KAP. VIII Noch etwas Geometrie

§ 35 Isometrische Hauptachsentransformation von quadratischen Formen

M ↓

In der Schulgeometrie tritt u.a. folgendes Problem auf: Ist $P=(\xi,\eta)$ Punkt der reellen Ebene und

$$g((\xi,\eta))=\alpha\xi^2+\beta\xi\eta+\gamma\eta^2+\kappa\xi+\lambda\eta+\mu,$$

so stellt die Menge

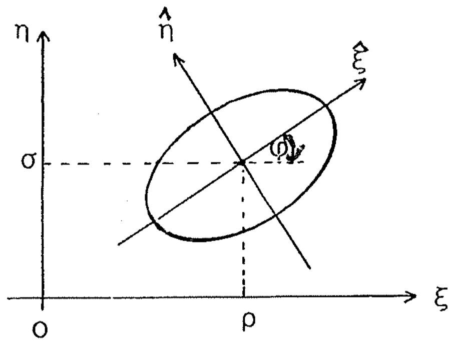
$$M=\{(\xi,\eta)\in\mathbb{R}^2\ |g((\xi,\eta))=0\}$$

unter geeigneten Voraussetzungen über $\alpha,\beta,\gamma,\kappa,\lambda,\mu$ eine Kreis, eine Ellipse eine Hyperbel, eine Parabel dar.

Um den Typ des Kegelschnitts M zu erkennen, ist es zweckmäßig, ein neues Koordinatensystem in "Hauptachsenrichtung" von M einzuführen. Das neue $(\hat\xi,\hat\eta)$-Koordinatensystem soll aus dem alten (ξ,η)-Koordinatensystem durch eine Drehung und Translation hervorgehen:

$$\xi=\hat\xi\cos\varphi-\hat\eta\sin\varphi+\rho$$
$$\eta=\hat\xi\sin\varphi+\hat\eta\cos\varphi+\sigma$$

(Dabei bleiben Längen und Maße von Winkeln unverändert).



Bezüglich der neuen Koordinaten hat die Gleichung $g(\xi,\eta)=0$ dann eine der beiden Normalformen

$$\hat\alpha\,\hat\xi^2+\hat\gamma\,\hat\eta^2+\hat\mu=0$$

oder

$$\hat\alpha\,\hat\xi^2+\hat\eta=0$$

aus denen der Typus von M sofort abzulesen ist.

Da die linearen Glieder durch "quadratischer Ergänzung" (s.u.) "beseitigt" werden können, beschränken wir uns bei der Verallgemeinerung zunächst auf den "quadratischen Teil" von g:

$$\alpha\,\xi^2+\beta\xi\eta+\gamma\,\eta^2=(\xi\ \eta)\begin{pmatrix}\alpha & \frac{\beta}{2}\\ \frac{\beta}{2} & \gamma\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\xi\\ \eta\end{pmatrix}$$

↑ M

(36.1) Definition

Sei V $\mathbb{R}$-VR und $Q\in \mathrm{Abb}(V,\mathbb{R})$

Q heißt <u>quadratische Form</u>, wenn es eine Bilinearform ψ auf V gibt mit $Q(v)=\psi(v,v)$ für alle $v\in V$.

(35.2) Koordinatendarstellung

Sei V n-dim $\mathbb{R}$-VR und Q quadratische Form auf V. Dann kann Q bzgl. einer Basis B von V durch

$$Q(x) = \mathfrak{x}^T A\, \mathfrak{x} \quad \text{für} \quad \mathfrak{x} = M_B(x)$$

mit symmetrischer Matrix $A \in \mathbb{R}^{(n,n)}$ dargestellt werden.

