12 Lineare Ungleichungen und Optimierung

M ↓

In diesem Paragraphen behandeln wir[44] die für Anwendungen u.a. in Wirtschaftswissenschaft und Soziologie sehr wichtigen Systeme linearer Ungleichungen und damit zusammenhängende Maximum- und Minimumprobleme.
Zur Einleitung betrachten wir folgendes **Beispiel** (s. Aigner, l.c. Seite 5): Ein Schnapsbrenner stellt zwei Schnäpse S_1, S_2 her. Neben Alkohol, Zucker und Wasser verwendet er zwei Zusätze Z_1, Z_2. Er will nun einen Produktionsplan aufstellen, der ihm einen maximalen Gewinn garantiert. Dabei hat er folgende Rahmenbedingungen zu beachten:

Anteil	S_1	S_2	Vorrat (in l)
Alkohol	0,4	0,25	30
Zucker	0,2	0,3	25
Z_1	0,15	0	10
Z_2	0	0,3	20
Wasser	0,25	0,15	100

Gewinn pro Liter:
S_1: 7
S_2: 3
(in Währungseinheiten)

Umformulierung: Sei ξ_i die zu produzierende Literzahl von S_i ($i \in \{1,2\}$). Dann müssen folgende Ungleichungen erfüllt sein:

$$0,4\ \xi_1 + 0,25\xi_2 \leq 30 \tag{1}$$
$$0,2\ \xi_1 + 0,3\ \xi_2 \leq 25 \tag{2}$$
$$0,15\xi_1 \leq 10 \tag{3}$$
$$0,3\ \xi_2 \leq 20 \tag{4}$$
$$0,25\xi_1 + 0,15\xi_2 \leq 100 \tag{5}$$

sowie

$$\xi_1 \geq 0 \tag{6}$$

und

$$\xi_2 \geq 0. \tag{7}$$

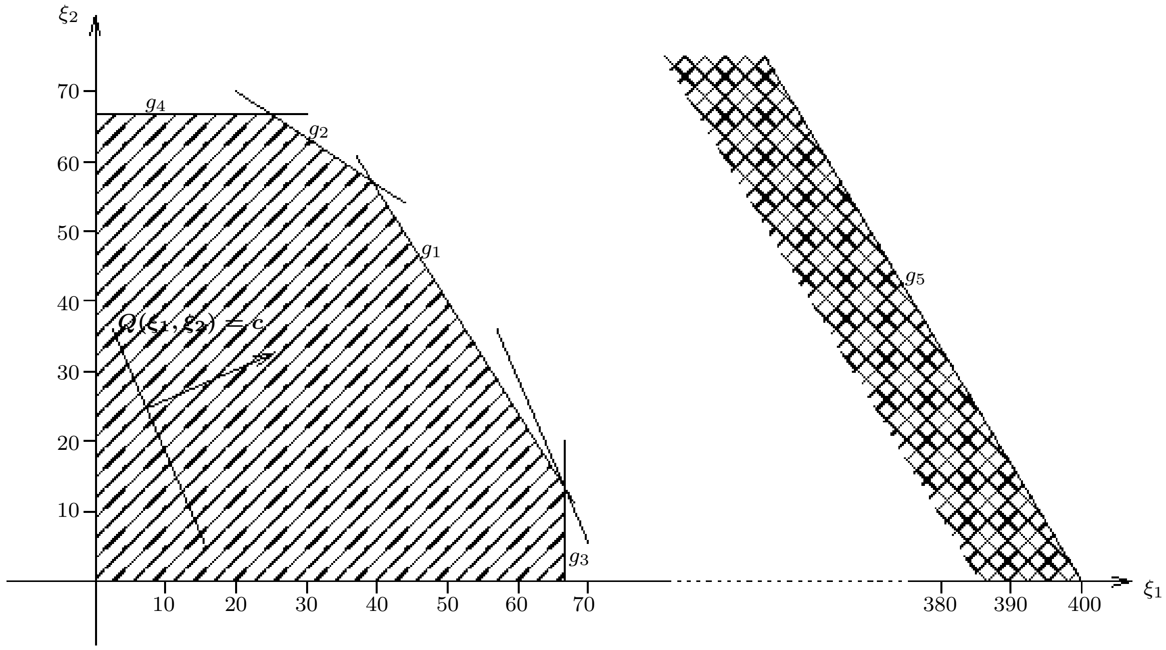
Zu maximieren ist

$$Q(\xi_1, \xi_2) = 7\,\xi_1 + 3\,\xi_2. \tag{8}$$

In diesem einfachen Fall (nur zwei Variablen) ist eine graphische Lösung möglich (s. Figur 12.1;); dabei beachtet man, dass $\alpha\xi_1 + \beta\xi_2 = \gamma$ (für $(\alpha, \beta) \neq (0,0)$) eine Gerade in der reellen Ebene darstellt und $\alpha\xi_1 + \beta\xi_2 \leq \gamma$ eine „Halbebene“.

