§ 34 Isometrien

Generalvoraussetzung (V,Φ) und (W,ψ) Prähilberträume über $\mathbb{K}$

Wir betrachten lineare Abbildungen, die mit den Skalarprodukten Φ und ψ "verträglich" sind und damit Länge, Winkelmaß, Abstände "erhalten".

Beispiel: $V = W = \mathbb{R}^2$, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, $\Phi(x,y) = \psi(x,y) = (\xi_1 \xi_2)\cdot\begin{pmatrix}\eta_1\\ \eta_2\end{pmatrix} = \mathfrak{x}^T\mathfrak{y}$

$$\text{für } x = (\xi_1,\xi_2) = \mathfrak{x}^T$$
$$y = (\eta_1,\eta_2) = \mathfrak{y}^T$$

Die Abbildung $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ mit $\mathfrak{x} \longmapsto A\mathfrak{x}$ und

$$A := \begin{pmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha\\ \sin\alpha & \cos\alpha\end{pmatrix}$$

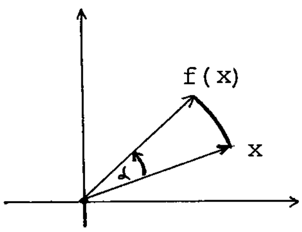
ist dann eine "Drehung um $\mathfrak{o}$ mit Dreh(winkel)maß α"

Anmerkung: Man kann zeigen, daß $\cos\sphericalangle(x,f(x)) = \cos\alpha$ gilt).

Nun gilt:

$$\Phi(f(x),f(y)) = (A\mathfrak{x})^T\cdot A\mathfrak{y} = \mathfrak{x}^T A^T A\mathfrak{y} = (\xi_1,\xi_2)\begin{pmatrix}\cos\alpha & \sin\alpha\\ -\sin\alpha & \cos\alpha\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha\\ \sin\alpha & \cos\alpha\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\eta_1\\ \eta_2\end{pmatrix}$$

$$= (\xi_1,\xi_2)\begin{pmatrix}\cos^2\alpha + \sin^2\alpha & -\cos\alpha\sin\alpha + \sin\alpha\cos\alpha\\ -\sin\alpha\cos\alpha + \cos\alpha\sin\alpha & +\sin^2\alpha + \cos^2\alpha\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\eta_1\\ \eta_2\end{pmatrix}$$



$$= (\xi_1,\xi_2)\cdot\begin{pmatrix}\eta_1\\ \eta_2\end{pmatrix} = \Phi(x,y)$$

Folgerungen:

(i) f ist "längentreu"; denn es gilt

$$\|f(x)\|_\Phi = \sqrt{\Phi(f(x),f(x))} = \sqrt{\Phi(x,x)} = \|x\|_\Phi$$

(ii) f ist "abstandstreu", denn es gilt:

$$d_\Phi(f(x),f(y)) = \|f(x)-f(y)\| \underset{f\text{ linear}}{=} \|f(x-y)\| \underset{(i)}{=} \|x-y\| = d_\Phi(x,y),$$ und

(iii) f ist "winkelmaßtreu" (Beweis ?)

(34.1) Satz

Sei f eine lineare Abbildung des Prähilbertraums V in den Prähilbertraum W. Dann sind äquivalent

(1) f ist längentreu, d.h.

$\forall x \in V : \|f(x)\|_\psi = \|x\|_\Phi$

(2) f ist abstandstreu (metrisch treu), d.h.

$\forall x,y \in V : \quad d_\psi(f(x),f(y)) = d_\Phi(x,y)$

(3) f ist mit den Skalarprodukten Φ und ψ verträglich, d.h.

$\forall x,y \in V : \quad \psi(f(x),f(y)) = \Phi(x,y)$

(SKP-Homomorphismus)

(4) f bildet jedes Φ-ON-System von V auf ein ψ-ON-System von W ab.

(5) f bildet Einheitsvektoren von V auf Einheitsvektoren von W ab.

