

§ 15 Determinanten

Motivation

M
↓

Die Definition der „Determinante“ einer Matrix bzw. einer linearen Abbildung wird motiviert durch folgende Ziele:

1. **Bestimmung des Volumens** des durch die Vektoren $v_1, v_2, v_3 \in \mathbb{R}^3$ aufgespannten „Parallelflachs“ $\{\sum \alpha_i v_i \mid \alpha_i \in [0, 1]\} \subseteq \mathbb{R}^3$ bzw. *Bestimmung der Fläche* des durch Vektoren $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^2$ aufgespannten Parallelogramms und damit verbunden:
2. **Test der linearen Unabhängigkeit** von n Vektoren eines n -dimensionalen K -Vektorraums: bei linearer Abhängigkeit ist das Volumen bzw. das Flächenmaß gleich 0.
3. Test der **Regularität** einer quadratischen Matrix $A \in K^{(n,n)}$, d.h. eine Möglichkeit zum Feststellen, ob $\text{Rang} A = n$ gilt und damit A eine multiplikative Inverse besitzt.
4. Maß für die **Änderung des Volumens** von Körpern bei linearen Abbildungen.

↑
M

(A) Steilkurs

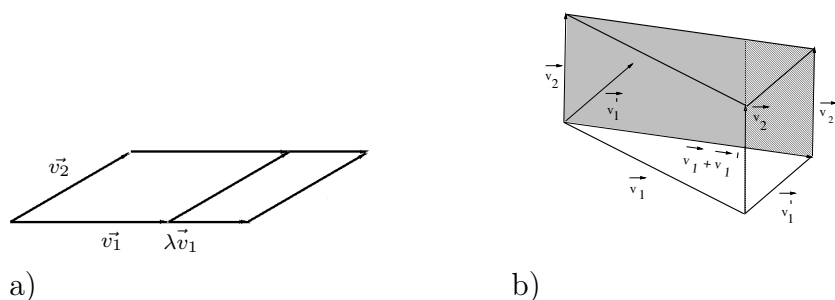
15.1 Definition: Volumen (Determinantenform)

Sei V ein n -dimensionaler K -Vektorraum. Eine Abbildung $\Delta : V^n \rightarrow K$ heißt *Volumen (Determinantenform)*, falls gilt:

- (i) Δ ist n -fache Linearform, d.h. $\Delta : V^n \rightarrow K$ ist linear in jeder Komponente.
- (ii) $\Delta(v_1, \dots, v_n) = 0$ für beliebige linear abhängige Vektoren v_1, \dots, v_n aus V .
- (iii) $\Delta(b_1, \dots, b_n) \neq 0$ für mindestens eine Basis $B_1 = (b_1, \dots, b_n)$ von V .

Anmerkung:

Die Forderung (i) ergibt sich ebenso wie (ii) und (iii) u. a. aus dem Ziel der Bestimmung eines (gerichteten) Volumens, (s. Figur 15.1 für $n = 2$).



Figur 15.1 Eigenschaften eines Volumens im Fall $n = 2$

a) $\Delta(\lambda v_1, v_2) = \lambda \Delta(v_1, v_2)$

b) Additivität (Flächenumwandlungen durch 2 Scherungen !)

15.2 Spezialfall (n=2):

Seien $n = 2$ und $\Delta : V \times V \rightarrow K$ Volumen sowie $C = (c_1, c_2)$ Basis von V ! Für $v_i = c_1\xi_{i1} + c_2\xi_{i2}$ ($i = 1, 2$) folgt aus der Multilinearität von Δ wegen $\Delta(c_i, c_i) = 0$ und wegen $\Delta(c_2, c_1) = -\Delta(c_1, c_2)$ (s.u., 15.3) die Darstellung:

$$\begin{aligned} \Delta(c_1\xi_{11} + c_2\xi_{12}, c_1\xi_{21} + c_2\xi_{22}) &= \xi_{11}\xi_{21}\Delta(c_1, c_1) + \xi_{11}\xi_{22}\Delta(c_1, c_2) + \xi_{12}\xi_{21}\Delta(c_2, c_1) + \xi_{12}\xi_{22}\Delta(c_2, c_2) \\ &= (\xi_{11}\xi_{22} - \xi_{12}\xi_{21}) \cdot \Delta(c_1, c_2) = \begin{vmatrix} \xi_{11} & \xi_{12} \\ \xi_{21} & \xi_{22} \end{vmatrix} \cdot \Delta(c_1, c_2) \quad \text{mit} \\ &\quad \left| \begin{vmatrix} \xi_{11} & \xi_{12} \\ \xi_{21} & \xi_{22} \end{vmatrix} \right| := \xi_{11}\xi_{22} - \xi_{12}\xi_{21} =: \det \begin{pmatrix} \xi_{11} & \xi_{12} \\ \xi_{21} & \xi_{22} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

15.3 Hilfssatz und Definition (alternierende Multilinearform)

- (a) Jedes Volumen Δ ist eine **alternierende Multilinearform**, d.h. dass die Multilinearform Δ die folgende Eigenschaft hat:
- (ii') $\Delta(v_1, \dots, v_i, \dots, v_j, \dots, v_n) = -\Delta(v_1, \dots, v_j, \dots, v_i, \dots, v_n)$
(für alle $v_1, \dots, v_n \in V$).
- (b) Umgekehrt ist im Falle ⁴⁹ $\text{char } K \neq 2$ eine Abbildung Δ mit (i), (ii') und (iii) ein Volumen.

