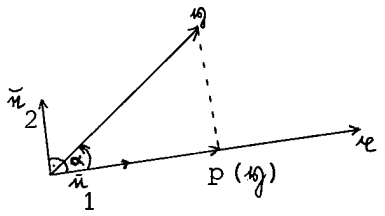
§ 33 Winkelmaße

M ↓ Wir wollen den Begriff des Maßes eines Winkels zwischen zwei Vektoren $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{y}$ $(\neq 0)$ für einen beliebigen euklidischen Raum einführen. Dazu betrachten wir zunächst $\mathbb{R}^2$ mit dem kanonischen Skalarprodukt.

Sei $\mathfrak{u}_1 = \frac{\mathfrak{x}}{\|\mathfrak{x}\|}$ und $(\mathfrak{u}_1, \mathfrak{u}_2)$ ON-System.
Nach (32.4) gilt

$$\mathfrak{y} = \mathfrak{u}_1 \Phi(\mathfrak{y}, \mathfrak{u}_1) + \mathfrak{u}_2 \Phi(\mathfrak{y}, \mathfrak{u}_2).$$



Ist p die Orthogonal-Projektion von $V = \mathbb{R}^2$ auf $\langle \mathfrak{u}_1 \rangle$ (und damit auf $\langle \mathfrak{x} \rangle$), so gilt $p(\mathfrak{y}) = \mathfrak{u}_1 \Phi(\mathfrak{y}, \mathfrak{u}_1)$. (vgl. 32.12)
Aus der Elementargeometrie wissen wir, daß für das Maß α des Winkels zwischen $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{y}$ gilt

$$|\cos\alpha| = \frac{\|p(\mathfrak{y})\|}{\|\mathfrak{y}\|}, \text{ also}$$

↑ M

$$|\cos\alpha| = \frac{\|\mathfrak{u}_1 \Phi(\mathfrak{y}, \mathfrak{u}_1)\|}{\|\mathfrak{y}\|} = \frac{|\Phi(\mathfrak{y}, \mathfrak{u}_1)| \cdot 1}{\|\mathfrak{y}\|} = \frac{|\Phi(\mathfrak{y}, \frac{\mathfrak{x}}{\|\mathfrak{x}\|})|}{\|\mathfrak{y}\|} = \frac{|\Phi(\mathfrak{x}, \mathfrak{y})|}{\|\mathfrak{x}\| \cdot \|\mathfrak{y}\|}$$

Generalvoraussetzung in diesem Paragraphen: (V, Φ) euklidischer Raum, $x, y \in V - \{0\}$

(33.1) Hilfssatz

$$\boxed{\text{Es gilt } -1 \leq \frac{\Phi(x,y)}{\|x\|_\Phi \cdot \|y\|_\Phi} \leq 1}$$

Beweis: Aus (32.2a) (Ungleichung von CSB):

$$|\Phi(x,y)|^2 \leq \Phi(x,x) \cdot \Phi(y,y) = \|x\|_\Phi^2 \cdot \|y\|_\Phi^2 \quad \text{folgt}$$

$$|\Phi(x,y)| \leq \|x\|_\Phi \cdot \|y\|_\Phi.$$

□

Aus der Analsysis übernehmen wir Definitionen und Eigenschaften der cos-Funktion.

Da $\cos|_{[0,\pi]} : [0,\pi] \longrightarrow [-1,1]$ bijektiv ist, existiert eine Umkehrfunktion: "arccos".

(33.2) Definition

$\measuredangle_\Phi(x,y) := \arccos \frac{\Phi(x,y)}{\|x\|_\Phi \cdot \|y\|_\Phi}$ heißt das Maß (bzgl. Φ) des von x und y eingeschlossenen (unorientierten) Winkels.
(Es ist definitionsgemäß stets aus $[0,\pi]$).

Wegen $\measuredangle_\Phi(x,y) = \arccos \Phi(\frac{x}{\|x\|_\Phi}, \frac{y}{\|y\|_\Phi})$ ist $\measuredangle_\Phi(x,y)$ nur von $\langle x \rangle$ und $\langle y \rangle$, also den Richtungen von x und y abhängig. (Übereinstimmung mit der Anschauung!)

Analog zu den elementargeometrischen Verhältnissen gilt auch hier:

(33.3) Hilfssatz

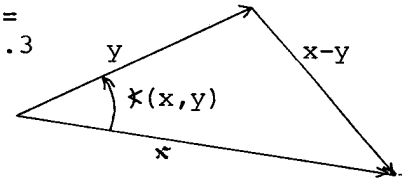
$$\boxed{\Phi(x,y) = \|x\|_\Phi \cdot \|y\|_\Phi \cdot \cos[\measuredangle_\Phi(x,y)]}$$

(33.4) Kosinussatz

$$\boxed{\|x-y\|_\Phi^2 = \|x\|_\Phi^2 + \|y\|_\Phi^2 - 2\|x\|_\Phi \|y\|_\Phi \cos \measuredangle_\Phi(x,y)}$$

Beweis: $\Phi(x-y,x-y) = \Phi(x,x) + \Phi(y,y) - 2\Phi(x,y) \underset{33.3}{=}$

$\|x\|^2 + \|y\|^2 - 2\|x\| \, \|y\| \cos \measuredangle(x,y)$. □



Spezialfall (für $x \perp_\Phi y$, d.h. $\cos \measuredangle(x,y) = 0$):

(33.5) Satz des Pythagoras

$$\boxed{x \perp_\Phi y \Rightarrow \|x-y\|_\Phi^2 = \|x\|_\Phi^2 + \|y\|_\Phi^2}$$

Beweis. $x \perp_\Phi y \Rightarrow \Phi(x,y) = 0 \Rightarrow \cos \measuredangle_\Phi(x,y) = 0 \underset{33.4}{\Longrightarrow}$ Behauptung. □

(Alternativer Beweis:

$\|x-y\|_\Phi^2 = \Phi(x-y,x-y) = \Phi(x,x) + \Phi(y,y) - 2\underbrace{\Phi(x,y)}_{0}$

$= \|x\|_\Phi^2 + \|y\|_\Phi^2$. □