(34.2) Definition

Eine Abbildung $f \in \mathrm{Hom}_K(V,W)$, die eine der Eigenschaften (1) bis (5) von (34.1) - und damit alle - besitzt, heißt

lineare Isometrie von V in W (bzgl. Φ und ψ).

(Manche Autoren fordern zusätzlich die Surjektivität, wenn sie von Isometrie sprechen.)

Beweis von (34.1) " (1) ⇒ (2)" Es gelte $\|f(v)\|_\psi = \|v\|_\Phi$ für alle $v \in V$.

Dann folgt

$$d_\psi(f(x),f(y)) \underset{\text{Def.}}{=} \|f(x)-f(y)\|_\psi \underset{f\text{ linear}}{=} \|f(x-y)\|_\psi \underset{\substack{\text{Vor. mit}\\ v=x-y}}{=} \|x-y\|_\Phi = d_\Phi(x,y)$$

" (2) ⇒ (3)" 1. Fall $\mathbb{K} = \mathbb{R}$

Wegen der vorausgesetzten Abstandstreue gilt

$d_\psi(f(x),f(y)) = d_\Phi(x,y)$ für alle $x,y \in V$.

Wir stellen Φ mittels d_Φ dar:

$$d_\Phi(x,-y)^2 - d_\Phi(x,y)^2 = \|x+y\|_\Phi^2 - \|x-y\|_\Phi^2 = \Phi(x+y,x+y) - \Phi(x-y,x-y) =$$

$$= \Phi(x,y) + \Phi(y,x) - (-\Phi(y,x) - \Phi(x,y)) \underset{\mathbb{K}=\mathbb{R}}{=} 4\Phi(x,y) .$$

Analog ergibt sich

$$d_\psi(f(x),-f(y))^2 - d_\psi(f(x),f(y))^2 = 4\psi(f(x),f(y)).$$

Daraus erhält man

$$\psi(f(x),f(y)) \underset{f\text{ linear}}{=} \frac{1}{4}[d_\psi(f(x),f(-y))^2 - d_\psi(f(x),f(y))^2] \underset{\text{Abstandstreue}}{=}$$

$$= \frac{1}{4}[d_\Phi(x,-y)^2 - d_\Phi(x,y)^2] = \Phi(x,y) .$$

2. Fall $\mathbb{K} = \mathbb{C}$

Statt $d_\Phi(x,-y)^2 - d(x,y)^2$ betrachte man

$d_\Phi(x,-y)^2 - d_\Phi(x,y)^2 + i d_\Phi(x,-iy)^2 - i d_\Phi(x,iy)^2 \quad (=4\Phi(x,y))$

......

"(3) ⇒ (4)" $\Phi(e_i,e_j) = \delta_{ij} \underset{\text{Vor.}}{\Rightarrow} \psi(f(e_i),f(e_j)) = \Phi(e_i,e_j) = \delta_{ij}$

"(4) ⇒ (5)" a forteriori[1] ((4) enthält (5) als Teilaussage)

"(5) ⇒ (1)":

1. Fall $x = \mathcal{O}_V$. Dann ist $f(x) = \mathcal{O}_W$ und $\|x\|_\Phi = 0 = \|f(x)\|_\psi$.

2. Fall $x \neq \mathcal{O}_V$. Dann ist $x_0 := \frac{1}{\|x\|_\Phi} x$ definiert und Einheitsvektor. Nach (5) folgt $\|f(x_0)\|_\psi = 1$, also

$$\|f(x)\|_\psi = \|f(x_0 \|x\|_\Phi)\|_\psi \underset{\substack{f\text{ linear}\\ \text{Norm homogen}}}{=} \|f(x_0)\|_\psi \cdot |\,\|x\|_\Phi| = 1\cdot\|x\|_\Phi = \|x\|_\Phi .$$

□

1) "a forteriori" bedeutet "aus der stärkeren Aussage (folgend)"

(34.3) a) Einfache Folgerung

Ist $f : V \to W$ lineare Isometrie, so ist f injektiv (und damit bijektiv, falls $\dim_{\mathbb{K}} V = \dim_{\mathbb{K}} W = n \in \mathbb{N}$).