Beweisskizze.

$$(a) \Delta(\dots, v_i + v_j, \dots, v_i + v_j, \dots) = 0 \implies 0 + 0 + \Delta(\dots, v_i, \dots, v_j, \dots) + \Delta(\dots, v_j, \dots, v_i, \dots) = 0.$$

$$(b) \Delta(x_1, \dots, x_i, \dots, x_i, \dots, x_n) = -\Delta(x_1, \dots, x_i, \dots, x_i, \dots, x_n) \implies 2\Delta(x_1, \dots, x_i, \dots, x_i, \dots, x_n) = 0 \implies \Delta(x_1, \dots, x_i, \dots, x_i, \dots, x_n) = 0.$$

Ist z.B. x_j linear abhängig von den übrigen x_i , so folgt:

$$\Delta(x_1, \dots, \sum_{i \neq j}^n x_i \lambda_i, \dots, x_n) = \sum_{i \neq j}^n \Delta(x_1, \dots, x_i, \dots, x_i, \dots, x_n) \lambda_i = 0. \quad \square$$

Angeregt durch den Fall $n = 2$ definieren wir:

15.4 Definition: Determinante

- (i) Als **Determinante (normiertes Volumen)** bezeichnet man ein Volumen Δ_0 von $K^{(n,1)}$, das für die Basis $B = (e_1, \dots, e_n)$ (mit den kanonischen Spaltenvektoren e_i) den Wert 1 hat, also für das gilt:

$$\Delta_0(e_1, \dots, e_n) = 1.$$

⁴⁹d.h. im Falle eines Körpers K mit $1 + 1 \neq 0$

Anmerkung: (1) Weiter unten werden wir zeigen, dass ein solches normiertes Volumen existiert und eindeutig bestimmt ist.

(2) Durch die Determinante ist aus der Menge aller Determinantenformen gerade die des orientierten Inhalts ausgewählt: c_1 und c_2 (bzw. c_1, c_2 und c_3) spannen ja gerade das Einheitsquadrat (den Einheitswürfel) auf; und 15.3 zeigt die Abhängigkeit von der Reihenfolge der Vektoren c_i .

(ii) Ist nun $A = (\alpha_{ij})_{i,j=1,\dots,n} \in K^{(n,n)}$ eine quadratische Matrix mit Spalten $a_{\bullet 1} := \begin{pmatrix} \alpha_{11} \\ \vdots \\ \alpha_{n1} \end{pmatrix}, \dots, a_{\bullet n} := \begin{pmatrix} \alpha_{1n} \\ \vdots \\ \alpha_{nn} \end{pmatrix}$, so definiert man $\det A = \Delta_0(a_{\bullet 1}, \dots, a_{\bullet n})$.

A 15.1 Übungsaufgabe:

Zeigen Sie die Existenz und Eindeutigkeit der Determinante im Fall $n = 2$!

Unmittelbar aus der Definition des Volumens erhält man eine Richtung von (i), ferner (ii) und (iii) (für die Spalten) des folgenden Satzes; die Aussagen über die Zeilen folgt aus (iv); die restlichen Aussagen werden weiter unten, (v) erst in Teil II der Vorlesung gezeigt.

15.5 Eigenschaften von Determinanten

Eigenschaften von Determinanten

- (i) Sei $A \in K^{(n,n)}$. Es gilt dann $\det A \neq 0$ genau dann, wenn $\text{Rang } A = n$ gilt, also A regulär ist.
- (ii) $\det : A \mapsto \det A$ ist linear in jeder Spalte von A .
(Man kann zeigen, dass $\det A$ auch linear in jeder Zeile von A ist.)
- (iii) Verhalten bei elementaren Umformungen:
 - Die Determinante bleibt unverändert bei Addition einer Linearkombination von Spalten (Zeilen) zu einer anderen Spalte (bzw. Zeile).
 - $\det B = \alpha \cdot \det A$, falls B aus A durch Multiplikation einer Spalte (Zeile) mit $\alpha \in K$ hervorgeht.
 - $\det B = -\det A$, falls B aus A durch Vertauschen zweier Spalten (Zeilen) hervorgeht.
- (iv) $\det A = \det A^T$ für $(\alpha_{ij})_{i,j=1,\dots,n}^T := (\alpha_{ji})_{i,j=1,\dots,n}$.
(Determinante der „**transponierten**“ Matrix).
- (v) $\det(A \cdot B) = \det A \cdot \det B$ für $A, B \in K^{(n,n)}$ (**Multiplikationssatz**).

