1 = \text{sgn } \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 5 & 1 & 6 & 4 & 2 \end{pmatrix} = +1 \quad \text{(vgl. voriges Beispiel; 4 bzw. 6 Faktoren!).}$$

*Anmerkungen:* Die Komposition

- einer geraden und einer ungeraden Permutation ist eine ungerade Permutation
- zweier geraden Permutationen ist eine gerade Permutation
- zweier ungeraden Permutationen ist eine gerade Permutation.

Die Definition von 'sgn' ermöglicht daher folgende Aussage:

### 15.16 Hilfssatz (Eigenschaften des Signums)

Für $\pi, \rho \in S_n$ gilt $\boxed{\text{sgn } (\pi \circ \rho) = \text{sgn } \pi \cdot \text{sgn } \rho.}$

Tabellarische Darstellung:

| $\pi \circ \rho$ | $\pi$ gerade | $\pi$ ungerade |
|---|---|---|
| $\rho$ gerade | gerade | ungerade |
| $\rho$ ungerade | ungerade | gerade |

entsprechend für das Signum

| $\text{sgn}(\pi \circ \rho)$ | $\text{sgn}(\pi) = +1$ | $\text{sgn}(\pi) = -1$ |
|---|---|---|
| $\text{sgn}(\rho) = +1$ | $+1$ | $-1$ |
| $\text{sgn}(\rho) = -1$ | $-1$ | $+1$ |

Für $n > 1$ ist 'sgn' daher ein Gruppenhomomorhismus von $(S_n, \circ)$ auf die Untergruppe $(\{+1, -1\}, \cdot)$ von $(\mathbb{R}^*, \cdot)$.
Der Kern dieses Homomorphismus, also die Menge aller geraden Permutationen von $S_n$, bildet einen Normalteiler von $S_n$. Da die Multiplikation mit einer Transposition $\tau$ die Menge der geraden Permutationen bijektiv auf die der ungeraden Permutationen abbildet, folgt insgesamt:

### 15.17 Satz und Definition: alternierende Gruppe

(i) Die Menge der geraden Permutationen von $S_n$ bilden eine Untergruppe $A_n$ von $S_n$.
$A_n$ ist Normalteiler von $S_n$, und es gilt $S_n = A_n \cup A_n \circ \tau$ für jede Transposition $\tau$ sowie $|A_n| = \frac{1}{2}|S_n| = \frac{n!}{2}$.

(ii) $A_n$ heißt **alternierende Gruppe** vom Grad $n$.

**Beispiel:**
$A_3$ besteht aus folgenden $\frac{3!}{2} = 3$ Elementen (– den geraden Permutationen von $S_3$ ):
id$= (1)$, $(1\ 2\ 3) = (1\ 3) \circ (1\ 2)$, $(1\ 3\ 2) = (1\ 2) \circ (1\ 3) = (1\ 2\ 3)^{-1}$.
Ungerade Permutationen von $S_3$ sind die Transpositionen: $(1\ 2), (1\ 3), (2\ 3)$.

*Ende des Exkurses*

Zurück zur Determinante: Kann man eine Permutation $\pi$ in ein Produkt von $t$ Transpositionen zerlegen, so gilt nach Definition sgn $\pi = (-1)^t$. Daraus folgt mit 15.3 (ii'):

### 15.18 Hilfssatz

Seien $\Delta$ Determinantenform auf $V$, $\dim_K V = n$ und $\pi \in S_n$; dann gilt

$$\Delta(x_{\pi(1)}, \ldots, x_{\pi(n)}) = \operatorname{sgn} \pi \cdot \Delta(x_1, \ldots, x_n).$$

Wir können damit die oben erhaltene Beziehung $(*)$ weiter umformen und erhalten:

### 15.19 Eindeutigkeitssatz

Ist $\Delta$ eine Determinantenform auf dem $K-$ Vektorraum $V$ mit Basis $C = (c_1, \ldots, c_n)$, und sind $x_j = \sum_{i=1}^{n} c_i \xi_{ij}$ für $(j = 1, \ldots n)$ $n$ beliebige Vektoren aus $V$ (mit $\xi_{ij} \in K$ für $i, j = 1, \ldots, n$), so gilt:

$$(**) \qquad \boxed{\Delta(x_1, \ldots, x_n) = \gamma \cdot \Big[ \sum_{\pi \in S_n} (\operatorname{sgn} \pi) \xi_{\pi(1)1} \cdots \xi_{\pi(n)n} \Big] \quad \text{mit} \quad \gamma = \Delta(c_1, \ldots, c_n).}$$

**Beispiel:** Seien $\dim_K V = 2$ und $C = (c_1, c_2)$ Basis von $V$. Wegen $S_2 = \{\mathrm{id}, (1\ 2)\}$ ist jede Determinantenform von $V$ von folgender Art:

$$\Delta\Big( \begin{pmatrix} \xi_{11} \\ \xi_{21} \end{pmatrix}_C, \begin{pmatrix} \xi_{12} \\ \xi_{22} \end{pmatrix}_C \Big) = \Big[ \underbrace{1 \cdot \xi_{11}\xi_{22}}_{\text{von } \mathrm{id}_{\{1,2\}}} + \underbrace{(-1)\xi_{21}\xi_{12}}_{\text{von } (1\ 2) \in S_2} \Big] \cdot \Delta(c_1, c_2)$$

$$= (\xi_{11}\xi_{22} - \xi_{21}, \xi_{12}) \cdot \gamma \quad \text{mit } \gamma := \Delta(c_1, c_2) \text{ konstant.}$$

