§ 14 Affine Abbildungen

Lineare Abbildungen lassen den Nullvektor fest. Wenn man daher z.B. bei geometrischen Abbildungen den Nullpunkt nicht frei wählen kann oder wenn, wie bei nicht-trivialen Translationen, gar kein Fixpunkt existiert, ist ein Verallgemeinerung der Begriffsbildung nötig.

14.1 Definition: affin-lineare Abbildung, Affinität

a) Sei V ein K-Vektorraum. Dann heißt $F : V \to V$ *affin-lineare Abbildung* von V (bzw. von $AG(V)$), auch *affine Abbildung*, falls es eine *lineare* Abbildung $f : V \to V$ und ein $t \in V$ gibt mit

$$F(x) = f(x) + t.$$

b) Eine affin-lineare Abbildung F heißt *Affinität*, falls F zusätzlich bijektiv ist.

Anmerkungen :

(1) Eine affin-lineare Abbildung in $\mathrm{AG}(V)$ ist also eine Translation verknüpft mit einer linearen Abbildung. Oft ist es möglich, durch geeignete Wahl des Ursprungs (als einen Fixpunkt der Abbildung) $t = 0$ zu erreichen und damit zu einer linearen Abbildung zu gelangen.

(2) Ist $\dim_K V = n < \infty$, so hat F bzgl. einer Basis B von V die Darstellung $\vec{x} \mapsto A \cdot \vec{x} + \vec{t}$ mit Matrix $A := M_B^B(f)$ und Koordinatenvektoren $\vec{x} := M_B(x)$ und $\vec{t} := M_B(t)$ von x bzw. t. Bei einer Affinität ist A regulär, d.h. Rang $A = n$, und umgekehrt.

Im Folgenden behandeln wir neben Affinitäten von $\mathrm{AG}(\mathbb{R}^1)$ unf $\mathrm{AG}(\mathbb{R}^2)$ auch **spezielle Typen von Affinitäten** in $\mathrm{AG}(\mathbb{R}^n)$: Ähnlichkeitsabbildungen und Kongruenzabbildungen (Bewegungen).

14.2 Eigenschaften affin-linearer Abbildungen

Eine affin-lineare Abbildung bildet affine Unterräume auf affine Unterräume ab und erhält Inzidenz und Parallelität.
Eine Affinität ist damit insbesondere eine **Kollineation** von $\mathrm{AG}(V)$, d.h. eine Bijektion der Punktmenge von $\mathrm{AG}(V)$ auf sich, die die Menge der Geraden von $AG(V)$ auf sich abbildet.

Beweis. Es gilt $F(a + U) = f(a + U) + t = f(a) + f(U) + t = (f(a) + t) + f(U)$. Da f linear ist, wird der Unterraum U auf einen Unterraum $f(U)$ abgebildet. Sind L und M parallele Unterräume, so folgt $U_L \ I \ U_M$ und damit $f(U_M) \ I \ f(U_L)$, woraus sich die Parallelität von $F(L)$ und $F(M)$ ergibt. □

Anmerkungen :

1.) Umgekehrt werden die Kollineationen von $AG(K^n)$ für $K = \mathbb{R}$ ausschließlich von Affinitäten induziert; (dies ergibt sich aus dem sogenannten 2. Hauptsatz der Projektiven Geometrie, da $\mathbb{R}$ keine nicht-trivialen Automorphismen zulässt.)

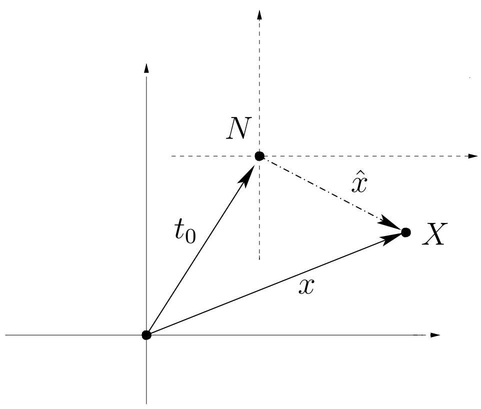
2.) Im Gegensatz zum reellen Fall liefert für $K = \mathbb{C}$ zum Beispiel die Abbildung $x = (\xi_1, \dots, \xi_n) \mapsto \overline{x} = (\overline{\xi_1}, \dots, \overline{\xi_n})$ (mit $\overline{\xi} = \alpha - \beta\, i$ für $\xi = \alpha + \beta\, i$) (Übergang zu konjugiert komplexen Koordinaten) eine Kollineation, die keine Affinität ist.

