§ 13 Basisbezogene Darstellung von linearen Abbildungen, Matrizen

Wir setzen jetzt unsere Untersuchung von linearen Abbildungen fort.

13.1 Hom_K(V,W)

(a) Sind V und W Vektorräume über dem Körper K, so bezeichnet man mit $\mathrm{Hom}_K(V,W)$ die Menge *aller linearen Abbildungen* von V in W.
Auf $\mathrm{Hom}_K(V,W) := \{f \mid f : V \to W$ linear $\}$ lassen sich durch

$f + g : V \to W$ definiert durch $(f+g)(v) = f(v) + g(v)$ und

$f\lambda : V \to W$ definiert durch $(f\lambda)(v) = f(v)\lambda$

eine Addition und eine S-Multiplikation derart definieren, dass $(\mathrm{Hom}_K(V,W), +, \underset{K}{\cdot})$ ein K-Vektorraum ist. (Beweis ?)

M $\downarrow$

Um die Elemente von $\mathrm{Hom}_K(V,W)$, also lineare Abbildungen, „ökonomisch" beschreiben zu können, untersuchen wir, wodurch eine lineare Abbildung (eindeutig) bestimmt ist. Dazu betrachten wir zunächst eine Abbildung

$f_A : K^n \to K^m$ mit $\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \dots \\ \xi_n \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \sum\limits_{j=1}^{n} \alpha_{1j}\xi_j \\ \dots \\ \sum\limits_{j=1}^{n} \alpha_{mj}\xi_j \end{pmatrix}$ und Matrix $A = \big(a_{ij}\big)_{(i,j)\in\{1,\dots,m\}\times\{1,\dots,n\}}$. Es ist f_A linear, also $f_A \in\mathrm{Hom}_K(K^n, K^m)$. Da jedes Element von K^n sich als Linearkombination von $e_1, \dots, e_n$ mit $e_i = (\delta_{ij})_{j\in\{1,\dots,n\}}$ schreiben lässt und f_A linear ist, reicht es, sich auf $f_A(e_i)$ zu beschränken; es zeigt sich

$$f_A(e_i) = \begin{pmatrix} \sum\limits_{j=1}^{n} \alpha_{1j}\delta_{ij} \\ \dots \\ \sum\limits_{j=1}^{n} \alpha_{mj}\delta_{ij} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_{1i} \\ \dots \\ \alpha_{mi} \end{pmatrix} = a_{\bullet i} \quad .$$

Für $i \in \{1, \dots, n\}$ ist das Bild von e_i unter f_A (als Spalte geschrieben) gerade der i-te Spaltenvektor von A:

$$\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \dots & \alpha_{1i-1} & \boxed{\alpha_{1i}} & \alpha_{1i+1} & \dots & \alpha_{1n} \\ \vdots & & & \vdots & & & \vdots \\ \alpha_{m1} & \dots & \alpha_{mi-1} & \boxed{\alpha_{mi}} & \alpha_{mi+1} & \dots & \alpha_{mn} \end{pmatrix}$$

Dabei war $A = \big(\alpha_{ij}\big)_{(i,j)\in\{1,\dots,m\}\times\{1,\dots,n\}}$ beliebig in $K^{(m,n)}$ gewählt.

$\uparrow$ M

Wiederholung:
Mit $I := \{1, \dots, m\}$ und $J := \{1, \dots, n\}$ definieren wir (wie in §11) für $m, n \in \mathbb{N}$ die Menge der **$(m \times n)$-Matrizen** über dem Körper K:

$$K^{(m,n)} := K^{I\times J} := \big\{(\alpha_{ij})_{(i,j)\in I\times J} | \alpha_{ij} \in K \text{ für alle } i \in \{1, \dots, m\}, j \in \{1, \dots, n\}\big\} \quad .$$

M $\downarrow$

Wir haben gesehen, dass die Abbildungen f_A mit Matrizen A lineare Abbildungen sind. Gehören umgekehrt im Endlich-Dimensionalen zu linearen Abbildungen auch Matrizen?

$\uparrow$ M

Vor Beantwortung dieser Frage halten wir fest: Durch die Auswahl einer geeigneten Matrix $A \in K^{(m,n)}$ kann man, wie aus obigen Überlegungen folgt, eine lineare Abbildung f angeben, die die Vektoren $e_1, \dots, e_n$ der kanonischen Basis von K^n auf vorgeschriebene Vektoren $(\alpha_{11}, \dots, \alpha_{m1}), \dots, (\alpha_{1n}, \dots, \alpha_{mn})$ von K^m abbildet. Dies gilt auch allgemein für Vektorräume. Darüberhinaus ist eine lineare Abbildung schon durch ihre Wirkung auf die Elemente einer Basis des Urbildraumes eindeutig bestimmt:

13.2 Satz von der Linearen Fortsetzung (Basissatz für lineare Abbildungen)

Seien V und W K-Vektorräume, $(b_i)_{i\in I}$ eine geordnete Basis von V und $(w_i)_{i\in I}$ eine Familie von Vektoren aus W (mit gleicher Indexmenge I). Dann gilt: Es existiert genau ein $f \in \mathrm{Hom}_K(V,W)$ mit $f(b_i) = w_i$ für alle $i \in I$.

Beweis. Übungsaufgabe A13.1. □

M ↓

Für die angestrebte Beschreibung einer linearen Abbildung betrachten wir zunächst die Bilder einer fest gewählten Basis von V. Wir beschränken uns dabei auf endlich-dimensionale Vektorräume:

↑ M

13.3 Beschreibung von linearen Abbildungen bzgl. fester Basen

Voraussetzungen: Seien V, W K-Vektorräume mit $\dim V < \infty$ und $\dim W < \infty$. Seien $B = (b_1, \dots, b_n)$ (geordnete) Basis von V und $C = (c_1, \dots, c_m)$ (geordnete) Basis von W.

(a) **Definition**: Ist $f \in \mathrm{Hom}_K(V,W)$, so heißt die durch

$$f(b_j) = \sum_{i=1}^{m} c_i \alpha_{ij} = \begin{pmatrix} \alpha_{1j} \\ \vdots \\ \alpha_{mj} \end{pmatrix}_C \qquad (j = 1, \dots, n)$$

definierte Matrix

$$M(f) := M_C^B(f) := (a_{ij})_{\substack{i\in\{1,\dots,m\} \\ j\in\{1,\dots,n\}}}$$

die Matrix von f bzgl. des Basispaares (B, C).