### 15.20 Korollar (Determinantenform und lineare Unabhängigkeit)

Sind $\Delta$ Determinantenform auf dem $n-$dim Vektorraum $V$ und $c_1, \ldots, c_n \in V$, so gilt:

$$\Delta(c_1, \ldots, c_n) \neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \{c_1, \ldots, c_n\} \text{ ist Basis von } V\ .$$

*Anmerkung:* Dies zeigt, dass 15.1 (ii) nicht nur für eine, sondern für jede Basis von $V$ gilt. Außerdem beweist dieses Korollar die Eigenschaft aus 15.5 (i).

*Beweis von 15.20.*

„$\Rightarrow$ “ Wäre $\{c_1, \ldots, c_n\}$ linear abhängig, so definitionsgemäß $\Delta(c_1, \ldots, c_n) = 0$.
„$\Leftarrow$ “ Seien $\{c_1, \ldots, c_n\}$ Basis von $V$ und $B_1 = \{b_1, \ldots, b_n\}$ die Basis von $V$, für die $\Delta(b_1, \ldots, b_n) \neq 0$ gemäß 15.1 (iii) gilt. Nach 15.19 existiert ein $\mu \in K$ mit $0 \neq \Delta(b_1, \ldots, b_n) = \mu\Delta(c_1, \ldots, c_n)$, woraus die Behauptung $\Delta(c_1, \ldots, c_n) \neq 0$ folgt. $\square$

### 15.21 Korollar (Zur Frage der Eindeutigkeit)

Sind $\Delta_1$ und $\Delta_2$ Determinantenformen auf $V$, so existiert ein $\lambda \in K \setminus \{0\}$ mit

$$\Delta_1 = \lambda \cdot \Delta_2.$$

<u>Bei festem Vektorraum $V$ sind also Determinantenformen bis auf skalare Vielfache bestimmt.</u>

*Anmerkung:* Wir werden sehen, dass umgekehrt eine Determinantenform $\Delta$ existiert und mit $\Delta$ auch $\lambda \cdot \Delta$ Determinantenform ist. Dies zeigt:

*Die Determinantenformen von $V$ bilden einen $1-$dimensionalen Unterraum des Vektorraums aller $n-$fachen Linearformen von $V$.*

*Beweis von 15.21.*
Ist $C = (c_1, \ldots, c_n)$ eine geordnete Basis $V$, so existieren nach 15.19 und 15.20 Elemente $\gamma_i \in K \setminus \{0\}$ mit $\Delta_i(x_1, \ldots, x_n) = \gamma_i \cdot \big[ \sum_{\pi \in S_n} \operatorname{sgn} \xi_{\pi(1)1} \cdots \xi_{\pi(n)n} \big]$ für $(i = 1, 2)$. Die Behauptung folgt mit $\lambda := \gamma_1 \cdot \gamma_2^{-1}$; denn damit ergibt sich

$$\Delta_1(x_1, \ldots, x_n) = \lambda\gamma_2 \cdot \big[ \sum_{\pi \in S_n} \operatorname{sgn} \pi \; \xi_{\pi(1)1} \cdots \xi_{\pi(n)n} \big] = \lambda \cdot \Delta_2(x_1, \ldots, x_n). \qquad \square$$

Jetzt können wir auch 15.5 (iv))zeigen:

### 15.22 Korollar (Determinante der transponierten Matrix)

Für $A \in K^{(n,n)}$ gilt $\quad \det A = \det A^T$.

*Beweis.* Mit $\pi \in S_n$ durchläuft auch $\rho$ für $\rho := \pi^{-1}$ alle Elemente aus $S_n$. Zu jedem $j$ gibt es außerdem genau ein $i$ mit $j = \pi(i)$, also $i = \rho(j)$. Damit gilt $\prod_{i=1}^{n} \alpha_{\pi(i)i} = \prod_{j=1}^{n} \alpha_{j\rho(j)}$. Wegen $\operatorname{sgn} \rho = \operatorname{sgn} \pi^{-1} = \operatorname{sgn} \pi$ erhält man:

$$\det A = \Delta_0(a_{\bullet 1}, \ldots, a_{\bullet n}) = \sum_{\pi \in S_n} \operatorname{sgn} \pi \prod_{i=1}^{n} \alpha_{\pi(i)i} = \sum_{\rho = \pi^{-1} \in S_n} \operatorname{sgn} \rho \prod_{j=1}^{n} \alpha_{j\rho(j)} = \det A^T. \qquad \square$$

Nachzuholen ist nun noch der Nachweis der Existenz von Determinantenformen für endlich-dimensionale Vektorräume.