14.3 Beispiele

(i) Im Fall von $V = K$ (also $\dim_K(V) = 1$) ist jede Affinität von der Form $K \to K$ mit $x \mapsto ax + b$ für $a \neq 0$, $a, b \in K$; umgekehrt ist jede Abbildung mit dieser Zuordnung eine Affinität (Beweis ?). Die Menge aller dieser Abbildungen bildet bzgl. der Hintereinanderausführung eine Gruppe, die *affine Gruppe* $\mathrm{AGL}(1, K)$.

(ii) Wir betrachten nun **Drehungen**, **Geradenspiegelungen Scherungen** von $AG(\mathbb{R}^2)$, bei denen nicht der Nullpunkt fest bleibt. Diese sind dann keine linearen Abbildungen.

Ist t_0 der Ortsvektor eines Fixpunkts N einer sochen Abbildung F, so verschieben wir das Koordinatensystem um den Vektor t_0. Sei x der Ortsvektor eines Punktes X im urspünglichen Koordinatensystem und $\hat{x}$ derjenige im neuen Koordinatensystem. Es gilt dann (vgl. Figur 14.1 !): $\boxed{x = \hat{x} + t_0.}$



Figur 14.1 Zur Koordinatentransformation

Im neuen Koordinatensystem hat F die Darstellung wie in §13; insbesondere gilt $\hat{y} = F(\hat{x}) = f(\hat{x})$ (mit linearer Abbildung f). Damit folgt
$y - t_0 = \hat{y} = F(\hat{x}) = f(\hat{x}) = f(x - t_0) = f(x) - f(t_0)$, also

$$y = f(x) + t \quad \text{mit} \quad t = t_0 - f(t_0).$$

Jede Drehung, Spiegelung und Scherung in AG($\mathbb{R}^2$)ist also eine Affinität; und die zugehörende lineare Abbildung ist die einer Drehung, Spiegelung oder Scherung mit Fixpunkt 0.

14.4 Abstand, Orthogonalität (Erinnerung)

Im Folgenden sei $V = \mathbb{R}^n$ mit dem kanonischen Skalarprodukt versehen (vgl. §1 für $n = 2$ bzw. $n = 3$), also

$$(\xi_1, \ldots, \xi_n) \cdot (\eta_1, \ldots, \eta_n) := \big(\xi_1, \ldots, \xi_n\big) \cdot \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \vdots \\ \eta_n \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{n} \xi_i \eta_i.$$

Durch dieses Skalarprodukt ist
1.) ein Abstand d zwischen je zwei Punkten definiert (**euklidischer Abstand**) mittels

$$d(x, y) = d((\xi_1, \ldots, \xi_n), (\eta_1, \ldots, \eta_n)) := \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (\xi_i - \eta_i)^2} = \sqrt{(x - y)^2} =: ||x - y||$$

2.) eine Orthogonalitätsrelation $\perp$ erklärt durch: $x \perp y \Leftrightarrow x \cdot y = 0$.
AG($\mathbb{R}^n$) mit diesem Skalarprodukt, dieser Abstandsfunktion und dieser Orthogonalitätsrelation heißt $n-$dim **reeller euklidischer Raum**, in Zeichen EG($\mathbb{R}^n$).

14.5 Ähnlichkeitsabbildungen

a) *Definition*:
Sei F eine affin-lineare Abbildung von EG($\mathbb{R}^n$). Dann heißt F *Ähnlichkeitsabbildung* oder *äquiforme Abbildung*, falls ein $\gamma \in \mathbb{R}$ mit $\gamma > 0$ existiert derart, dass gilt:

$$d\,(F(x), F(y)) = \gamma \cdot d\,(x, y) \qquad \text{für alle } x, y \in \mathbb{R}^n.$$

Diese Formel bedeutet, dass Streckenlängen-Verhältnisse konstant bleiben.

b) *Beispiel* (vgl. 13.3 b (i)):
Die **zentrische Streckung** $S_\alpha : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ mit $x \mapsto \alpha \cdot x$ (für $\alpha \neq 0$) ist eine Ähnlichkeitsabbildung. [48]