Beweis:

Es ist $Q(x) = \psi(x,x) = \mathfrak{x}^T M_B(\psi)\,\mathfrak{x} = \mathfrak{x}^T \hat{A}\, \mathfrak{x}$ (vgl. 30.4)

Ist $\hat{A} := M_B(\psi)$ nicht symmetrisch, so ersetzen wir $\hat{A}$ durch $A := \frac{1}{2}(\hat{A} + \hat{A}^T)$:

Es gilt

$$\mathfrak{x}^T A\, \mathfrak{x} = \mathfrak{x}^T \cdot \frac{1}{2}(\hat{A} + \hat{A}^T)\mathfrak{x} = \frac{1}{2}(\mathfrak{x}^T \hat{A}\, \mathfrak{x} + \mathfrak{x}^T \hat{A}^T \mathfrak{x}) =$$

$$\frac{1}{2}(\mathfrak{x}^T \hat{A}\, \mathfrak{x} + (\mathfrak{x}^T \hat{A}\, \mathfrak{x})^T) = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot (\mathfrak{x}^T \hat{A}\, \mathfrak{x}) = \mathfrak{x}^T \hat{A}\, \mathfrak{x}$$

und $$A^T = \frac{1}{2}(\hat{A} + \hat{A}^T)^T = A.$$

□

Beispiele

(a) $Q((\xi,\eta)) := 8\xi^2 + 8\xi\eta + 2\eta^2 = (\xi\ \eta)\begin{pmatrix} 8 & 8 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} = (\xi\ \eta)\begin{pmatrix} 8 & 4 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}$

(b) $Q((\xi_1,\ldots,\xi_n)) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \xi_i^2 = (\xi_1,\ldots,\xi_n)\begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_n \end{pmatrix}$

Wir betrachten nun die Wirkung eines Basiswechsels auf eine zu Q gehörende Bilinearform:

(35.3) Koordinatentransformation

Sei ψ Bilinearform des endlich-dim $\mathbb{R}$ VR's V; seien B und C Basen von V; dann gilt mit $S := M_B^C(id_V)$ für die ψ darstellenden Fundamentalmatrizen:

$$M_C(\psi) = S^T M_B(\psi)\, S$$

Beweis: Für alle $x, y \in V$ gilt:

$$\psi(x,y) \underset{(30.4)}{=} M_B(x)^T\, M_B(\psi) M_B(y) =$$

$$= [M_B^C(id_V) M_C(x)]^T\, M_B(\psi)\, [M_B^C(id_V) M_C(y)] =$$

$$= M_C(x)^T \left(S^T M_B(\psi)\, S\right) M_C(y)\ .$$

□

M Sei nun (V,Φ) endlich-dimensionaler euklidischer Raum, Q quadratische Form mit Bilinearform ψ und $A := M_B(\psi)$ die Q bzgl. einer ON-Basis B von V darstellenden symmetrische Matrix. Wir suchen dann eine Basis C von V derart, daß (mit $S = M_B^C(id_V)$) die Matrix $\hat{A} = S^T AS = M_C(\psi)$ Diagonalgestalt hat. Die Abbildung id_V ist natürlich eine lineare Isometrie von (V,Φ) auf (V,Φ). Wählt man nun auch C als ON-Basis, so folgt aus (34.6) die Bedingung $S^T = S^{-1}$, so dass dann A und $\hat{A} = S^T AS = S^{-1}AS$ ähnlich sind; diese Matrizen lassen sich auch interpretieren als Matrizen, die ein und denselben Endomorphismus f von V bzgl. der verschiedenen Basen B und C darstellen. S ist dabei ebenfalls Matrix des Basiswechsels: $S = M_B^C(id_V)$. Damit ist das Problem zurückgeführt auf das der
M Diagonalisierbarkeit von f unter der Nebenbedingung $S^{-1} = S^T$.