### 15.23 Existenzsatz

Sei $V$ ein $n-$dimensionaler $K-$ Vektorraum; seien ferner $C = (c_1, \ldots, c_n)$ eine fest gewählte Basis von $V$ und $\gamma \in K \setminus \{0\}$ sowie $x_j = \sum\limits_{i=1}^{n} c_i \xi_{ij} \in V$ für $j = 1, \ldots, n$. Dann wird durch

$$\Delta(x_1, \ldots, x_n) := \gamma \cdot \Big[ \sum_{\pi \in S_n} (\operatorname{sgn} \pi) \xi_{\pi(1)1} \cdots \xi_{\pi(n)n} \Big]$$

(vgl. 15.19 (∗∗) !) eine Determinantenform auf $V$ mit $\Delta(c_1, \ldots, c_n) = \gamma$ definiert.

*Beweisskizze.* Sei $\Delta(x_1, \ldots, x_n) := \gamma \cdot \Big[ \sum\limits_{\pi \in S_n} (\operatorname{sgn} \pi) \xi_{\pi(1)1} \cdots \xi_{\pi(n)n} \Big]$ für $x_j = \begin{pmatrix} \xi_{1,j} \\ \vdots \\ \xi_{nj} \end{pmatrix}_C$.
Man prüft leicht nach, dass $\Delta$ in jedem seiner Argumente linear ist. Weiter gilt

$$\Delta(c_1, \ldots, c_n) := \gamma \cdot \Big[ \sum_{\pi \in S_n} (\operatorname{sgn} \pi) \underbrace{\prod_{j=1}^{n} \delta_{\pi(j)j}}_{\neq 0 \text{ nur für } \pi = \mathrm{id}} \Big] = \gamma \cdot 1 = \gamma \neq 0 \ .$$

Zu zeigen bleibt noch, dass aus der linearen Abhängigkeit von $x_1, \ldots, x_n$ die Aussage $\Delta(x_1, \ldots, x_n) = 0$ folgt. Seien also $x_1, \ldots, x_n$ linear abhängig; dann existieren ein $i \in \{1, \ldots, n\}$ und Elemente $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in K$ mit $x_i = \sum\limits_{j=1, j \neq i}^{n} x_j \lambda_j$ , und es gilt (wegen der Linearität in der $i-$ten Komponente):

$$\Delta(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{j=1, j \neq i}^{n} \lambda_j \cdot \Delta(x_1, \ldots, \underbrace{x_j}_{i-\text{te Stelle}}, \ldots, \underbrace{x_j}_{j-\text{te Stelle}}, \ldots, x_n).$$

Es reicht also, $\Delta(x_1, \ldots, x_n) = 0$ für $x_i = x_j$ für ein Indexpaar $i \neq j$ zu zeigen. Mit der Transposition $\tau := (i\ j) \in S_n$ folgt dann nach 15.17, dass $S_n = A_n \cup A_n \circ \tau$ und daher

$$\Delta(x_1, \ldots, x_n) = \gamma \sum_{\sigma \in A_n} \Big( \underbrace{1}_{\operatorname{sgn} \sigma} \cdot \prod_k \xi_{\sigma(k)k} + \underbrace{(-1)}_{\operatorname{sgn}(\sigma \circ \tau)} \cdot \prod_k \xi_{\sigma \circ \tau(k)k} \Big)$$

gilt. Für $k \notin \{i, j\}$ ist $(\sigma \circ \tau)(k) = \sigma(k)$ und somit $\xi_{\sigma \circ \tau(k)k} = \xi_{\sigma(k)k}$. Wegen $x_i = x_j$ gilt $\xi_{ei} = \xi_{ej}$ für alle $e = 1, \ldots, n$; somit ist

$$\xi_{(\sigma \circ \tau)(i)i} = \xi_{\sigma(j)i} = \xi_{\sigma(j)j} \quad \text{und} \quad \xi_{(\sigma \circ \tau)(j)j} = \xi_{\sigma(i)j} = \xi_{\sigma(i)i}.$$

Insgesamt folgt daher die Gleichheit der Faktoren von $\prod\limits_k \xi_{\sigma(k)k}$ und $\prod\limits_k \xi_{\sigma \circ \tau(k)k}$ für alle $\sigma \in A_n$, woraus sich die Behauptung ergibt. □

### 15.24 Anmerkung: Existenz und Eindeutigkeit der Determinante

Aufgrund des Existenz- und des Eindeutigkeits-Satzes gibt es zu gewählter Basis $C = (c_1, \ldots, c_n)$ genau eine Determinantenform $\Delta_0$ mit $\Delta_0(c_1, \ldots, c_n) = 1$; insbesondere gilt dies für $V = K^n$ und Wahl der kanonischen Basis von $K^n$ als $C$. Damit ist die **Determinante** einer Matrix $A = (a_{\bullet 1}, \ldots a_{\bullet n}) \in K^{(n,n)}$ durch $\det A := \Delta_0(a_{\bullet 1}, \ldots, a_{\bullet n})$ eindeutig definiert (vgl. 15.4).