Es gilt nämlich:

$$d(S_\alpha(x), S_\alpha(y)) = d(\alpha x, \alpha y) = \sqrt{(\alpha x - \alpha y)^2} = \sqrt{\alpha^2 (x - y)^2} = |\alpha| d(x, y).$$

Ferner gilt $(S_\alpha)^{-1} = S_{\alpha^{-1}}$ (für $\alpha \neq 0$).

c) *Weitere Eigenschaften*:
Ist F wie in 14.5 a) definiert, so ist $\tilde{F} := S_\gamma^{-1} \circ F$ wegen

$$d\,(\tilde{F}(x), \tilde{F}(y)) = |\gamma^{-1}| d\,(F(x), F(y)) = |\gamma^{-1}\gamma| d\,(x, y) = d(x, y)$$

[48] Die zugehörige Matrix bzgl. der kanonischen Basis ist $A = \alpha \cdot E_n$.

eine längenerhaltende Affinität und damit Kongruenzabbildung (Bewegung)(s.u. 14.6). Jede Ähnlichkeitsabbildung ist damit *Produkt einer Bewegung und einer zentrischen Streckung*: $F = S_\gamma \circ \tilde{F}$.

Nach geeigneter Definition von Winkelgrößen kann man zeigen, dass auch Winkelgrößen bei Ähnlichkeitsabbildungen invariant sind.

d) *Anmerkung:*
Ähnliche Figuren, d.h. solche, die durch Ähnlichkeitsabbildungen ineinander übergeführt werden können, stimmen daher in der Größe entsprechender Winkel und dem Verhältnis entsprechender Streckenlängen überein.

14.6 Bewegungen (Kongruenzabbildungen)

a) *Definition*:
Unter einer *Bewegung* (*Kongruenzabbildung*) des reellen euklidischen Raumes $\mathrm{EG}(\mathbb{R}^n)$ versteht man eine Affinität von $\mathrm{EG}(\mathbb{R}^n)$, die den Abstand je zweier Punkte invariant lässt, also **längentreu** ist.

b) *Beispiele*:
Translationen, Spiegelungen an einer Geraden (in $\mathrm{EG}(\mathbb{R}^2)$) bzw. an einer Ebene (in $\mathrm{EG}(\mathbb{R}^3)$), Drehungen.

c) *Eigenschaften:*
Man kann zeigen, dass im 2- (bzw. 3-) dimensionalen Fall eine Bewegung

(i) Produkt einer Translation mit einer Drehung ist (Bezeichnung: *eigentliche Bewegung*, *gleichsinnige Kongruenzabbildung*), und es ist $\det f = 1$; (im 3-Dimensionalen: Schraubung oder Translation)

oder

(ii) Produkt einer Translation mit einer Drehung verknüpft mit einer Achsenspiegelung (*uneigentliche Bewegung*), $\det f = -1$; (im 3-Dimensionalen: Drehspiegelung, Punktspiegelung, Gleitspiegelung).

d) *Anmerkungen*:

(i) **Kongruente Figuren** sind Teilmengen von $\mathbb{R}^n$, die durch eine Kongruenzabbildung aufeinander abgebildet werden können. (Vgl. die Vorlesung Elementargeometrie).

(ii) U.a. die folgenden Mengen von Abbildungen des reellen euklidischen Raumes $\mathcal{R} = \mathrm{EG}(\mathbb{R}^n)$ bilden bzgl. Verkettung eine **Gruppe**:

$\mathcal{A}$: die Menge der Affinitäten von $\mathcal{R}$
$\ddot{\mathcal{A}}$: die Menge der Ähnlichkeitsabbildungen von $\mathcal{R}$
$\mathcal{K}$: die Menge der Kongruenzabbildungen (Bewegungen) von $\mathcal{R}$
$\mathcal{K}^+$: die Menge der gleichsinnigen Kongruenzabbildungen von $\mathcal{R}$
$\mathcal{T}$: die Menge der Translationen von $\mathcal{R}$
$\mathcal{T}_g$: die Menge der Translationen von $\mathcal{R}$ längs einer (festen) Geraden g.

Dabei gilt: $\mathcal{T}_g \leq \mathcal{T} \leq \mathcal{K}^+ \leq \mathcal{K} \leq \ddot{\mathcal{A}} \leq \mathcal{A}$.