Der schraffierte Teil in der Figur 12.1 ist der Bereich der „**zulässigen Lösungen**“, also solcher Lösungen, für die die Ungleichungen (1) – (7) erfüllt sind. Dabei bezeichnet g_i die Randgerade des Gebiets, das durch Ungleichung (i) beschrieben wird; (das zu (5) gehörende Gebiet umfasst den schraffierten übrigen Teil). Jede Parallelverschiebung der Geraden mit der Gleichung $Q(\xi_1, \xi_2) = 7\xi_1 + 3\xi_2 = c_1$ in Pfeilrichtung führt zu einer Geraden der Gleichung $7\xi_1 + 3\xi_2 = c_2$ mit $c_2 \geq c_1$. Wie sich aus der Zeichnung ablesen lässt, hat unser Maximierungsproblem die eindeutige optimale Lösung $(\tilde{\xi_1}, \tilde{\xi_2}) = g_1 \cap g_3$,

[44] unter Beachtung der folgenden Quellen:
- Aigner, M.: Angewandte Mathematik, Vorlesungsskript FU 1979
- Schwarz, H. u.a.: Grundkurs Mathematik III 2, DIFF, Tübingen 1975
- Guber, S.: Lineare Algebra und Analytische Geometrie, I §15



Figur 12.1: Beispiel einer linearen Optimierung

die sich zu $\tilde{\xi}_1 = \frac{10}{0{,}15} = 66{,}\overline{6}$ und $\tilde{\xi}_2 = \frac{30-0{,}4\tilde{\xi}_1}{0{,}25} = 13{,}\overline{3}$ berechnet. Bei der Produktion von 66, 6 l Schnaps S_1 und 13, 3 l Schnaps S_2 wird der optimale Gewinn von $7 \cdot 66{,}6 + 3 \cdot 13{,}3$, d.h. rund 506 Währungseinheiten, erreicht.

↑ M Wir wollen im Folgenden zunächst lineare Ungleichungen betrachten; in diesem Zusammenhang definieren wir, was wir unter einem Halbraum verstehen wollen, und weisen eine seiner wichtigen Eigenschaften nach.

12.1 Definition: Lineare Ungleichung; Lösungshalbraum

(a) Seien $n \in \mathbb{N}$ und $\lambda_1, \ldots, \lambda_n, \alpha \in \mathbb{R}$. Dann heißt

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \xi_i \leq \alpha \qquad \Big(\text{bzw. } \sum_{i=1}^{n} \mu_i \xi_i \geq \beta \text{ für } \mu_i = -\lambda_i,\ \beta = -\alpha\Big) \qquad (*)$$

eine **lineare Ungleichung**; die Lösungsmenge

$$H = \{(\xi_1, \ldots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n | \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \xi_i \leq \alpha\} = \{(\xi_1, \ldots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n | \sum_{i=1}^{n} (-\lambda_i)\xi_i \geq (-\alpha)\}$$

heißt **(Lösungs-) Halbraum** (von $(*)$).

(b) Verallgemeinerung:

Ist V $\mathbb{R}$-Vektorraum und $f : V \to \mathbb{R}$ linear, z.B. $f : x = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_n \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \lambda_1 & \ldots & \lambda_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_n \end{pmatrix}$

und $\alpha \in \mathbb{R}$, dann heißt

$$f(x) \leq \alpha \qquad (*')$$

eine **lineare Ungleichung** und $H = \{x \in V | f(x) \leq \alpha\}$ **Lösungshalbraum** zu $(*')$.

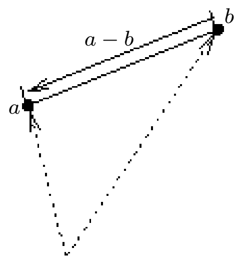
Anschaulich ist klar, wie ein Halbraum bei Dimension 2 (Halbebene) oder 3 aussieht. Wir zeigen nun allgemein, dass mit zwei Punkten eines Halbraums H auch die **Verbindungsstrecke** zu H gehört:

12.2 Definition: Verbindungsstrecke

Seien V ein $\mathbb{R}$-Vektorraum und $a, b \in V$. Dann heißt

$$\begin{aligned}[a, b] :=& \{a\lambda + b(1-\lambda) \mid \lambda \in [0,1] \subseteq \mathbb{R}\} \\ =& \{b + (a-b)\lambda \mid 0 \leq \lambda \leq 1\} \\ =& \{a\lambda + b\mu \mid \lambda, \mu \geq 0, \lambda + \mu = 1\}\end{aligned}$$

Verbindungsstrecke von a und b.