Für die Abbildung $f : V \longrightarrow V$ mit $M_B^B(f) = A = A^T$ folgt nun wegen $M_B(\Phi) = E_n$ und $A = A^T$ sofort

$$\Phi(f(x),y) = (Ax)^T E_n y = x^T A^T y = x^T A y = \Phi(x,f(y)) \text{ für alle } x,y \in V.$$

(35.4) Definition

Sei f Endomorphimus des endlich-dimensionalen Prähilbertraumes (V,Φ); so heißt f selbstadjungiert (bgzl. Φ) (hermitesch), wenn für alle $x,y \in V$ gilt

$$\Phi(f(x),y) = \Phi(x,f(y)).$$

(35.5) **Satz**

Seien (V,Φ) ein endlich-dimensionaler Prähilbertraum und $f \in \mathrm{End}_{\mathbb{K}}(V)$.
Dann sind äquivalent:

(1) f ist selbstadjungiert.

(2) $M_B^B(f)$ ist hermitesch für eine beliebige Orthonormalbasis B von V.

(3) (V,Φ) besitzt eine Orthonormalbasis aus Eigenvektoren von f, und alle Eigenwerte von f sind reell.

Anmerkung

Aus (35.5) folgt u.a., dass zu jeder symmetrischen reellen Matrix eine ON-Basis von Eigenvektoren existiert. Insbesondere sind solche Matrizen diagonalähnlich. (Entsprechendes gilt für hermitesche komplexe Matrizen.)

Beweis von 35.5

"(1) $\Leftrightarrow$ (2)" Ist $B = (b_1, \ldots, b_n)$ Orthonormalbasis von (V, Φ), so gilt $\Phi(x, y) = \vec{x}^T \overline{\vec{y}}$ für $\vec{x} = M_B(x)$ und $\vec{y} = M_B(y)$. Mit $A := M_B^B(f)$ erhält man:

$$\vec{x}^T A^T \overline{\vec{y}} = (A\vec{x})^T \overline{\vec{y}} = \vec{f(x)}^T \overline{\vec{y}} = \Phi(f(x), y)$$

und

$$\Phi(x, f(y)) = \vec{x}^T \overline{\vec{f(y)}} = \vec{x}^T \overline{A}\ \overline{\vec{y}}.$$

für alle $x, y \in V$, inbesondere für $x = b_i, y = b_j$, also für $\vec{x} = e_i$ und $\vec{y} = e_j$ mit den Einheitsvektoren e_i, e_j $(i, j = 1, \ldots, n)$. Ist f selbstadjungiert, so ergibt sich die Gleichheit der Einträge von A^T und $\overline{A}$. Umgekehrt folgt aus $A = \overline{A}^T$, dass f selbstadjunguiert ist.

"(2) $\Rightarrow$ (3)" Nach (28.9) besitzt eine hermitesche Matrix (und damit eine selbstadjungierte Abbildung) Eigenwerte, und diese sind alle reell.
Die Existenz einer orthogonalen Eigenbasis zeigen wir mittels vollständiger Induktion nach $n = \dim V$. Für $n = 1$ ist die Behauptung wegen der Existenz eines Eigenvektors klar. Sie sei richtig für $n - 1$.
Sei $c_1 \in V$ mit $f(c_1) = \lambda_1 c_1$ und $\lambda_1 \in \mathbb{R}$ einer der existierenden Eigenvektoren von f. Nach (32.13) gibt es zu jedem endlich-dimensionalen Unterraum eines Prähilbertraums ein orthogonales Komplement; sei also $V = < c_1 > \oplus W$ mit $W = < c_1 >^{\perp_\Phi}$. Sind $u \in U := < c_1 >$ und $w \in W$, so folgt $f(u) \in U$ und mit $\Phi(u, f(w)) = \Phi(f(u), w) = 0$ auch $f(w) \in W$. Damit existiert die Einschränkung $\hat{f} := f|_W$ von f auf W. Mit f ist auch $\hat{f}$ selbstadjungiert. Nach Induktionsvoraussetzung existiert eine Orthonormalbasis $\hat{B} = (c_2, \ldots, c_n)$ von W mit $f(c_i) = \hat{f}(c_i) = \lambda_i c_i$ und reellen $\lambda_i \quad (i = 2, \ldots, n)$. Es ist dann $(c_1, c_2, \ldots, c_n)$ eine Orthonormalbasis aus Eigenvektoren von f.