Dabei ist die **j−te Spalte** von $M_C^B(f)$, d.h. $\begin{pmatrix} \alpha_{1j} \\ \vdots \\ \alpha_{mj} \end{pmatrix}$, gleich $M_C(f(b_j))$, also **gleich dem Koordinatenvektor des Bildes des j−ten Basisvektors des Urbildraums bzgl. der Basis des Bildraums** (für $j = 1, \dots, n$).

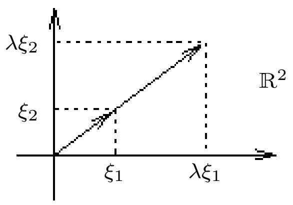
(b) **Beispiele**

(i) $K = \mathbb{R}$, $V = W = \mathbb{R}^2$

$s_\lambda : \begin{cases} \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \\ (\xi_1, \xi_2) \mapsto (\lambda\xi_1, \lambda\xi_2) \end{cases}$

(**Streckung** um den Faktor λ vom Nullpunkt aus).

Wir wählen $B = C = (e_1, e_2)$. Es folgt:



Figur 13.1:
Zur zentrischen Streckung

$$s_\lambda(e_1) = s_\lambda\big((1,0)\big) = (\lambda, 0) = \begin{pmatrix}\lambda\\0\end{pmatrix}_{(e_1,e_2)}$$

$$s_\lambda(e_2) = s_\lambda\big((0,1)\big) = (0, \lambda) = \begin{pmatrix}0\\\lambda\end{pmatrix}_{(e_1,e_2)} \qquad \text{und damit} \quad M_C^B(s_\lambda) = \left(\boxed{\begin{matrix}\lambda\\0\end{matrix}}\ \boxed{\begin{matrix}0\\\lambda\end{matrix}}\right).$$

Speziell: $M_C^B(\mathrm{id}_{\mathbb{R}^2}) = \left(\begin{smallmatrix}1&0\\0&1\end{smallmatrix}\right)$ („Einheitsmatrix“).

(ii) Seien K, V, W, s_λ wie in Beispiel (b)(i) gewählt.

$B' = \big((1,1), (0,1)\big)$, $C' = (e_2, e_1)$

$$s_\lambda\big((1,1)\big) = (\lambda, \lambda) = \begin{pmatrix}\lambda\\\lambda\end{pmatrix}_{C'}, \qquad s_\lambda\big((0,1)\big) = (0, \lambda) = \begin{pmatrix}\lambda\\0\end{pmatrix}_{C'}$$

$$M_{C'}^{B'}(s_\lambda) = \begin{pmatrix}\lambda & \lambda\\ \lambda & 0\end{pmatrix}.$$

(**Beachten Sie die Abhängigkeit der darstellenden Matrix von den gewählten Basen!**)

(iii) Sei f die „**Drehung** um 0 um den Winkel vom Maß α “ in der reellen euklidischen Ebene, also in $V = W = \mathbb{R}^2$ versehen mit dem kanonischen Skalarprodukt (vgl. §1 !).(Siehe Figur 13.2 !)

Sei $f(x) = \begin{pmatrix}\eta_1\\\eta_2\end{pmatrix}$ Bildpunkt des Vektors $x = \begin{pmatrix}\xi_1\\\xi_2\end{pmatrix}$. (Wir indentifizieren wieder die Punkte mit ihren Ortsvektoren bzgl. des Ursprungs 0). Sei ferner y_1 der Fußpunkt des Lots von $f(x)$ auf $\overrightarrow{0x}$. Wegen $|x| = |f(x)|$ ergibt sich

$y_1 = \big(|x|\cos\alpha\big)\frac{x}{|x|} = x\cos\alpha$ und $\overrightarrow{y_1 f(x)} = \big(|x|\sin\alpha\big)\frac{\tilde{x}}{|x|} = \tilde{x}\sin\alpha$, (mit $\tilde{x} := \begin{pmatrix}-\xi_2\\\xi_1\end{pmatrix} \perp x$, also $|\tilde{x}| = |x|$), folglich $\begin{pmatrix}\eta_1\\\eta_2\end{pmatrix} = f(x) = x\cos\alpha + \tilde{x}\sin\alpha =$

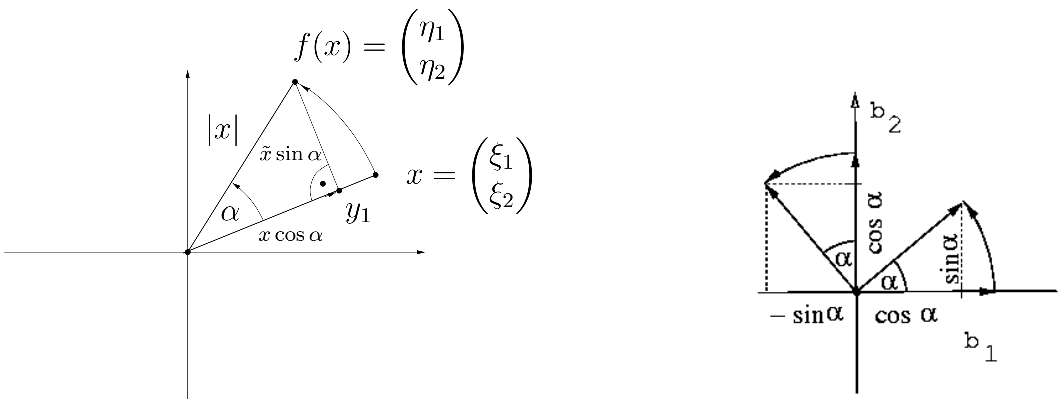
$$\begin{pmatrix}\xi_1\\\xi_2\end{pmatrix}\cos\alpha + \begin{pmatrix}-\xi_2\\\xi_1\end{pmatrix}\sin\alpha = \begin{pmatrix}\xi_1\cos\alpha - \xi_2\sin\alpha\\ \xi_2\cos\alpha + \xi_1\sin\alpha\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha\\ \sin\alpha & \cos\alpha\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\xi_1\\\xi_2\end{pmatrix}$$

insbesondere (mit f linear und $\begin{pmatrix}\xi_1\\\xi_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ bzw. $\begin{pmatrix}\xi_1\\\xi_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ und $B = (b_1, b_2) = (e_1, e_2)$):

$$f(e_1) = \begin{pmatrix}\cos\alpha\\\sin\alpha\end{pmatrix}_B, \quad f(e_2) = \begin{pmatrix}-\sin\alpha\\\cos\alpha\end{pmatrix}_B.$$

Ergebnis: In der reellen euklidischen Ebene ist die Drehung um 0 mit Drehwinkelmaß α linear, und es gilt (bzgl. der kanonischen Basis B):

$$M_B^B(f) = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} .$$



a) Bild $f(x)$ von x b) Koordinaten der Bilder der Basisvektoren

Figur 13.2: Zur Drehung um 0.