Beweis. $f(x) = f(y) \Rightarrow \|x-y\|_\Phi = \|f(x-y)\|_\psi = \|f(x)-f(y)\| = 0 \Rightarrow x = y$ □

(34.3) b) Anmerkung:

Seien V und W $\mathbb{K}$-VR'e gleicher endlicher Dimension. Dann gilt

Eine Abbildung $f : V \longrightarrow W$, die mit dem Skalarprodukt verträglich ist (s. (34.1)(3)), ist notwendigerweise linear und damit lineare Isometrie. (Die Bedingung "linear" ist daher in diesem Fall bei den folgenden Sätzen automatisch erfüllt.)

Beweis:

Sei $(b_1,\dots,b_n)$ Basis von V. Wir zeigen zunächst:

(i) $(f(b_1),\dots,f(b_n))$ ist linear unabhängig und damit Basis von W.

Sei $\sum_{i=1}^n f(b_i)\lambda_i = \mathcal{O}_W$. Dann gilt $0 = \psi(\sum_{i=1}^n f(b_i)\lambda_i,\ f(\sum_{j=1}^n b_j\lambda_j)) =$

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i\, \psi(f(b_i),\ f(\sum_{j=1}^n b_j\lambda_j)) = \sum_{i=1}^n \lambda_i \Phi(b_i,\ \sum_{j=1}^n b_j\lambda_j) = \Phi(\sum_{i=1}^n b_i\lambda_i,\ \sum_{j=1}^n b_j\lambda_j)$$

und daher $\sum_{i=1}^n b_i\lambda_i = \mathcal{O}_V$, also $\lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0$. Nun beweisen wir

(ii) $\psi(f(\sum_{i=1}^n b_i\lambda_i) - \sum_{i=1}^n f(b_i)\lambda_i,\ f(b_j)) = 0$ für alle $j=1,\dots,n$.

Dies ergibt sich aus

$$\psi(f(\sum_{i=1}^n b_i\lambda_i),\ f(b_j)) - \psi(\sum_{i=1}^n f(b_i)\lambda_i,\ f(b_j)) =$$
$$\Phi(\sum_{i=1}^n b_i\lambda_i, b_j) - \sum_{i=1}^n \lambda_i \Phi(b_i, b_j) = 0.$$

Mit (i) und (ii) folgt die Behauptung aus der positiven Definitheit von ψ. □

(34.4) Hilfssatz

Seien (V_i, Φ_i) Prähilberträume für $i = 1,2,3$.

(a) Sind $f: V_1 \longrightarrow V_2$ und $g: V_2 \longrightarrow V_3$ lineare Isometrien, so ist auch $g \circ f$ lineare Isometrie.

(b) Ist $f: V_1 \longrightarrow V_2$ bijektive lineare Isometrie, so auch f^{-1}.

Beweis. (a) $g \circ f$ ist linear;

$$\|(g \circ f)(x)\|_{\Phi_3} = \|g(f(x))\|_{\Phi_3} \underset{\substack{g \\ \text{Isometrie}}}{=} \|f(x)\|_{\Phi_2} \underset{\substack{f \\ \text{Isometrie}}}{=} \|x\|_{\Phi_1} \quad \text{für alle } x \in V.$$

(b) f^{-1} existiert und ist linear

$$\|f^{-1}(y)\|_{\Phi_1} \underset{\substack{f \\ \text{Isometrie}}}{=} \|f(f^{-1}(y))\|_{\Phi_2} = \|y\|_{\Phi_2} \quad .$$

Im weiteren betrachten wir lineare Isometrien eines Prähilbertraumes auf sich: Aus (34.4) folgt sofort

(34.5) Satz und Definition

(a) Die Menge der bijektiven linearen Isometrien eines Prähilbertraumes (V,Φ) auf sich bildet eine UG von $(GL(V), \circ)$

(b) Diese UG heißt im Falle $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ unitäre, im Falle $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ orthogonale Gruppe von (V,Φ) Bezeichnung: $U(V,\Phi)$ bzw. $O(V,\Phi)$.