15.6 Berechnung von 3×3 -Determinanten

(i) Spezialfall: **Dreiecksmatrix**⁵⁰

$$\begin{vmatrix} \alpha_{11} & & \star \\ & \alpha_{22} & \\ \text{O} & & \alpha_{33} \end{vmatrix} := \det \begin{pmatrix} \alpha_{11} & & \star \\ & \alpha_{22} & \\ \text{O} & & \alpha_{33} \end{pmatrix} = \prod_{i=1}^3 \alpha_{ii}.$$

Beweis:

Wegen der definierenden Eigenschaften von Determinanten folgt:

$$\begin{aligned} & \det(e_1\alpha_{11}, e_1\alpha_{12} + e_2\alpha_{22}, e_1\alpha_{13} + e_2\alpha_{23} + e_3\alpha_{33}) \\ &= \alpha_{11}\Delta_0(e_1, e_1\alpha_{12} + e_2\alpha_{22}, e_1\alpha_{13} + e_2\alpha_{23} + e_3\alpha_{33}) = \\ & \alpha_{11}\alpha_{12}\Delta_0(e_1, e_1, e_1\alpha_{13} + e_2\alpha_{23} + e_3\alpha_{33}) + \alpha_{11}\alpha_{22}\Delta_0(e_1, e_2, e_1\alpha_{13} + e_2\alpha_{23} + e_3\alpha_{33}) = \\ & 0 + \alpha_{11}\alpha_{22}[\alpha_{13}\Delta_0(e_1, e_2, e_1) + \alpha_{23}\Delta_0(e_1, e_2, e_2) + \alpha_{33}\Delta_0(e_1, e_2, e_3)] = \alpha_{11}\alpha_{22}\alpha_{33}. \quad \square \end{aligned}$$

Anmerkungen: 1.) Ein alternativer Beweis benutzt elementare Umformungen (s.u.) zu einer Diagonalmatrix.

2.) Eine Verallgemeinerung auf $n \times n$ -Dreiecksmatrizen ist möglich.

(ii) *Regel von Sarrus* (gesprochen Sarrü) (nur für 3×3 -Matrizen !):

$$\begin{array}{c} + \\ \left(\begin{array}{ccc|cc} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} & \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} & \alpha_{21} & \alpha_{22} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} & \alpha_{31} & \alpha_{32} \end{array} \right) \\ - \\ = \alpha_{11}\alpha_{22}\alpha_{33} + \alpha_{12}\alpha_{23}\alpha_{31} + \alpha_{13}\alpha_{21}\alpha_{32} - \alpha_{31}\alpha_{22}\alpha_{13} - \alpha_{32}\alpha_{23}\alpha_{11} - \alpha_{33}\alpha_{21}\alpha_{12}. \end{array}$$

Beweisandeutung: Spezialisierung von 15.7, s. auch (iv) !

Beispiel:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2^2 \\ 1 & 3 & 3^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2^2 \\ 1 & 3 & 3^2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 1 \cdot 2 \cdot 3^2 + 1 \cdot 2^2 \cdot 1 + 1 \cdot 1 \cdot 3 - 1 \cdot 2 \cdot 1 - 3 \cdot 2^2 \cdot 1 - 3^2 \cdot 1 \cdot 1 = 2$$

(iii) Durch **elementare Umformungen** und Zurückführung auf (i):

Beispiel:

$$\begin{vmatrix} \lambda & k & k \\ k & \lambda & k \\ k & k & \lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda - k & 0 & k \\ k - \lambda & \lambda - k & k \\ 0 & k - \lambda & \lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda - k & 0 & k \\ 0 & \lambda - k & 2k \\ 0 & 0 & \lambda + 2k \end{vmatrix} \stackrel{(i)}{=} \dots$$

- | | |
|---------------------------|-----------------------------|
| 1. Spalte minus 2. Spalte | 2. Zeile plus 1. Zeile |
| 2. Spalte minus 3. Spalte | 3. Zeile plus neue 2. Zeile |

⁵⁰Dabei sind die Einträge des oberen Dreiecks beliebige Körperelemente, durch \star angedeutet, die Einträge des unteren Dreiecks sämtlich 0, durch O angedeutet.

$$= (\lambda - k)^2(\lambda + 2k).$$

(iv) **Laplace'sche Entwicklung (im Fall $n=3$)** nach der ersten Zeile
(Zurückführung auf 2×2 -Matrizen) :

$$\begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{vmatrix} = \alpha_{11} \begin{vmatrix} \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{vmatrix} - \alpha_{12} \begin{vmatrix} \alpha_{21} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{33} \end{vmatrix} + \alpha_{13} \begin{vmatrix} \alpha_{21} & \alpha_{22} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} \end{vmatrix}$$

Beispiel

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2^2 \\ 1 & 3 & 3^2 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 2^2 \\ 3 & 3^2 \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2^2 \\ 1 & 3^2 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = (2 \cdot 3^2 - 2^2 \cdot 3) - (1 \cdot 3^2 - 1 \cdot 2^2) + (1 \cdot 3 - 1 \cdot 2) = 2$$

Anmerkung: 15.6 (iv) ist eine Spezialisierung von 15.7, s.u..