(iv) Ist $V = K^n$, $W = K^m$ und sind B und C die kanonischen Basen, so gilt

$$M_C^B(f_A) = A.$$

(v) Eine **Scherung** S von $AG(\mathbb{R}^2)$ ist eine Abbildung von $\mathbb{R}^2$ auf sich, bei der

(i) eine Gerade g punktweise fest bleibt (*Fixpunktgerade*) – sie heißt *Affinitätsachse* –,

(ii) der Bildpunkt $S(Q)$ jeden Punktes Q auf der Parallelen zur Affinitätsachse g durch den Urbildpunkt Q liegt und

(iii) Kollinearität erhalten bleibt.

Wir wählen nun den Ursprung 0 auf g; sei $B = (b_1, b_2)$ eine Basis derart, dass b_1 Einheitsvektor auf der Achse g und b_2 dazu orthogonaler Einheitsvektor ist (s. Figur 13.3)

Heuristik: Ist P ein fester Punkt mit zweiter Koordinate 1 und Bildpunkt $P' = S(P)$, so sei $\alpha \in \mathbb{R}$ bestimmt durch $\vec{PP'} = b_1\alpha$. Z.B. nach dem Strahlensatz folgt dann für einen Punkt $Q \in 0P$ mit 2. Koordinate η die Gleichung

$$S(Q) = S(\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}_B) = \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}_B + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}_B \cdot \eta\alpha = \begin{pmatrix} \xi + \eta\alpha \\ \eta \end{pmatrix}_B .$$

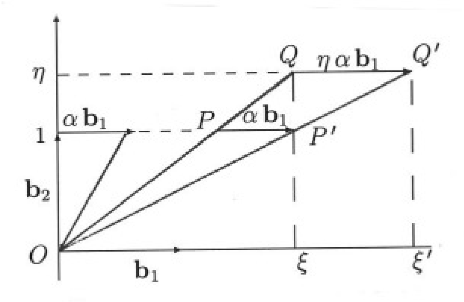
Die Abbildung S bildet daher Q ab auf den Punkt mit Koordinaten

$$\begin{pmatrix} \xi' \\ \eta' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} .$$

Die lineare Abbildung mit der Abbildungsvorschrift (bzgl. Basis B)

$$\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}, \quad \text{also mit Matrix} \quad M_B^B(S) = \begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

und $\alpha \in \mathbb{R}$ erhält die Kollinearität und Parallelität, lässt die $\xi-$Achse punktweise und die jeweilige $\eta-$Koordinate fest. Damit erfüllt sie die Bedingungen (i) bis (iii) für die Scherung und ist somit die durch P und P' eindeutig bestimmte Scherung.



Figur 13.3 Zur Scherung

(c) **Existenz und Eindeutigkeit der darstellenden Matrix**

> $M_C^B(f)$ ist bei festen endlichen geordneten Basen B und C für jedes $f \in \mathrm{Hom}_K(V, W)$ definiert und eindeutig bestimmt.

Folgerung aus Satz 13.2.

(d) **Umkehrung**

> Ist umgekehrt $A = (\alpha_{ij})$ eine $(m \times n)$-Matrix über K, so existiert (für B und C fest) genau eine Abbildung $f \in \mathrm{Hom}_K(V, W)$ mit $M_C^B(f) = A$.

Beweis.

Ist $A = (\alpha_{ij})_{\substack{i=1,\dots,m \\ j=1,\dots,n}}$ gegeben, so definieren wir $w_j := \sum_{i=1}^{m} c_i\alpha_{ij}$ $(j = 1, \dots, n)$. Genau dann ist $M_C^B(f) = A$, wenn $f(b_j) = w_j$ ist. Nach (13.2) existiert ein eindeutig bestimmtes $f \in \mathrm{Hom}_K(V, W)$ mit $f(b_j) = w_j$ für alle $j \in \{1, \dots, n\}$. Es folgt $M_C^B(f) = A$. Umgekehrt folgt aus $M_C^B(f) = A$ die Gleichung $f(b_j) = \sum_{i=1}^{m} c_i\alpha_{ij} = w_j$. Nach dem Fortsetzungssatz ist f eindeutig. □

(e) **Zusammenfassung**

> Die Abbildung $M_C^B : \begin{cases} \mathrm{Hom}_K(V, W) \to K^{(m,n)} \\ f \mapsto M_C^B(f) \end{cases}$ ist wohldefiniert und bijektiv.

13.4 Erinnerung und Anmerkung zu Koordinaten

In (7.8) hatten wir jedem Vektor x eines endlich-dimensionalen K-Vektorraums V bzgl. einer festen geordneten Basis $B = (b_1, \ldots, b_n)$ einen „**Koordinatenvektor**“ zugeordnet; dieser lässt sich auch als $n \times 1$-Matrix über K auffassen:

Zu $x = \sum_{i=1}^{n} b_i\xi_i = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_n \end{pmatrix}_B \in V$ hatten wir definiert: $M_B(x) := \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_n \end{pmatrix} \in K^{(n,1)}$.

$$\boxed{\text{Die Zuordnung } M_B\colon \begin{cases} V \to K^{(n,1)} \\ x \mapsto M_B(x) \end{cases} \text{ ist ein Vektorraum-Isomorphismus (vgl. (7.8)).}}$$

Die Elemente von $K^n, K^{(1,n)}, K^{(n,1)}$ unterscheiden sich zwar formal:

$(\xi_1, \ldots, \xi_n) \in K^n$ ist eine Abbildung von $(1, \ldots, n)$ in K, $(\xi_1, \ldots, \xi_n) \in K^{(1,n)}$ eine Abbildung von $\{(1,1), \ldots, (1,n)\}$ in K, und $\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \vdots, \\ \xi_n \end{pmatrix} \in K^{(n,1)}$ ist eine Abbildung von $\{(1,1), \ldots, (n,1)\}$ in K. Jedoch gibt es eine natürliche Zuordnung zwischen ihnen, die mit der Addition und der S-Multiplikation verträglich ist:

$$K^{(1,n)} \cong K^n \cong K^{(n,1)}.$$

Die Unterscheidung ist also mehr formaler als inhaltlicher Art. Sie muss aber trotzdem beachtet werden.