"(3) $\Rightarrow$ (1)" Mit einer Orthonormalbasis $B = (c_1, c_2, \ldots, c_n)$ aus Eigenvektoren c_i von f mit Eigenwerten λ_i ergibt sich

$$\begin{aligned} \Phi(c_i, f(c_j)) - \Phi(f(c_i), c_j) &= \Phi(c_i, \lambda_j c_j) - \Phi(\lambda_i c_i, c_j) = (\overline{\lambda_j} - \lambda_i)\Phi(c_i, c_j) \\ &= (\lambda_i - \lambda_j)\,\delta_{ij} = 0; \end{aligned}$$

daher ist f selbstadjungiert auf B und wegen der Linearität auf ganz V:

$$\begin{aligned} \Phi(\sum_j \beta_j c_j, f(\sum_k \gamma_k c_k)) &= \sum_{j,k} \beta_j \Phi(c_j, f(c_k))\overline{\gamma_k} = \sum_{j,k} \beta_j \Phi(f(c_j), c_k)\overline{\gamma_k} \\ &= \Phi(f(\sum_j \beta_j c_j), \sum_k \gamma_k c_k). \end{aligned}$$

□

Sei nun f der weiter oben betrachtete Endomorphismus. Nach (35.5) existiert eine ON-Basis $C=(e_1,\dots,e_n)$ mit $f(e_i)=e_i\lambda_i$. Die Transformationsmatrix $S=M_B^C(id)$ hat als Spalten die Koordinatenvektoren von $e_1,\dots,e_n$ bzgl. B. Da C ON-System ist und Φ bzgl. der ON-Basis B die Darstellung $\Phi(x_B,y_B)=x^T y$ hat, gilt $(e_i^T)_B(e_j)_B=\delta_{ij}$, also $S^TS=E_n$. Bzgl. C hat f die darstellende Matrix $\hat{A}=S^{-1}AS=S^TAS$; da die Elemente von C Eigenvektoren sind, hat $\hat{A}$ Diagonalgestalt: $\hat{A}=S^TAS=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n\end{pmatrix}$

Das zeigt

(35.6) Satz (Isometrische Hauptachsentransformation)

Seien V n-dim euklidischer VR, B ON-Basis von V, Q quadratische Form auf V mit darstellender symmetrischer Matrix A. Dann existiert eine ON-Basis $C=(e_1,\dots,e_n)$ von V derart, daß die $M_B(e_i)$ $(i=1,\dots,n)$ Eigenvektoren von A sind. Die Matrix $S:=M_B^C(id_V)$ ist orthogonal, und Q hat bzgl. C die Matrix

$$S^TAS=S^{-1}AS=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n\end{pmatrix} \quad \text{(mit den EW'en } \lambda_1,\dots,\lambda_n \text{ von A).}$$

Für $x=\begin{pmatrix}\hat{\xi}_1\\ \vdots\\ \hat{\xi}_n\end{pmatrix}_C$ gilt also $Q(x)=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\hat{\xi}_i^2$.

Anmerkung: Die Geraden $\langle e_i\rangle$ $(i=1,\dots,n)$ heißen Hauptachsen von Q. Mittels (35.3) wird das Koordinatensystem in Richtung der Hauptachsen von Q gelegt. Bei dieser Transformation bleiben Längen und Winkelmaße unverändert.

Beispiel

Sei $g(\xi,\eta):=8\xi^2+8\xi\eta+2\eta^2-10\xi-20\eta-22$.

Wir untersuchen $M:=\{x=(\xi,\eta)\in\mathbb{R}^2 \mid g(x)=0\}$.