(c) Ihre Elemente, also die surjektiven linearen Isometrien, heißen entsprechend unitäre bzw. orthogonale (oder euklidische) Automorphismen (Transformationen).

Matrixdarstellung:

(34.6) Satz

Seien (V,Φ) endlich-dim. Prähilbertraum, B,C ON-Basen von V, $f \in \mathrm{End}_K V$ und $A = M_C^B(f)$. Dann gilt

$$f \text{ Isometrie} \Leftrightarrow \bar{A}^T A = E$$

Beweis. f Isometrie $\Leftrightarrow \forall x,y \in V : \Phi(f(x),f(y)) = \Phi(x,y)$

$$\underset{\substack{x=\xi_B\\ y=\eta_B}}{\Leftrightarrow} \forall \xi,\eta \in K^{(n,1)} : (A\xi)^T M_C(\Phi)(\overline{A\eta}) = \xi^T M_B(\Phi)\bar{\eta}$$

$$\underbrace{\Leftrightarrow}_{M_B(\Phi)=E_n=M_C(\Phi)} \forall \xi,\eta \in \mathbb{K}^{(n,1)} : \xi^T(A^T\bar{A})\bar{\eta} = \xi^T E_n \bar{\eta} \underset{\text{mit}}{\overset{\Leftarrow}{\Rightarrow}} \left(\begin{array}{l}\xi = e_i, \eta = e_j\\ i,j = 1,\dots,n\end{array}\right)$$

$$A^T\bar{A} = E_n \Leftrightarrow \bar{A}^T A = E_n.$$

□

(34.7) Definition & Wiederholung

$A \in \mathbb{C}^{(n,n)}$ heißt hermitesch, falls $A = \bar{A}^T$

unitär, falls $A^{-1} = \bar{A}^T$ (d.h. $A\bar{A}^T = E_n = \bar{A}^T A$)

$A \in \mathbb{R}^{(n,n)}$ heißt orthogonal, falls $A^{-1} = A^T$ (d.h. $AA^T = E_n = A^T A$)

symmetrisch, falls $A = A^T$ gilt.

Anmerkung:

(1) Es sind also genau die orthogonalen (bzw. unitären) Matrizen, die (bgzl. ON' Basen) die Isometrien eines endlich-dimensionalen euklidischen (bzw. unitären) Vektorraums darstellen.

(2) Wegen $A^T\bar{A} = E_n$ bilden die Spalten einer unitären bzw. orthogonalen Matrix eine ON-Basis von $\mathbb{K}^{(n,1)}$ bzgl. des kanonischen Skalarprodukts.

(34.8) Korollar

Ist f Isometrie eines endlich -dim. Prähilbertraumes (V,Φ) auf sich, so gilt $|\det f| = 1$.

Beweis: $\det f = \det A$ für $A := M_B^B(f)$, (vgl. 26.1).

$$1 = \det E_n \underset{(34.6)}{=} \det \bar{A}^T A = \det \bar{A}^T \cdot \det A = \overline{\det A} \cdot \det A = |\det A|^2 .$$

□

(34.9) Korollar

Die Eigenwerte einer (linearen) Isometrie von (V,Φ) auf sich (bzw. einer unitären oder orthogonalen Matrix) haben den Betrag 1 .

Beweis: Sei λ Eigenwert der Isometrie f und $x \neq \mathcal{O}$ ein zugehöriger Eigenvektor. Dann gilt

$$\|x\|_\Phi = \|f(x)\|_\Phi = \|\lambda x\|_\Phi = |\lambda| \, \|x\|_\Phi ,$$

woraus $|\lambda| = 1$ folgt. Die entsprechende Aussage ist auch für Matrizen richtig, die (im endlich-dim. Fall) eine Isometrie darstellen, nach (34.6) also auch für unitäre bzw. orthogonale Matrizen. □

(34.10) Bestimmung der orthogonalen Automorphismen von $\mathbb{R}^2$

(vgl. S. Lang, LA, p. 275f)

Seien $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, $V = W$, $\Phi = \psi$, $\dim V = 2$ (also $V \cong \mathbb{R}^2$) und f (lineare !) Isometrie (orthogonaler Automorphismus) von V.