Für den $K-$Vektorraum $V = K^{(n,1)}$ und die kanonische Basis

$$B = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \quad \text{gilt:} \quad M_B\left(\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_n \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_n \end{pmatrix}.$$

Im Fall eines beliebigen n-dimensionalen K-Vektorraums V müssen wir jedoch zwischen $x \in V$ und dem Spaltenvektor $M_B(x) \in K^{(n,1)}$ unterscheiden. Wir verwenden dabei wie bisher folgende Schreibweise: $\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_n \end{pmatrix}_B = \sum_{j_1}^{n} b_j\xi_j$.

Im Hinblick auf den Übergang von Zeilen- zu Spaltenvektor definieren wir noch

$$(\xi_1, \ldots, \xi_n)^T := \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_n \end{pmatrix}$$

als Spezialfall der Definition $\quad (\alpha_{ij})^T_{i\in I, j\in J} := (\alpha_{ji})_{i\in I, j\in J}$.
A^T heißt die zu A **transponierte Matrix**, a^T der zum Vektor a transponierte Vektor.
Beispiel:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Wie wirkt nun ein Homomorphismus, dessen Matrix bzgl. Basen B und C gegeben ist, auf die entsprechenden Koordinatenvektoren?

Seien $B = (b_1, \dots, b_n)$ und $C = (c_1, \dots, c_m)$ geordnete Basen der endlich-dimensionalen $K-$Vekrorräume V bzw. W; sei ferner $f \in \mathrm{Hom}_K(V, W)$ mit Matrix $M_C^B(f) = (\alpha_{ij})_{\substack{i\in\{1,\dots,m\} \\ j\in\{1,\dots,n\}}}$. Für $x \in V$ und $y = f(x)$ mit $M_B(x) = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_n \end{pmatrix}$, also $x = \sum\limits_{j=1}^n b_j\xi_j$, sowie $M_C(y) = \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \vdots \\ \eta_m \end{pmatrix}$, also $y = \sum\limits_{i=1}^m c_i\eta_i$, folgt aus $y = f(x) = f\big(\sum\limits_{j=1}^n b_j\xi_j\big) = \sum\limits_{j=1}^n f(b_j)\xi_j = \sum\limits_{j=1}^n \big(\sum\limits_{i=1}^m c_i\alpha_{ij}\big)\xi_j = \sum\limits_{i=1}^m\sum\limits_{j=1}^n c_i\alpha_{ij}\xi_j = \sum\limits_{i=1}^m c_i\big(\sum\limits_{j=1}^n \alpha_{ij}\xi_j\big)$ die Gleichung

$$M_C(y) = \begin{pmatrix} \sum\limits_{j=1}^n \alpha_{1j}\xi_j \\ \vdots \\ \sum\limits_{j=1}^n \alpha_{mj}\xi_j \end{pmatrix}$$

und damit

$$\begin{pmatrix} \eta_1 \\ \vdots \\ \eta_m \end{pmatrix} = M_C\big(f(x)\big) = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ \alpha_{m1} & \cdots & \alpha_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_n \end{pmatrix} = M_C^B(f) \cdot M_B(x)\ .$$

Wir halten fest:

13.5 Satz (Abbildungsgleichung in Matrixform)

Seien V und W endlich-dimensionale K-Vektorräume mit geordneter Basis B bzw. C und sei $f \in \mathrm{Hom}_K(V, W)$. Dann gilt für alle $x \in V$ die Gleichung

$$M_C(f(x)) = M_C^B(f) \cdot M_B(x).$$

Anmerkungen: 1.) Der Übergang zu Koordinaten sieht dabei schematisch wie folgt aus:

$$\boxed{\begin{array}{ccccccccc} f: & V & \longrightarrow & W & \text{linear} & x & \mapsto & y & \\ \downarrow & \downarrow M_B & & \downarrow M_C & & \downarrow & & \downarrow & \\ M_C^B(f) & K^{(n,1)} & \longrightarrow & K^{(m,1)} & \text{mit} & M_B(x) & \mapsto & M_C(y) & = M_C^B(f) \cdot M_B(x) \end{array}}$$

2.) *Alternative Schreibweise:* Bezeichnen wir mit
- $\vec{x}$ den Koordinatenvektor[45] von $x \in V$ zur Basis B,
- $\vec{y}$ den Koordinatenvektor [46] von $y \in W$ zur Basis C,
- M_f die Matrix von f bzg. der Basen B und C,

dann gilt analog zur "Abbildungsgleichung" $y = f(x)$ die Gleichung

$$\boxed{\vec{y} = M_f \cdot \vec{x}}$$

Beispiel: (Vgl. 13.3 Bsp. (b)(iii) :)

Seien $V = W = \mathbb{R}^2$, $K = \mathbb{R}$, $B = C = (e_1, e_2)$ sowie d_α die Drehung um 0 um den Winkel vom Maß α. Dann haben wir folgende Entsprechungen:

$$\begin{array}{ccccc} y & = & d_\alpha & & (x) \\ \updownarrow & & \updownarrow & & \updownarrow \\ \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{pmatrix} & = & \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} & \cdot & \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} \end{array}$$

wegen

$$\begin{array}{rcll} \eta_1 & = & (\cos\alpha)\,\xi_1 & +(-\sin\alpha)\,\xi_2 \quad \text{und} \\ \eta_2 & = & (\sin\alpha)\,\xi_1 & +(\cos\alpha)\,\xi_2 \end{array} .$$

Anmerkung. Die Koordinatenvektoren haben wir hier in Spaltenform geschrieben. Bei einer modifizierten Definition der Matrix von d_α mit dem Ziel der Multiplikation mit der Matrix "von rechts" können auch Zeilenvektoren benötigt werden:

$$(\eta_1, \ldots, \eta_m) = (\xi_1, \ldots, \xi_n) \cdot M' (\text{ mit } M' = M^T).$$