Wir erwähnen hier schon die Verallgemeinerung:

15.7 Laplace'sche Entwicklung (nach einer Zeile):

Allgemein gilt für $A = (\alpha_{ij})_{i,j=1,\dots,n}$ mit $A_{kj} := (-1)^{k+j}$

$$\begin{vmatrix} \alpha_{11} \cdots & \alpha_{1j} \cdots & \alpha_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \alpha_{k1} & \alpha_{kj} & \alpha_{kn} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \alpha_{n1} \cdots & \alpha_{nj} \cdots & \alpha_{nn} \end{vmatrix}$$

die Formel

$$\det A = \sum_{j=1}^n \alpha_{kj} A_{kj} \quad (\text{für } k \in \{1, \dots, n\} \text{ fest}).$$

Beispiel: siehe 15.6 (iv) !

Diese Formel werden wir in Teil II der Vorlesung beweisen. Wegen 15.5 (iv) ist auch die Entwicklung nach einer Spalte möglich:

$$\det A = \sum_{i=1}^n \alpha_{ik} A_{ik} \quad (\text{für } k \in \{1, \dots, n\} \text{ fest}).$$

Im Folgenden gehen wir fast zurück zum Anfang und diskutieren das Thema:

(B) Zur Existenz und Eindeutigkeit des Volumens

Analyse: Sei eine Determinantenform Δ gegeben. Aus den definierenden Eigenschaften folgt mit $x_j = \sum_{i_j=1}^n b_{i_j} \xi_{i_j j}$ für $j = 1, \dots, n$ und Basis $B = (b_1, \dots, b_n)$:

$$\begin{aligned} \Delta(x_1, x_2, \dots, x_n) &= \Delta\left(\sum_{i_1=1}^n b_{i_1} \xi_{i_1 1}, \dots, \sum_{i_n=1}^n b_{i_n} \xi_{i_n n}\right) \\ &= \sum_{i_1=1}^n \xi_{i_1 1} \Delta\left(b_{i_1}, \sum_{i_2=1}^n b_{i_2} \xi_{i_2 2}, \dots, \sum_{i_n=1}^n b_{i_n} \xi_{i_n n}\right) \\ &= \sum_{i_1=1}^n \sum_{i_2=1}^n \xi_{i_1 1} \xi_{i_2 2} \Delta\left(b_{i_1}, b_{i_2}, \sum_{i_3=1}^n b_{i_3} \xi_{i_3 3}, \dots, \sum_{i_n=1}^n b_{i_n} \xi_{i_n n}\right) \\ &= \sum_{i_1=1}^n \sum_{i_2=1}^n \dots \sum_{i_n=1}^n \xi_{i_1 1} \xi_{i_2 2} \dots \xi_{i_n n} \Delta(b_{i_1}, b_{i_2}, \dots, b_{i_n}). \end{aligned}$$

Zu summieren ist zunächst über alle Kombinationen $(i_1, i_2, \dots, i_n) \in \{1, 2, \dots, n\}^n$, also über die Bilder aller Abbildungen $f : \{1, \dots, n\} \rightarrow \{1, \dots, n\}$ mit $k \mapsto i_k$. Kommt jedoch ein b_j an mehreren Positionen vor, so ist der Summand definitionsgemäß gleich Null. Damit kann man sich auf diejenigen n -Tupel (i_1, i_2, \dots, i_n) beschränken, die eine Permutation $k \mapsto i_k$ von $\{1, 2, \dots, n\}$ darstellen, also Elemente der symmetrischen Gruppe S_n sind. Es folgt daher

$$(*) \quad \Delta(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{\pi \in S_n} \xi_{\pi(1)1} \xi_{\pi(2)2} \dots \xi_{\pi(n)n} \Delta(b_{\pi(1)}, b_{\pi(2)}, \dots, b_{\pi(n)}).$$

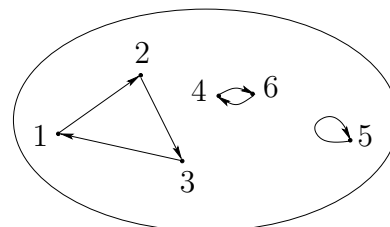
Wir wissen nach Satz 15.3 (a), dass die Vertauschung zweier Vektoren das Vorzeichen der Determinante ändert. Die Frage ist nun, als Produkt von wievielen solcher Vertauschungen eine Permutation $\pi \in S_n$ geschrieben werden kann.

Exkurs: Gerade und ungerade Permutationen

Sei $\pi \in S_n$, also π Permutation von $\{1, \dots, n\}$. Wir wollen wiederholte Anwendungen von π betrachten; im Folgenden bezeichne wieder π^i die i -fache Hintereinanderausführung von π , also $\underbrace{\pi \circ \pi \circ \pi \dots \circ \pi}_{i \text{ mal}}$.