Sei $B = (e_1, e_2)$ Φ-ON-Basis, $A = \begin{pmatrix} \alpha & \gamma \\ \beta & \delta \end{pmatrix} := M_B^B(f)$.

Nach 34.8 folgt $\det f \in \{1,-1\}$

1. Fall $\det f = +1$

Die Spalten von A bilden wegen $A^T A = E_n$ ein ON-System bzgl. des kanonischen Skalarprodukts; insbesondere $\binom{\alpha}{\beta} \perp \binom{\gamma}{\delta}$; andererseits gilt $\binom{\alpha}{\beta} \perp \binom{-\beta}{\alpha}$; da der Orthogonalraum von $\binom{\alpha}{\beta}$ die dim 1 hat, folgt: $\binom{\gamma}{\delta}$ und $\binom{-\beta}{\alpha}$ sind linear abhängig.

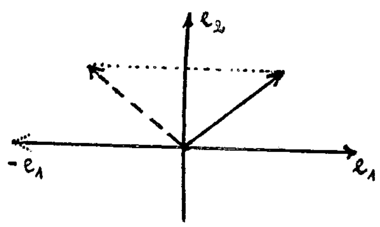
Wegen $\|\binom{-\beta}{\alpha}\| = \|\binom{\alpha}{\beta}\| = 1$ und $\|\binom{\gamma}{\delta}\| = 1$ folgt $\binom{\gamma}{\delta} = \pm\binom{-\beta}{\alpha}$.

Wäre $\binom{\gamma}{\delta} = \binom{\beta}{-\alpha}$, so det $A = \begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & -\alpha \end{vmatrix} = -\alpha^2-\beta^2 \neq 1$. Also erhalten wir $A = \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}$ und $\alpha^2 + \beta^2 = 1$. Aus Eigenschaften der sin-und cos-Funktion (s. Analysis) folgt die Existenz eines $\varphi \in [0,2\pi)$ mit $\alpha = \cos\varphi$ und $\beta = \sin\varphi$. Hiermit gilt $A = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$. Verwenden wir vorläufig das durch elementargeometrische Überlegungen gewonnen Ergebnis, daß durch eine solche Matrix eine Drehung dargestellt wird (s. auch 34.12), so können wir festhalten:

$\boxed{\text{f ist Drehung um } 0}$.

2. Fall det f = -1

Sei s die Abbildung, die bzgl. B die Matrix $S = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ hat. Sie kann als Spiegelung an $\langle e_2 \rangle$ interpretiert werden. (Die Definition entnehmen wir zunächst der Elementargeometrie).



s ist orthogonal ($S^T \cdot S = E_2$) und involutorisch (d.h. es gilt $s^2 = id$).

Betrachten wir nun $d := f \circ s$. Als Verknüpfung zweier linearer Isometrien ist d lineare Isometrie; ferner ergibt sich $\det d = \det(f \circ s) = \det f \cdot \det s = (-1)\cdot(-1) = 1$. Es liegt bei d der 1. Fall vor, und d ist eine Drehung. Wegen $f = d \circ s$ gilt:

$\boxed{\text{f ist eine Spiegelung verknüpft mit einer Drehung.}}$

f besitzt wegen $\chi_f = \begin{vmatrix} -\cos\varphi - X & -\sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi - X \end{vmatrix} = X^2 - 1$ die Eigenwerte $+1$ und -1. Man kann zeigen, daß hier f Spiegelung an der Geraden $V_{f,1}$ ist.

(34.11) Bestimmung der orthogonalen Automorphismen von $\mathbb{R}^3$.