[45] in Spaltenform
[46] ebenfalls in Spaltenform

13.6 Spezialfall: Linearform

Sei V ein K-Vektorraum der Dimension n mit geordneter Basis B, sei ferner $f \in V^* := \mathrm{Hom}_K(V,K)$ (f heißt dann **Linearform** und V^* **Dualraum**) und $M_B(x) = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_n \end{pmatrix}$ Koordinatenvektor von $x \in V$ bzgl. B; dann existiert eine Matrix $\begin{pmatrix} \alpha_1 & \dots & \alpha_n \end{pmatrix} \in K^{(1,n)}$ mit

$$\boxed{f(x) = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \dots & \alpha_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_n \end{pmatrix}} \qquad \text{für alle } x \in V\ .$$

Beweis. Die Behauptung folgt aus 13.5, wenn wir die Elemente von K mit denen von $K^{(1,1)}$ identifizieren; dann ist $M_{\{1\}}\big(f(x)\big) = \big(f(x)\big) = f(x)$. □

Anmerkung:

1.) Wir werden später (als Spezialfall von (13.10)) sehen, dass die Abbildung

$$\begin{cases} V^* \to K^{(1,n)} \\ \ f \mapsto M^B_{\{1\}}(f) = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \dots & \alpha_n \end{pmatrix} \end{cases}$$

im Falle endlicher Dimension n von V ein Vektorraum-Isomorphismus ist. Insbesondere gilt also im Endlich-Dimensionalen : $V^* \cong V$.

2.) Die Aussage $V^* \cong V$ gilt nicht für unendlich-dimensionale Vektorräume.

3.) Ein Beispiel einer Linearform eines unendlich-dimensionalen Vektorraums[47] ist die Abbildung $f : \mathcal{C}[0,1] \to \mathbb{R}$ mit $g \mapsto \int\limits_0^1 g(t)\,dt$.

13.7 Anwendung: Lineare Gleichung

Die lineare Gleichung (also das lineare Gleichungssystem mit einer Gleichung)

$$\alpha_1\xi_1 + \ldots + \alpha_n\xi_n = \beta$$

über K lässt sich mit Hilfe der einreihigen Koeffizientenmatrix $a = (\alpha_i)_{\{i\in\{1,\ldots,n\}}$ und den Vektoren $x = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_n \end{pmatrix} \in K^{(n,1)}$ bzw. $b = \begin{pmatrix} \beta \end{pmatrix} \in K^{(1,1)}$ folgendermaßen schreiben

[47] des Vektorraums der reellen stetigen Funktionen auf dem Intervall $[0,1]$

(vgl. §11):

$$\begin{pmatrix}\alpha_1 & \dots & \alpha_n\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}\xi_1 \\ \vdots \\ \xi_n\end{pmatrix} = (\beta) \quad \text{bzw.} \quad \boxed{a \cdot x = b \quad \text{bzw.} \quad f_a(x) = b}$$

Dabei ist f_a Linearform, also ein Element von V^*. Ist $a \neq 0$, so gilt für den Lösungsraum L von $f_a(x) = b$, dass $\dim L = \dim \operatorname{Kern} f_a = n - \operatorname{Rang} a = n - 1$ ist. **Der Lösungsraum einer linearen Gleichung ist daher Urbild eines Skalars unter einer Linearform** und als solcher (im Falle $\boldsymbol{a \neq 0}$) **eine Hyperebene in AG($\boldsymbol{K^n}$).**

Wir hatten zu Anfang dieses Paragraphen erwähnt, dass $\operatorname{Hom}_K(V, W)$ ein Vektorraum (mit der üblichen Addition und S-Multiplikation von Abbildungen) ist.
Auch $K^{(m,n)}$ ($= K^{I'}$ mit $I' = \{1, \dots, m\} \times \{1, \dots, n\}$) trägt eine Vektorraum-Struktur (s. §6 Bsp. b). Wir wiederholen die Definition der Addition und S-Multiplikation, spezialisiert auf Matrizen, und wenden uns danach der Frage zu, ob M_C^B linear ist.

13.8 Definition (Addition und S-Multiplikation bei Matrizen)

Spezialisierung von §**??** Bsp. b)
Seien $(\alpha_{ij})_{\substack{i\in\{1,\dots,m\}\\ j\in\{1,\dots,n\}}}$ und $(\beta_{ij})_{\substack{i\in\{1,\dots,m\}\\ j\in\{1,\dots,n\}}}$ $m \times n$-Matrizen über dem Körper K und $\lambda \in K$.

(a) <u>Addition</u> „+“ (komponentenweise)

$$(\alpha_{ij})_{\substack{i\in\{1,\dots,m\}\\ j\in\{1,\dots,n\}}} + (\beta_{ij})_{\substack{i\in\{1,\dots,m\}\\ j\in\{1,\dots,n\}}} := (\alpha_{ij} + \beta_{ij})_{\substack{i\in\{1,\dots,m\}\\ j\in\{1,\dots,n\}}},$$

also

$$\begin{pmatrix}\alpha_{11} & \dots & \alpha_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ \alpha_{m1} & \dots & \alpha_{mn}\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\beta_{11} & \dots & \beta_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ \beta_{m1} & \dots & \beta_{mn}\end{pmatrix} := \begin{pmatrix}\alpha_{11} + \beta_{11} & \dots & \alpha_{1n} + \beta_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ \alpha_{m1} + \beta_{m1} & \dots & \alpha_{mn} + \beta_{mn}\end{pmatrix}$$

(b) <u>S-Multiplikation</u> „$\underset{K}{\cdot}$“ (komponentenweise)

$$\lambda \cdot (\alpha_{ij})_{\substack{i\in\{1,\dots,m\}\\ j\in\{1,\dots,n\}}} := (\lambda\alpha_{ij})_{\substack{i\in\{1,\dots,m\}\\ j\in\{1,\dots,n\}}} =: (\alpha_{ij}) \cdot \lambda\ ,$$

also

$$\lambda \cdot \begin{pmatrix}\alpha_{11} & \dots & \alpha_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ \alpha_{m1} & \dots & \alpha_{mn}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\lambda\alpha_{11} & \dots & \lambda\alpha_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ \lambda\alpha_{m1} & \dots & \lambda\alpha_{mn}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\alpha_{11} & \dots & \alpha_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ \alpha_{m1} & \dots & \alpha_{mn}\end{pmatrix} \cdot \lambda\ .$$

13.9 Satz ($K^{(m,n)}$ als Vektorraum)

(i) $(K^{(m,n)}, +, \underset{K}{\cdot})$ ist ein K-Vektorraum.