(a) Zunächst betrachten wir die quadratische Form

$$Q(x)=8\xi^2+8\xi\eta+2\eta^2=(\xi\ \ \eta)\begin{pmatrix}8 & \frac{8}{2}\\ \frac{8}{2} & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\xi\\ \eta\end{pmatrix} \text{ auf } \mathbb{R}^2 .$$

Durch $\Phi(x,y) := xy^T$ prägen wir $\mathbb{R}^2$ eine Prähilbertraumstruktur auf. Die kanonische Basis B ist Φ-ON-Basis. Weiter ist $A = M_B(Q) = \begin{pmatrix} 8 & 4 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$.

Wir bestimmen EW'e und EV'en von A:

$\chi_A = (8 - X)(2 - X) - 16 = X^2 - 10X = (X - 0)(X - 10)$

$\lambda_1 = 0, \quad \lambda_2 = 10$

$<(1,-2)> = <\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}_B>$ ist Eigenraum zu λ_1

$<(2,1)> = <\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}_B>$ ist Eigenraum zu λ_2 .

$e_1 = \frac{(1,-2)}{\|(1,-2)\|} = \frac{1}{\sqrt{5}}(1,-2) \quad ; \quad e_2 = \frac{(2,1)}{\|(2,1)\|} = \frac{1}{\sqrt{5}}(2,1) \perp e_1$

$C = (e_1, e_2)$ ist ON-Basis;

$M_B^C(id_V) = S = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ ist orthogonal

und

$S^TAS = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 8 & 4 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 20 & 10 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 10 \end{pmatrix}$

sowie

$x_B = Sx_C$, d.h. $\underbrace{\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}}_{\substack{\text{Koordinaten} \\ \text{bzgl.} \\ \text{kanonischer} \\ \text{Basis B}}} = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}\underbrace{\begin{pmatrix} \hat{\xi} \\ \hat{\eta} \end{pmatrix}}_{\substack{\text{Koordinaten} \\ \text{bzgl. C.}}}$, also

$$\begin{cases} \xi = \frac{1}{\sqrt{5}}(\hat{\xi} + 2\hat{\eta}) \\ \eta = \frac{1}{\sqrt{5}}(-2\hat{\xi} + \hat{\eta}) \end{cases}$$ und

$Q(x) = 0 \cdot \hat{\xi}^2 + 10\hat{\eta}^2 = 10\hat{\eta}^2$

(b) $g(x) = \underbrace{8\xi^2 + 8\xi\eta + 2\eta^2}_{Q(x)} - 10\xi - 20\eta - 22 =$

$= 10\hat{\eta}^2 - \frac{10}{\sqrt{5}}(\hat{\xi} + 2\hat{\eta}) - \frac{20}{\sqrt{5}}(-2\hat{\xi} + \hat{\eta}) - 22 =$

$= \underline{10\eta^2} + \frac{30}{\sqrt{5}}\,\hat{\xi} - \underline{\frac{40}{\sqrt{5}}\,\hat{\eta}} - 22 =$ (Suche der quadratischen Ergänzung)

$= 10(\hat{\eta} - \frac{2}{\sqrt{5}})^2 + 6\sqrt{5}\,\hat{\xi} - 22 - 8 =$

$= 10(\hat{\eta} - \frac{2}{5}\sqrt{5})^2 + 6\sqrt{5}(\hat{\xi} - \sqrt{5})$

Wir verschieben den Nullpunkt um den Vektor $\begin{pmatrix}\sqrt{5}\\ \frac{2}{5}\sqrt{5}\end{pmatrix}_C = t$ und setzen $\tilde{\xi} = \hat{\xi} - \sqrt{5}$ sowie $\tilde{\eta} = \hat{\eta} - \frac{2}{5}\sqrt{5}$.

Wir erhalten

$g(x) = 10\tilde{\eta}^2 + 6\sqrt{5}\tilde{\xi}$.

Bzgl. des neuen Koordinatensystems wird M dargestellt durch die Gleichung

$\tilde{\eta}^2 + \frac{6\sqrt{5}}{10}\,\tilde{\xi} = 0$,

ist also eine Parabel.