Beispiel: $n = 6$; $\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 3 & 1 & 6 & 5 & 4 \end{pmatrix}$ (Vgl. Figur 5.1 !)

$$\begin{aligned} \pi^0 &= \text{id}_{\{1, \dots, 6\}} \\ \pi^1(1) &= \pi(1) = 2 \\ \pi^2(1) &= \pi(\pi(1)) = \pi(2) = 3 \\ \pi^3(1) &= \pi(\pi^2(1)) = \pi(3) = 1 \\ \pi^4(1) &= \pi(1) \dots \\ \pi(4) &= 6 \\ \pi^2(4) &= \pi(6) = 4 \\ \pi(5) &= 5 \quad (\text{Fixpunkt}) \end{aligned}$$



Figur 15.1 Bahnen einer Permutation

15.8 Bahnen einer Permutation

(a) *Definition:* Sei $\pi \in S_n$; für $a, b \in \{1, \dots, n\}$ definieren wir eine Relation

$$a \underset{\pi}{\sim} b \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} : b = \pi^k(a).$$

(b) *Hilfssatz:* Für $\pi \in S_n$ ist $\underset{\pi}{\sim}$ eine Äquivalenzrelation auf $\{1, \dots, n\}$. (Beweis \dots).

(c) *Definition:* Die Äquivalenzklasse von $a \in \{1, \dots, n\}$ bzgl. $\underset{\pi}{\sim}$, also

$$\{a, \pi(a), \pi^2(a), \dots\},$$

heißt **Bahn** oder auch **Transitivitätsgebiet** von a unter π .

Fortsetzung des letzten Beispiels (siehe wieder Figur 15.1):

Bahnen von π sind in diesem Fall $\{1, 2, 3\}$, $\{4, 6\}$ und $\{5\}$.

15.9 Definition: Zyklus

(a) Eine Permutation, deren Bahnen bis auf höchstens eine einelementig sind, (also außerhalb einer Bahn die Punkte fest läßt,) heißt *Zyklus*. Ein Zyklus ist also von der Form

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_m & a_{m+1} & \dots & a_n \\ a_2 & a_3 & a_4 & \dots & a_1 & a_{m+1} & \dots & a_n \end{pmatrix}.$$

Wir schreiben den Zyklus auch in der Form $(a_1 a_2 a_3 \dots a_m)(a_{m+1}) \dots (a_n)$ oder noch kürzer

$$(a_1 a_2 a_3 \dots a_m) \in S_n.$$

(b) **Beispiel:**

$$(i) \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 3 & 1 & 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} = (1 \ 2 \ 3)(4)(5)(6) = (1 \ 2 \ 3) \in S_6.$$

$$(ii) \quad (2 \ 5 \ 1 \ 3) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 5 & 2 & 4 & 1 & 6 \end{pmatrix}, \text{ falls } (2 \ 5 \ 1 \ 3) \in S_6 \text{ gilt.}$$

(c) *Definition:* Zwei Zyklen $(a_1 \dots a_s)$ und $(b_1 \dots b_t)$ aus S_n heißen **disjunkt**, falls

$$\{a_1, \dots, a_s\} \cap \{b_1, \dots, b_t\} = \emptyset.$$

15.10 Hilfssatz (Disjunkte Zyklen)

Disjunkte Zyklen aus S_n kommutieren.

$$\begin{aligned} \text{Beweisskizze. } (b_1 \dots b_t) \circ (a_1 \dots a_s) &= \begin{pmatrix} a_1 & \dots & a_s & b_1 & \dots & b_t & \dots & \dots \\ a_2 & \dots & a_1 & b_2 & \dots & b_1 & \dots & \dots \end{pmatrix} \\ &= (a_1 \dots a_s) \circ (b_1 \dots b_t). \end{aligned}$$

□

15.11 Hilfssatz (Zerlegung in Zyklen)

Seien $n \geq 2$ und $\pi \in S_n \setminus \{\text{id}\}$; dann lässt sich π (bis auf die Reihenfolge der Faktoren) eindeutig als Produkt paarweise disjunkter Zyklen schreiben.

Beweisandeutung: Die Zyklenzerlegung entspricht der Partition in Bahnen. □

Beispiel (Fortsetzung): $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 3 & 1 & 6 & 5 & 4 \end{pmatrix} = (123) \circ (46) =: (123)(46).$

15.12 Definition: Transposition

Ein Zyklus der Länge 2, d.h. ein solcher von der Form $(a_1 a_2)$, heißt *Transposition*. (Eine Transposition vertauscht also genau 2 Elemente aus $\{1, \dots, n\}$ und lässt die übrigen fest.)

15.13 Satz (Darstellung als Produkt von Transpositionen)

Jede Permutation aus S_n (mit $n \geq 2$) lässt sich als Produkt von (nicht notwendig disjunkten) Transpositionen schreiben.

Beweis-Andeutung. Nach 15.11 existiert eine Zerlegung in disjunkte Zyklen; jeder Zyklus $(a_1 a_2 \dots a_t)$ lässt sich schreiben als⁵¹ $(a_1 a_t) \circ (a_1 a_{t-1}) \circ \dots \circ (a_1 a_3) \circ (a_1 a_2)$. □

Beispiel: $\pi_1 := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 5 & 1 & 6 & 4 & 2 \end{pmatrix} = (1\ 3) \circ (2\ 5\ 4\ 6) = (1\ 3) \circ (2\ 6) \circ (2\ 4) \circ (2\ 5).$

Andererseits gilt auch $\pi_1 = (1\ 2) \circ (1\ 6) \circ (1\ 4) \circ (1\ 5) \circ (2\ 3) \circ (1\ 2)$. Die Darstellung als Produkt von Transpositionen ist also nicht eindeutig.