(ii) Eine Basis von $K^{(m,n)}$ über K wird gebildet von den Matrizen

$$\begin{array}{ccccc}
\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & & \dots & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & & \dots & 0 \end{pmatrix}, & \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & & \dots & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & & \dots & 0 \end{pmatrix}, & \dots & , & \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & & \dots & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & & \dots & 0 \end{pmatrix}, \\
\vdots & & & & \vdots \\
\begin{pmatrix} 0 & & \dots & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & & \dots & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}, & \dots & , \begin{pmatrix} 0 & & \dots & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix}, & & \begin{pmatrix} 0 & & \dots & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.
\end{array}$$

Beweis. Übung ! Hinweis: Es gilt $K^{(m,n)} \cong K^{m \cdot n}$. □

Anmerkung.

(a) Die Summe zweier Matrizen über K ist nur definiert, wenn sie **vom gleichen Typ** sind, also gleiche Zeilenzahl und gleiche Spaltenzahl haben.

(b) Neutrales Element der Addition ist die „Nullmatrix“ $\begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$.

13.10 Satz (Matrizenzuordnung als Isomorphismus)

Seien V ein n-dimensionaler K-Vektorraum und W ein m-dimensionaler K-Vektorraum ($n, m \in \mathbb{N}$) mit (geordneter) Basis B bzw. C. Dann gilt

(a) $M_C^B(f+g) = M_C^B(f) + M_C^B(g)$ und $M_C^B(f \cdot \lambda) = M_C^B(f) \cdot \lambda$

für alle $f, g \in \mathrm{Hom}_K(V,W)$ und $\lambda \in K$, d.h. M_C^B ist **linear** und damit ein Vektorraumisomorphismus.

(b) $\boxed{\mathrm{Hom}_K(V,W) \cong K^{(m,n)}}$ (als Vektorräume).

Beweis. (a) Seien $f, g \in \mathrm{Hom}_K(V,W)$, $B = (b_1, \dots, b_n)$ und $C = (c_1, \dots, c_m)$, ferner seien $f(b_j) = \sum_{i=1}^m c_i \alpha_{ij}$ und $g(b_j) = \sum_{i=1}^m c_i \beta_{ij}$ (für $j \in \{1, \dots, n\}$), sowie $I := \{1, \dots, m\}$ und $J := \{1, \dots, n\}$.

Bezüglich der Basen B und C gilt dann mit $M := M_C^B$ definitionsgemäß

$$M(f) = (\alpha_{ij})_{\substack{i\in I\\ j\in J}} \text{ und } M(g) = (\beta_{ij})_{\substack{i\in I\\ j\in J}}.$$

Aus

$$(f+g)(b_j) = f(b_j) + g(b_j) = \sum_{i=1}^{m} c_i\alpha_{ij} + \sum_{i=1}^{m} c_i\beta_{ij} = \sum_{i=1}^{m} c_i(\alpha_{ij}+\beta_{ij})$$

und

$$(f\lambda)(b_j) = f(b_j)\lambda = \Big(\sum_{i=1}^{m} c_i\alpha_{ij}\Big)\lambda = \sum_{i=1}^{m} c_i(\alpha_{ij}\lambda)$$

ergibt sich

$$M(f+g) = \big(\alpha_{ij}+\beta_{ij}\big)_{\substack{i\in I\\ j\in J}} = \big(\alpha_{ij}\big)_{\substack{i\in I\\ j\in J}} + \big(\beta_{ij}\big)_{\substack{i\in I\\ j\in J}} = M(f) + M(g)$$

und

$$M(f\lambda) = \big(\alpha_{ij}\lambda\big)_{\substack{i\in I\\ j\in J}} = \big(\alpha_{ij}\big)_{\substack{i\in I\\ j\in J}} \cdot \lambda = M(f)\cdot\lambda.$$

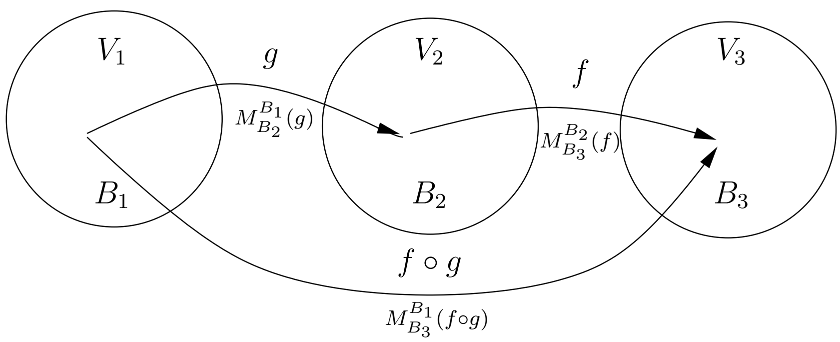
(b) Aus (a) und (13.3)(e) folgt, dass M_C^B ein Isomorphismus zwischen den Vektorräumen $(\mathrm{Hom}_K(V,W), +, \underset{K}{\cdot})$ und $(K^{(m,n)}, +, \underset{K}{\cdot})$ ist.

□

Der Isomorphismus M_C^B hängt, wie schon mehrfach betont, von den Basen B und C ab. Nach deren Festlegung kann man dann von den linearen Abbildungen zu den entsprechenden Matrizen übergehen (oder umgekehrt, vgl. 13.3(d)).

Eine weitere Verknüpfung von Homomorphismen müssen wir allerdings noch berücksichtigen: die Hintereinanderausführung (Verkettung).

Seien V_1, V_2 und V_3 K-Vektorräume mit (geordneter) Basis $B_1 = (b_1,\dots,b_n)$, $B_2 = (c_1,\dots,c_m)$ bzw. $B_3 = (d_1,\dots,d_r)$, ferner $g \in \mathrm{Hom}_K(V_1,V_2)$ und $f \in \mathrm{Hom}_K(V_2,V_3)$ sowie $M_{B_3}^{B_2}(f) = (\alpha_{ij})_{i=1,\dots,r,j=1,\dots,m}$ und $M_{B_2}^{B_1}(g) = (\beta_{jk})_{j=1,\dots,m,k=1,\dots,n}$. Es gilt also $f(c_j) = \sum^{r} d_i\alpha_{ij}$ und $g(b_k) = \sum^{m} c_j\beta_{jk}$. Wir wollen γ_{ik} mit $M_{B_3}^{B_1}(f\circ g) = (\gamma_{ik})_{i=1,\dots,r,k=1,\dots,n}$ bestimmen. (Vgl. Figur 13.4 !)