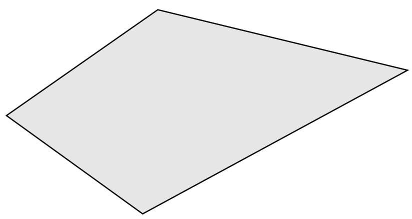


Figur 12.2:
Differenz der Ortsvektoren a und b und die Strecke $[a, b]$

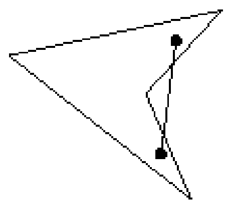
12.3 Definition: konvex

Sei V ein $\mathbb{R}$-Vektorraum und $A \subseteq V$. Dann heißt A **konvex**, falls gilt

$$\forall a, b \in A : [a, b] \subseteq A.$$



Figur 12.3: Konvexe Menge im $\mathbb{R}^2$
(z.B. Grundriss eines Museumsraums)



Figur 12.4: Nicht konvexe Menge in $\mathbb{R}^2$
(dto. mit schlechter Übersicht für den Museumswärter)

Beispiele.

(1) Jede lineare Mannigfaltigkeit in V, insbesondere jeder Lösungsraum eines linearen Gleichungssystems, ist konvex:
Seinen $L = v + U$ und $a, b \in L$, also $a = v + u_1$ und $b = v + u_2$ mit $u_1, u_2 \in U$; dann folgt $a \in b + U = L$ (bzw. $a - b \in U$) und für $x \in [a, b]$ damit $x = b + (a-b)\lambda \in b + U = L$ für ein geeignetes $\lambda \in \mathbb{R}$.

(2) Jedes Intervall von $\mathbb{R}$ ist eine konvexe Teilmenge von $\mathbb{R}$.

(3) Der Durchschnitt konvexer Mengen ist wieder konvex.

12.4 Satz (Konvexität des Lösungshalbraums)

Der Lösungshalbraum einer linearen Ungleichung ist konvex.

Beweis. Seien $f : V \to \mathbb{R}$ linear und $H = \{x \in V \mid f(x) \leq \alpha\}$ mit $\alpha \in \mathbb{R}$; seien ferner a und b Elemente von H. Dann gilt

$$f(a) \leq \alpha \quad \text{und} \quad f(b) \leq \alpha.$$

Nach (12.3) ist $[a, b] \subseteq H$ zu zeigen. Sei also $x \in [a, b]$; dann existiert ein $\lambda \in [0, 1]$ mit $x = a\lambda + b(1 - \lambda)$; es folgt

$$f(x) = f(a\lambda + b(1 - \lambda)) \underset{f \text{ linear}}{=} f(a)\lambda + f(b)(1 - \lambda) \underset{\substack{\lambda \geq 0 \\ 1-\lambda \geq 0}}{\leq} \alpha\lambda + \alpha(1 - \lambda) = \alpha$$

und daraus $x \in H$. □

Da der Durchschnitt konvexer Mengen wieder konvex ist, gilt

12.5 Korollar (Konvexität der Lösungsmenge)

Die Menge der Lösungen eines Systems linearer Ungleichungen

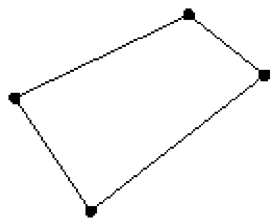
$$\begin{cases} f_1(x) \leq \alpha_1 \\ \vdots \\ f_m(x) \leq \alpha_m \end{cases}$$

(mit $f_i : V \to \mathbb{R}$ linear und $\alpha_i \in \mathbb{R}$ für $i \in \{1, \ldots, m\}$) ist konvex.