Jedoch gilt: (hier ohne Beweis zitiert):

15.14 Satz (Anzahl der Faktoren)

Sei $\pi \in S_n$ mit $n \geq 2$. Dann ist die Anzahl der Faktoren bei Darstellungen von π als Produkt von Transpositionen entweder stets gerade oder stets ungerade.

Damit werden folgende Definitionen sinnvoll:

15.15 Definition: gerade Permutation; Signum

(a) Ist π Produkt einer geraden Anzahl von Transpositionen, so heißt π *gerade Permutation*, andernfalls ungerade Permutation.

(b) Wir definieren das *Signum* einer Permutation wie folgt:

$$\text{sgn } \pi := \begin{cases} +1 & \text{falls } \pi \text{ gerade} \\ -1 & \text{falls } \pi \text{ ungerade.} \end{cases}$$

⁵¹hier von rechts aus zu lesen; d.h. der letzte Faktor wird zuerst angewandt

Beispiele: $\text{sgn id} = +1$, $\text{sgn } \tau = -1$ für jede Transposition τ ;

$$\text{sgn } \pi_1 = \text{sgn} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 5 & 1 & 6 & 4 & 2 \end{pmatrix} = +1 \quad (\text{vgl. voriges Beispiel; 4 bzw. 6 Faktoren!}).$$

Anmerkungen: Die Komposition

- einer geraden und einer ungeraden Permutation ist eine ungerade Permutation
- zweier geraden Permutationen ist eine gerade Permutation
- zweier ungeraden Permutationen ist eine gerade Permutation.

Die Definition von 'sgn' ermöglicht daher folgende Aussage:

15.16 Hilfssatz (Eigenschaften des Signums)

Für $\pi, \rho \in S_n$ gilt $\text{sgn}(\pi \circ \rho) = \text{sgn } \pi \cdot \text{sgn } \rho$.

Tabellarische Darstellung:			entsprechend für das Signum		
$\pi \circ \rho$	π gerade	π ungerade	$\text{sgn}(\pi \circ \rho)$	$\text{sgn}(\pi) = +1$	$\text{sgn}(\pi) = -1$
ρ gerade	gerade	ungerade	$\text{sgn}(\rho) = +1$	+1	-1
ρ ungerade	ungerade	gerade	$\text{sgn}(\rho) = -1$	-1	+1

Für $n > 1$ ist 'sgn' daher ein Gruppenhomomorphismus von (S_n, \circ) auf die Untergruppe $(\{+1, -1\}, \cdot)$ von (\mathbb{R}^*, \cdot) .

Der Kern dieses Homomorphismus, also die Menge aller geraden Permutationen von S_n , bildet einen Normalteiler von S_n . Da die Multiplikation mit einer Transposition τ die Menge der geraden Permutationen bijektiv auf die der ungeraden Permutationen abbildet, folgt insgesamt:

15.17 Satz und Definition: alternierende Gruppe

- (i) Die Menge der geraden Permutationen von S_n bilden eine Untergruppe A_n von S_n .
 A_n ist Normalteiler von S_n , und es gilt $S_n = A_n \cup A_n \circ \tau$ für jede Transposition τ sowie $|A_n| = \frac{1}{2}|S_n| = \frac{n!}{2}$.
- (ii) A_n heißt **alternierende Gruppe** vom Grad n .

Beispiel:

A_3 besteht aus folgenden $\frac{3!}{2} = 3$ Elementen (– den geraden Permutationen von S_3):
 $\text{id} = (1)$, $(1\ 2\ 3) = (1\ 3) \circ (1\ 2)$, $(1\ 3\ 2) = (1\ 2) \circ (1\ 3) = (1\ 2\ 3)^{-1}$.
 Ungerade Permutationen von S_3 sind die Transpositionen: $(1\ 2), (1\ 3), (2\ 3)$.

Ende des Exkurses

Zurück zur Determinante: Kann man eine Permutation π in ein Produkt von t Transpositionen zerlegen, so gilt nach Definition $\text{sgn } \pi = (-1)^t$. Daraus folgt mit 15.3 (ii')

15.18 Hilfssatz

Seien Δ Determinantenform auf V , $\dim_K V = n$ und $\pi \in S_n$; dann gilt

$$\Delta(x_{\pi(1)}, \dots, x_{\pi(n)}) = \operatorname{sgn} \pi \cdot \Delta(x_1, \dots, x_n).$$

Wir können damit die oben erhaltene Beziehung (*) weiter umformen und erhalten:

15.19 Eindeutigkeitssatz

Ist Δ eine Determinantenform auf dem K -Vektorraum V mit Basis $C = (c_1, \dots, c_n)$, und sind $x_j = \sum_{i=1}^n c_i \xi_{ij}$ für $(j = 1, \dots, n)$ n beliebige Vektoren aus V (mit $\xi_{ij} \in K$ für $i, j = 1, \dots, n$), so gilt:

$$(**) \quad \Delta(x_1, \dots, x_n) = \gamma \cdot \left[\sum_{\pi \in S_n} (\operatorname{sgn} \pi) \xi_{\pi(1)1} \cdots \xi_{\pi(n)n} \right] \quad \text{mit} \quad \gamma = \Delta(c_1, \dots, c_n).$$