Figur 13.4: Venndiagramm zur Verkettung von linearen Abbildungen

$$\begin{aligned}
\text{Aus}\quad (f\circ g)(b_k) &\underset{\substack{\text{Def.}\\ f\circ g}}{=} f(g(b_k)) \underset{\substack{\text{Def.}\\ M(g)}}{=} f\Big(\sum_{j=1}^{m} c_j\beta_{jk}\Big)\\
&\underset{\substack{f\\ \text{linear}}}{=} \sum_{j=1}^{m} f(c_j)\beta_{jk} \underset{\substack{\text{Def.}\\ M(f)}}{=} \sum_{j=1}^{m}\Big(\sum_{i=1}^{r} d_i\alpha_{ij}\Big)\beta_{jk} = \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{m} d_i\alpha_{ij}\beta_{jk}\\
&= \sum_{i=1}^{r}\Big(d_i \underbrace{\sum_{j=1}^{m}\alpha_{ij}\beta_{jk}}_{\gamma_{ik}}\Big) \qquad (k=1,\dots,n)
\end{aligned}$$

ergibt sich $\gamma_{ik} = \sum_{j=1}^{m} \alpha_{ij}\beta_{jk}$ (für $i\in\{1,\dots,r\}$, $k\in\{1,\dots,n\}$).
Demgemäß definieren wir das Produkt zweier Matrizen:

13.11 Definition (Matrizenmultiplikation)

Sind $(\alpha_{ij})_{\substack{i\in\{1,\dots,r\}\\ j\in\{1,\dots,m\}}} \in K^{(r,\underline{\underline{m}})}$ und $(\beta_{jk})_{\substack{j\in\{1,\dots,m\}\\ k\in\{1,\dots,n\}}} \in K^{(\underline{\underline{m}},n)}$, so definieren wir:

$$\boxed{(\alpha_{ij})_{\substack{i\in\{1,\dots,r\}\\ j\in\{1,\dots,m\}}} \cdot (\beta_{jk})_{\substack{j\in\{1,\dots,m\}\\ k\in\{1,\dots,n\}}} := \Big(\sum_{j=1}^{m}\alpha_{ij}\beta_{jk}\Big)_{\substack{i\in\{1,\dots,r\}\\ k\in\{1,\dots,n\}}} \in K^{(r,n)}}$$

Schematisch:

$$\begin{array}{ccc}
 & & \begin{array}{c} k\text{-te}\\ \text{Spalte}\end{array}\\
 & & \left(\begin{array}{c|c|c} \beta_{11}\dots & \beta_{1k} & \dots\beta_{1n}\\ \vdots & & \vdots\\ \beta_{m1}\dots & \beta_{mk} & \dots\beta_{mn}\end{array}\right)\\
\begin{array}{c} i\text{-te}\\ \text{Zeile}\end{array} & \left(\begin{array}{ccc} \alpha_{11} & \dots & \alpha_{1m}\\ \vdots & & \vdots\\ \hline \alpha_{i1} & \dots & \alpha_{im}\\ \hline \vdots & & \vdots\\ \alpha_{r1} & \dots & \alpha_{rm}\end{array}\right) & \left(\begin{array}{c|c|c} & \downarrow & \\ \vdots & & \vdots\\ \hline \rightarrow & \gamma_{ik} & \\ \hline \vdots & & \vdots\\ & & \end{array}\right)
\end{array}
\quad \text{mit } \gamma_{ik} = \sum_{j=1}^{m}\alpha_{ij}\beta_{jk}$$

Insbesondere: $\begin{pmatrix} \alpha_1 & \dots & \alpha_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_1\\ \vdots\\ \beta_m \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i\beta_i$.

Anmerkung. 1.) Die Matrizenmultiplikation ist nach dieser Definition nur ausführbar, wenn die **Spaltenzahl des ersten Faktors gleich der Zeilenzahl des zweiten** ist. – Entsprechend müssen ja bei der Komposition linearer Abbildungen der Wertebereich der zuerst angewandten Abbildung mit dem Definitionsbereich der zweiten übereinstimmen.

2.) Besteht (β_{ik}) nur aus einem Spaltenvektor (d.h. $k = 1$), so geht die Definition 13.11 über in die Definition der Multiplikation einer Matrix mit einem Spaltenvektor aus §10.

Beispiel:

Für $K = \mathbb{Q}$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \in \mathbb{Q}^{(2,3)}$ und $B = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 3 & 0 \\ 3 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{Q}^{(3,4)}$ gilt:

$$\begin{aligned} A \cdot B &= \begin{pmatrix} 1\cdot 2+2\cdot 3+3\cdot 0 & 1\cdot(-3)+2(-1)+3\cdot 1 & 1\cdot 3+2\cdot 2+3\cdot 0 & 1\cdot 0+2\cdot 0+3\cdot 1 \\ 4\cdot 2+5\cdot 3+6\cdot 0 & 4(-3)+5(-1)+6\cdot 1 & 4\cdot 3+5\cdot 2+6\cdot 0 & 4\cdot 0+5\cdot 0+6\cdot 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 8 & -2 & 7 & 3 \\ 23 & -11 & 22 & 6 \end{pmatrix} \in \mathbb{Q}^{(2,4)}. \end{aligned}$$

Gemäß der Überlegung, die zu Definition 13.11 führten, können wir festhalten:

13.12 Satz (Matrix eines Produkts von linearen Abbildungen)

Sind V_i $(i = 1, 2, 3)$ endlich-dimensionale K-Vektorräume mit (geordneten) Basen B_i, und sind $g \in \mathrm{Hom}_K(V_1, V_2)$, $f \in \mathrm{Hom}_K(V_2, V_3)$, dann gilt:

$$\boxed{M_{B_3}^{B_1}(f \circ g) = M_{B_3}^{B_2}(f) \cdot M_{B_2}^{B_1}(g)}.$$

Der Komposition der Abbildungen entspricht die Multiplikation der darstellenden Matrizen.