12.6 Definition: Extremalpunkt

Sei A eine konvexe Teilmenge des $\mathbb{R}$-Vektorraums V. Dann heißt $x \in A$ **Ecke** (oder **Extremalpunkt**) von A, falls x nicht im Inneren einer ganz in A enthaltenen Strecke liegt, d.h. falls gilt:

$$\forall a, b \in A : (x \in [a, b] \Rightarrow x = a \vee x = b).$$

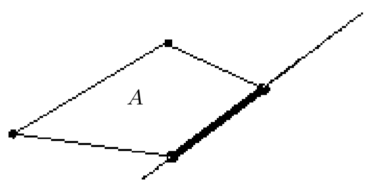


Figur 12.5: Extremalpunkte

Folgender Satz besagt: Nimmt eine lineare Abbildung $f : V \to \mathbb{R}$ auf einer konvexen Menge A ihr Maximum α an, und bezeichnet

$$A_{\text{opt}} := \{x \in A | f(x) = \alpha\}$$

die Menge der „**optimalen Punkte**" von A, dann ist jeder Extremalpunkt von A_{opt} auch Extremalpunkt von A.



Figur 12.6: Die Menge A_{opt}

12.7 Satz (Eckpunkte der Menge optimaler Punkte)

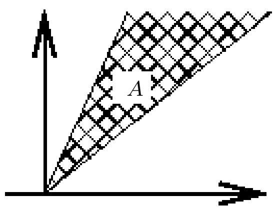
> Seien V ein $\mathbb{R}$-Vektorraum, A konvexe Teilmenge von V und $f : V \to \mathbb{R}$ linear; weiter existiere ein $x_0 \in A$ mit
>
> $$\forall x \in A : f(x) \leq f(x_0) =: \alpha.$$
>
> Dann gilt:
> Jeder Eckpunkt von $A_{\text{opt}} = \{x \in A | f(x) = \alpha\}$ ist ein Eckpunkt von A.

Beweis.

(i) $f^{-}(a) := \{x \in V | f(x) = \alpha\}$ ist für $f \neq 0$ (oder für $f = 0$ und $\alpha = f(x_0) = 0$) eine lineare Mannigfaltigkeit und als solche konvex (vgl. Bsp. 1 zu 12.3). Daher ist auch $A_{\text{opt}} = A \cap \{x \in V | f(x) = \alpha\}$ konvex (vgl. Bsp. 3 zu 12.3).

(ii) Sei y Eckpunkt von A_{opt} Wir nehmen an, y sei kein Eckpunkt von A. Es ist aber $y \in A$; verbindet man y mit einem weiteren Punkt von A, so sieht man: es existieren $a, b \in A$ und $\lambda \in (0, 1)$ mit $y = a\lambda + b(1-\lambda))$. Da y Eckpunkt von $A_{\text{opt}} = \{x | f(x) = \alpha\}$ ist, gilt $f(a) \neq \alpha$ oder $f(b) \neq \alpha$; andernfalls wäre $f(a) = f(b) = \alpha \wedge a, b \in A$, also $a, b \in A_{\text{opt}}$, damit wegen der Konvexität auch $[a, b] \subseteq A_{\text{opt}}$; es wäre dann y innerer Punkt von A_{opt} und nicht Eckpunkt. Also gilt: $f(a) < \alpha$ oder $f(b) < \alpha$. Damit ergibt sich
$f(y) = f(a\lambda + b(1-\lambda)) = f(a)\lambda + f(b)(1-\lambda) \underset{\substack{\lambda>0 \\ 1-\lambda>0}}{<} \alpha\lambda + \alpha(1-\lambda) = \alpha$, also $y \notin A_{\text{opt}}$, ein Widerspruch.

□

Anmerkung. Ein x_0 der im Satz 12.7 angegebenen Eigenschaften braucht nicht zu existieren.
Andeutung eines Beispiels:  und f geeignet.

Es ist also richtig, **optimale Lösungen** (falls vorhanden) **einer linearen Optimierungsaufgabe**

$$\begin{cases} f_1(x) \leq \alpha_1 \\ \vdots \\ f_m(x) \leq \alpha_m \\ f_0(x) \text{ maximal} \end{cases} \qquad (\text{mit } f_0, f_1, \ldots, f_m : V \to \mathbb{R} \text{ linear}, \alpha_1, \ldots, \alpha_m \in \mathbb{R})$$

unter den Ecken der (konvexen) Lösungsmenge des Systems linearer Ungleichungen

$$\begin{cases} f_1(x) \leq \alpha_1 \\ \vdots \\ f_m(x) \leq \alpha_m \end{cases}$$

zu suchen.

Bei zwei Variablen kann diese Suche graphisch geschehen (vgl. einleitendes Beispiel); für komplizierte Probleme gibt es Algorithmen zur rechnerischen Bestimmung, z.B. das **Simplexverfahren**, das – geometrisch interpretiert – im gezielten Durchlaufen von „Kanten“ des „Polyeders“ der Lösungen bis zum Erreichen einer „optimalen Ecke“ besteht (s. z.B. Aigner l.c. oder DIFF Studienbrief).