Beispiel: Seien $\dim_K V = 2$ und $C = (c_1, c_2)$ Basis von V . Wegen $S_2 = \{\operatorname{id}, (1\ 2)\}$ ist jede Determinantenform von V von folgender Art:

$$\begin{aligned} \Delta\left(\begin{pmatrix} \xi_{11} \\ \xi_{21} \end{pmatrix}_C, \begin{pmatrix} \xi_{12} \\ \xi_{22} \end{pmatrix}_C\right) &= \left[\underbrace{1 \cdot \xi_{11}\xi_{22}}_{\text{von } \operatorname{id}_{\{1,2\}}} + \underbrace{(-1)\xi_{21}\xi_{12}}_{\text{von } (1\ 2) \in S_2} \right] \cdot \Delta(c_1, c_2) \\ &= (\xi_{11}\xi_{22} - \xi_{21}\xi_{12}) \cdot \gamma \quad \text{mit } \gamma := \Delta(c_1, c_2) \text{ konstant.} \end{aligned}$$

15.20 Korollar (Determinantenform und lineare Unabhängigkeit)

Sind Δ Determinantenform auf dem n -dim Vektorraum V und $c_1, \dots, c_n \in V$, so gilt:

$$\Delta(c_1, \dots, c_n) \neq 0 \Leftrightarrow \{c_1, \dots, c_n\} \text{ ist Basis von } V.$$

Anmerkung: Dies zeigt, dass 15.1 (ii) nicht nur für eine, sondern für jede Basis von V gilt. Außerdem beweist dieses Korollar die Eigenschaft aus 15.5 (i).

Beweis von 15.20.

„ \Rightarrow “ Wäre $\{c_1, \dots, c_n\}$ linear abhängig, so definitionsgemäß $\Delta(c_1, \dots, c_n) = 0$.
 „ \Leftarrow “ Seien $\{c_1, \dots, c_n\}$ Basis von V und $B_1 = \{b_1, \dots, b_n\}$ die Basis von V , für die $\Delta(b_1, \dots, b_n) \neq 0$ gemäß 15.1 (iii) gilt. Nach 15.19 existiert ein $\mu \in K$ mit $0 \neq \Delta(b_1, \dots, b_n) = \mu \Delta(c_1, \dots, c_n)$, woraus die Behauptung $\Delta(c_1, \dots, c_n) \neq 0$ folgt. \square

15.21 Korollar (Zur Frage der Eindeutigkeit)

Sind Δ_1 und Δ_2 Determinantenformen auf V , so existiert ein $\lambda \in K \setminus \{0\}$ mit

$$\Delta_1 = \lambda \cdot \Delta_2.$$

Bei festem Vektorraum V sind also Determinantenformen bis auf skalare Vielfache bestimmt.

Anmerkung: Wir werden sehen, dass umgekehrt eine Determinantenform Δ existiert und mit Δ auch $\lambda \cdot \Delta$ Determinantenform ist. Dies zeigt:

Die Determinantenformen von V bilden einen 1-dimensionalen Unterraum des Vektorraums aller n -fachen Linearformen von V .

Beweis von 15.21.

Ist $C = (c_1, \dots, c_n)$ eine geordnete Basis V , so existieren nach 15.19 und 15.20 Elemente $\gamma_i \in K \setminus \{0\}$ mit $\Delta_i(x_1, \dots, x_n) = \gamma_i \cdot \left[\sum_{\pi \in S_n} \operatorname{sgn} \pi \xi_{\pi(1)1} \cdots \xi_{\pi(n)n} \right]$ für $(i = 1, 2)$. Die Behauptung folgt mit $\lambda := \gamma_1 \cdot \gamma_2^{-1}$; denn damit ergibt sich

$$\Delta_1(x_1, \dots, x_n) = \lambda \gamma_2 \cdot \left[\sum_{\pi \in S_n} \operatorname{sgn} \pi \xi_{\pi(1)1} \cdots \xi_{\pi(n)n} \right] = \lambda \cdot \Delta_2(x_1, \dots, x_n). \quad \square$$

Jetzt können wir auch 15.5 (iv) zeigen:

15.22 Korollar (Determinante der transponierten Matrix)

$$\text{Für } A \in K^{(n,n)} \text{ gilt } \det A = \det A^T.$$

Beweis. Mit $\pi \in S_n$ durchläuft auch ρ für $\rho := \pi^{-1}$ alle Elemente aus S_n . Zu jedem j gibt es außerdem genau ein i mit $j = \pi(i)$, also $i = \rho(j)$. Damit gilt $\prod_{i=1}^n \alpha_{\pi(i)i} = \prod_{j=1}^n \alpha_{j\rho(j)}$.

Wegen $\operatorname{sgn} \rho = \operatorname{sgn} \pi^{-1} = \operatorname{sgn} \pi$ erhält man:

$$\det A = \Delta_0(a_{\bullet 1}, \dots, a_{\bullet n}) = \sum_{\pi \in S_n} \operatorname{sgn} \pi \prod_{i=1}^n \alpha_{\pi(i)i} = \sum_{\rho = \pi^{-1} \in S_n} \operatorname{sgn} \rho \prod_{j=1}^n \alpha_{j\rho(j)} = \det A^T. \quad \square$$

Nachzuholen ist nun noch der Nachweis der Existenz von Determinantenformen für endlich-dimensionale Vektorräume.