Sei $\dim_{\mathbb{R}} V = 3$ und f (lineare !) Isometrie von (V,Φ). Eine f darstellende Matrix ~~von Φ~~ ist aus $\mathbb{R}^{(3,3)}$ und besitzt deswegen mindestens einen Eigenwert λ_3 (s. 28.9) mit zugehörigem normierten Eigenvektor e_3. Nach 34.9 ist $\lambda_3 \in \{1,-1\}$. Der Orthogonalraum $W = \langle e_3 \rangle^{\perp\Phi}$ hat dim 2 und ist wie $\langle e_3 \rangle$ unter f invariant. Sei $C = (e_1, e_2)$ ON-Basis von W. Dann ist $B = (e_1, e_2, e_3)$ ON-Basis von V und $M_B^B(f) = \left(\begin{array}{cc|c} \multicolumn{2}{c|}{A} & \begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix} \\ \hline 0 & 0 & \lambda_3 \end{array}\right)$ mit $A = M_C^C(f|_W)$.

Nun ist $f|_W$ lineare Isometrie von W (Beweis ?) und daher (34.10) auf $f|_W$ anwendbar.

1. Fall : det f = 1

Sei $\lambda_3 = 1$; dann ist $\det f|_W = \det A = \det f = 1$ und $f|_W$ Drehung um 0. Es ergibt sich

$$M_B^B(f) = \left(\begin{array}{cc|c} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Durch Anwendung elementargeometrischer Kenntnisse können wir festhalten: f ist Drehung um eine Achse durch den Nullpunkt.

Sei $\lambda_3 = -1$; dann ist $\det f|_W = -1$; nach (34.10) besitzt $f|_W$ und damit f auch den Eigenwert 1, sodaß wir dann durch andere Auswahl von B doch o.B.d.A. $\lambda_3 = 1$ voraussetzen können und f als Drehung identifizieren können.

2. Fall : det f = -1

Dann sei s die Abbildung mit $M_B^B(s) = S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Sie kann als Spiegelung an der Ebene $\langle e_1, e_2 \rangle$ aufgefaßt werden (Definition wie in der Elementargeometrie; s. auch 34.12);

wieder ist S orthogonal und det $S = -1$. Die lineare Isometrie $d = f \circ s$ hat Determinante +1 und ist daher Drehung (s. 1. Fall). Wegen $s^2 = id$, also $f = d \circ s$, folgt

f ist eine Spiegelung an einer Ebene verknüpft mit einer Drehung

Anmerkung

Bisher hatten wir die Bezeichnungen "Drehung" und "Spiegelung" für bestimmte lineare Abbildungen aus elementargeometrischen Überlegungen übernommen. Nun ist uns eine Präzisierung und Verallgemeinerung allein im Rahmen der Linearen Algebra möglich. In Übereinstimmung mit den erzielten Ergebnissen definieren wir "Drehung" und "Spiegelung" folgendermaßen

(34.12) Bezeichnungen:

(i) Eine orthogonale Transformation f eines endlich-dim. euklidischen Raumes (V,Φ) heißt eigentlich orthogonal oder Drehung, falls $\det f = +1$ ist.

(ii) Die Menge der Drehungen von (V,Φ) bildet einen Normalteiler der orthogonalen Gruppe $O(V,\Phi)$. Dieser heißt die spezielle orthogonale Gruppe $SO(V,\Phi)$ (oder $O^+(V,\Phi)$).

(iii) Eine orthogonale Transformation g eines endlich-dim. euklidischen Raumes (V,Φ) heißt Spiegelung, falls gilt: $g^2 = id_V \neq g$. (Je nach der Codimension c des Eigenraumes $V_{g,1}$ (punktweise fix!) ist $\det g = 1$ (z.B. Punktspiegelung, also Drehung um π in $\mathbb{R}^2$, für $c = 2$) bzw. $\det g = -1$ (z.B. für $c = 1$ Geradenspiegelung in $\mathbb{R}^2$, Spiegelung an einer Ebene in $\mathbb{R}^3$). (Vgl. auch Klingenberg/Klein, LA 2, p. 347f).