Beispiel. Seien $K = \mathbb{R}$, $V_i = \mathbb{R}^2$, $B_i = (e_1, e_2) =: B$ (für $i = 1, 2, 3$), ferner
$f = D_\alpha$ die "Drehung um $\mathfrak{o}$ um den Winkel vom Maß α" und
g die "Spiegelung an der $x-$Achse" (s. Figur 13.5 !)
Nach Beispiel (b)(iii) aus 13.3 ist f linear und es gilt:

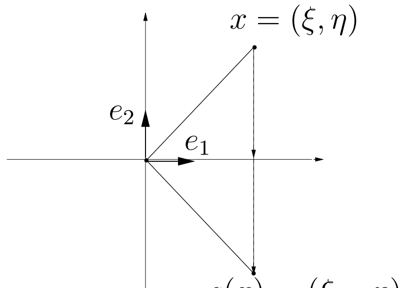
$$M_B^B(D_\alpha) = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}.$$

Für g erhalten wir folgende Beschreibung:

$$g((\xi_1, \xi_2)) = (\xi_1, -\xi_2) = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ -\xi_2 \end{pmatrix}_B .$$

Also ist auch g linear und es gilt

$$M_B^B(g) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} .$$



Figur 13.5
Zur Spiegelung an der $x-$Achse

Für die Verknüpfung $D_\alpha \circ g$ folgt:

$$M_B^B(D_\alpha \circ g) = M_B^B(D_\alpha) \cdot M_B^B(g) = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin\alpha & -\cos\alpha \end{pmatrix},$$

für $g \circ D_\alpha$ hingegen:

$$M_B^B(g \circ D_\alpha) = M_B^B(g) \cdot M_B^B(D_\alpha) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ -\sin\alpha & -\cos\alpha \end{pmatrix}.$$

Dass D_α und g i.A. nicht vertauschbar sind, findet eine Entsprechung darin, dass $M(D_\alpha)$ und $M(g)$ i.A. nicht kommutieren, nämlich für $\alpha \notin \pi\mathbb{Z}$.

Die Matrizen–Multiplikation ist also i.A. nicht kommutativ.

Als Eigenschaft der Verknüpfung quadratischer Matrizen (also von $(m \times n)-$Matrizen mit $m = n$) erwähnen wir:

13.13 Satz (Ring der $n \times n$ Matrizen)

(a) Für jeden Körper K und jedes $n \in \mathbb{N}$ ist $(K^{(n,n)}, +, \cdot)$ ein Ring, der **Ring der quadratischen $n-$reihigen Matrizen über K.**.

(b) Ist V ein K-Vektorraum der Dimension n mit $n \in \mathbb{N}$, so gilt:

$$\boxed{(\mathrm{End}_K(V), +, \circ) := (\mathrm{Hom}_K(V,V), +. \circ) \cong (K^{(n,n)}, +, \cdot)}$$

Beweis-Andeutung. $\mathrm{End}_K V$ ist ein Ring, wie man durch Nachprüfen der Ring-Axiome feststellt. Für eine Basis B ist die Abbildung

$$M_B^B : \begin{cases} \mathrm{Hom}_K(V,V) & \to & K^{(n,n)} \\ f & \mapsto & M_B^B(f) \end{cases}$$

ein Ring-Isomorphismus. □

13.14 Anmerkung (K-Algebra)

$K^{(n,n)}$ und $\mathrm{End}_K V$ tragen sowohl Vektorraum- als auch Ring-Struktur. Allgemein heißt $(V, +, \underset{K}{\cdot}, \cdot)$ eine **K–Algebra**, wenn $(V, +, \underset{K}{\cdot})$ ein $K-$Vektorraum und $(V, +, \cdot)$ ein Ring ist und folgende Verträglichkeitsbedingung gilt:

$$\forall a, b \in V \quad \forall \lambda \in K : \quad (a \cdot b) \underset{K}{\cdot} \lambda = (a \underset{K}{\cdot} \lambda) \cdot b = a \cdot (b \underset{K}{\cdot} \lambda) \quad .$$

Nach den Sätzen 13.9, 13.10 und 13.13 sowie durch Nachprüfen der erwähnten Verträglichkeitsbedingung erhält man:

($\mathrm{End}_K(V), +, \underset{K}{\cdot}, \circ$) und $(K^{(n,n)}, +, \underset{K}{\cdot}, \cdot)$ sind $K-$Algebren und als solche isomorph.

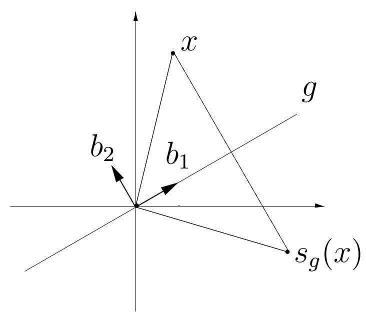
Die Abbildung M_B^B ist dabei ein **bijektiver$\boldsymbol{K}-$Algebren-Homomorphismus**, d.h. sowohl Ring- als auch Vektorraum-Homomorphismus, also vertäglich mit den Operationen "$+$","$\underset{K}{\cdot}$" und "$\circ$" sowie "$\cdot$".

Weitere Beispiele von Algebren:

$\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ mit den üblichen Verknüpfungen sind $\mathbb{Q}-$Algebren.
$\mathbb{R}, \mathbb{C}$ mit den üblichen Verknüpfungen sind $\mathbb{R}-$Algebren.
Ebenso bilden die Polynomabbildungen von K eine $K-$Algebra (bzgl. $+, \underset{K}{\cdot}, \cdot$).
Auch die Menge $\mathcal{C}[0,1]$ der auf dem Intervall $[0,1]$ stetigen reellen Funktionen ist eine $\mathbb{R}-$ Algebra (bzgl. $+, \underset{\mathbb{R}}{\cdot}, \cdot$).

Übungsaufgaben

A 13.1 Führen Sie den Beweis von Satz 13.2 aus!
A 13.2 In der reellen euklidischen Ebene sei s_g die Geradenspiegelung an einer Nullpunktsgeraden g (s. Figur 13.6 !). Zeigen Sie, dass s_g linear ist.
Lösungshilfe: Wählen Sie eine Basis $B = (b_1, b_2)$ wie in Figur 13.6 angedeutet! x habe die Darstellung $x = b_1\xi + b_2\eta$; welche Linearkombination beschreibt dann $s_g(x)$?



Figur 13.6: Zur Spiegelung an einer Nullpunktsgeraden