15.23 Existenzsatz

Sei V ein n -dimensionaler K -Vektorraum; seien ferner $C = (c_1, \dots, c_n)$ eine fest gewählte Basis von V und $\gamma \in K \setminus \{0\}$ sowie $x_j = \sum_{i=1}^n c_i \xi_{ij} \in V$ für $j = 1, \dots, n$.

Dann wird durch

$$\Delta(x_1, \dots, x_n) := \gamma \cdot \left[\sum_{\pi \in S_n} (\operatorname{sgn} \pi) \xi_{\pi(1)1} \cdots \xi_{\pi(n)n} \right]$$

(vgl. 15.19 (**)) eine Determinantenform auf V mit $\Delta(c_1, \dots, c_n) = \gamma$ definiert.

Beweisskizze. Sei $\Delta(x_1, \dots, x_n) := \gamma \cdot \left[\sum_{\pi \in S_n} (\operatorname{sgn} \pi) \xi_{\pi(1)1} \cdots \xi_{\pi(n)n} \right]$ für $x_j = \begin{pmatrix} \xi_{1,j} \\ \vdots \\ \xi_{n,j} \end{pmatrix}_C$.

Man prüft leicht nach, dass Δ in jedem seiner Argumente linear ist. Weiter gilt

$$\Delta(c_1, \dots, c_n) := \gamma \cdot \left[\sum_{\pi \in S_n} (\operatorname{sgn} \pi) \underbrace{\prod_{j=1}^n \delta_{\pi(j)j}}_{\neq 0 \text{ nur für } \pi = \operatorname{id}} \right] = \gamma \cdot 1 = \gamma \neq 0 .$$

Zu zeigen bleibt noch, dass aus der linearen Abhängigkeit von x_1, \dots, x_n die Aussage $\Delta(x_1, \dots, x_n) = 0$ folgt. Seien also x_1, \dots, x_n linear abhängig; dann existieren ein $i \in \{1, \dots, n\}$ und Elemente $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in K$ mit $x_i = \sum_{j=1, j \neq i}^n x_j \lambda_j$, und es gilt (wegen der Linearität in der i -ten Komponente):

$$\Delta(x_1, \dots, x_n) = \sum_{j=1, j \neq i}^n \lambda_j \cdot \Delta(x_1, \dots, \underbrace{x_j}_{i\text{-te Stelle}}, \dots, \underbrace{x_j}_{j\text{-te Stelle}}, \dots, x_n).$$

Es reicht also, $\Delta(x_1, \dots, x_n) = 0$ für $x_i = x_j$ für ein Indexpaar $i \neq j$ zu zeigen. Mit der Transposition $\tau := (i \ j) \in S_n$ folgt dann nach 15.17, dass $S_n = A_n \cup A_n \circ \tau$ und daher

$$\Delta(x_1, \dots, x_n) = \gamma \sum_{\sigma \in A_n} \left(\underbrace{1}_{\operatorname{sgn} \sigma} \cdot \prod_k \xi_{\sigma(k)k} + \underbrace{(-1)}_{\operatorname{sgn}(\sigma \circ \tau)} \cdot \prod_k \xi_{\sigma \circ \tau(k)k} \right)$$

gilt. Für $k \notin \{i, j\}$ ist $(\sigma \circ \tau)(k) = \sigma(k)$ und somit $\xi_{\sigma \circ \tau(k)k} = \xi_{\sigma(k)k}$. Wegen $x_i = x_j$ gilt $\xi_{ei} = \xi_{ej}$ für alle $e = 1, \dots, n$; somit ist

$$\xi_{(\sigma \circ \tau)(i)i} = \xi_{\sigma(j)i} = \xi_{\sigma(j)j} \quad \text{und} \quad \xi_{(\sigma \circ \tau)(j)j} = \xi_{\sigma(i)j} = \xi_{\sigma(i)i}.$$

Insgesamt folgt daher die Gleichheit der Faktoren von $\prod_k \xi_{\sigma(k)k}$ und $\prod_k \xi_{\sigma \circ \tau(k)k}$ für alle $\sigma \in A_n$, woraus sich die Behauptung ergibt. \square

15.24 Anmerkung: Existenz und Eindeutigkeit der Determinante

Aufgrund des Existenz- und des Eindeutigkeits-Satzes gibt es zu gewählter Basis $C = (c_1, \dots, c_n)$ genau eine Determinantenform Δ_0 mit $\Delta_0(c_1, \dots, c_n) = 1$; insbesondere gilt dies für $V = K^n$ und Wahl der kanonischen Basis von K^n als C . Damit ist die **Determinante** einer Matrix $A = (a_{\bullet 1}, \dots, a_{\bullet n}) \in K^{(n,n)}$ durch $\det A := \Delta_0(a_{\bullet 1}, \dots, a_{\bullet n})$ eindeutig definiert (vgl. 15.4).