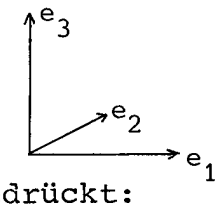
§ 32 Orthogonalsysteme in Prähilberträumen

M ↓ Die kanonische Basis (e_1, e_2, e_3) von $\mathbb{R}^3$ hat (bzgl. des gewöhnlichen Skalarprodukts) folgende Eigenschaften:



(i) $e_i \perp e_j$ für $i \neq j$

(ii) $\|e_i\| = 1$ für $i=1,2,3$,

mit Hilfe des kanonischen Skalarprodukts Φ ausgedrückt:

$$\Phi(e_i, e_j) = \delta_{ij} \quad \text{für alle } i,j \in \{1,2,3\}.$$

↑ M Analog definieren wir in beliebigen Prähilberträumen:

Fortsetzung s. Seite 121 !

(32.1) Definition

Sei (V,Φ) Prähilbertraum.

(a) $e \in V$ heißt Φ-Einheitsvektor (oder normierter Vektor), wenn $\|e\|_\Phi = 1$ gilt.

Anmerkung: Ist $v \in V - \{0\}$, so ist $\frac{1}{\|v\|_\Phi} v$ normiert:

$$\left\| \frac{1}{\|v\|} v \right\| = \frac{1}{\|v\|} \|v\| = 1.$$

(b) Eine Familie $(e_i)_{i \in I}$ von Vektoren $e_i \in V - \{\mathcal{O}\}$ heißt Φ-orthogonal (oder Φ-Orthogonalsystem), wenn $\Phi(e_i, e_j) = 0$ für $i \neq j$ gilt; sie heißt Φ-orthonormiert (oder Φ-Orthonormalsystem), wenn $\Phi(e_i, e_j) = \delta_{ij}$ gilt.

(c) $B = (b_i)_{i \in I}$ heißt Φ-Orthonormalbasis (ONB) von V, falls (1) B Basis ist und (2) B Φ-orthonormiert ist.

Achtung: In einem Hilbertraum versteht man oft unter einer Orthonormalbasis nur ein maximales Orthonormalsystem!

Beispiele

(1) Seien $V_1 = \mathbb{K}^n$; $\Phi_1(x,y) = x\bar{y}^T$ (kanonisches Skalarprodukt) und $e_i := (\delta_{ij})_{j \in \{1,\dots,n\}}$. Die kanonische Basis $B = (e_1, \dots, e_n)$, von K^n ist Φ_1-Orthonormalbasis.

(2) Seien $V_2 = \mathcal{C}([0,2\pi], \mathbb{R})$ und $\Phi_2(f,g) := \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t)g(t)\,dt$ (definiert ein Skalarprodukt auf V_2). Es gilt (vgl. z.B. Courant, Differential- und Integralrechnung 1971, S. 191):

$\Phi_2(\text{"cos nx"}, \text{"sin mx"}) = 0$ für $n, m \in \mathbb{N}$

$$\Phi_2(\text{"cos nx"}, \text{"cos mx"}) = \begin{cases} 0 & \text{für } n \neq m \\ 1 & \text{für } n = m \end{cases}$$

$$\Phi_2(\text{"sin nx"}, \text{"sin mx"}) = \begin{cases} 0 & \text{für } n \neq m \\ 1 & \text{für } n = m \end{cases}$$

Daher bilden die Funktionen

$$\text{"cos nx"} := \begin{cases} [0,2\pi] \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \cos nx \end{cases} \quad \text{und "sin nx"} : \begin{cases} [0,2\pi] \longrightarrow \mathbb{R} \\ X \longmapsto \sin nx \end{cases}$$

$(n \in \mathbb{N})$ in (V_2, Φ_2) ein Orthonormalsystem.

(32.2) Elementare Eigenschaften eines Φ-Orthonormalsystems

(1) Jeder Vektor eines Φ-Orthonormalsystems $(e_i)_{i\in I}$ ist Einheitsvektor.

Für alle $i \in I$ gilt $\|e_i\|_\Phi = 1$

(2) Je zwei Vektoren eines Φ-Orthonormalsystems (bzw. Orthogonalsystems) $(e_i)_{i\in I}$ sind orthogonal:

Für alle $i,j \in I$ mit $i \neq j$ gilt $e_i \perp_\Phi e_j$

(3) Jedes Φ-Orthonormalsystem ist linear unabhängig

Beweis (1) und (2) definitionsgemäß

(3) Sei $(e_i)_{i\in I}$ Orthonormal-System und $(\lambda_i) \in \mathbb{K}^{(I)}$ mit $\sum_{i\in I} e_i\lambda_i = \mathfrak{O}$. Für jedes $j \in I$ gilt

$$0 = \Phi(\mathfrak{O}, e_j) = \Phi(\sum_{i\in I} e_i\lambda_i, e_j) = \sum_{i\in I} \lambda_i \Phi(e_i, e_j) = \sum_{i\in I} \lambda_i \delta_{ij} = \lambda_j. \quad \square$$

(32.3) Bemerkung

Ist $B = (e_i)_{i\in I}$ eine Φ-Orthonormalbasis von V, so gilt definitionsgemäß $\Phi(e_i, e_j) = \delta_{ij}$.

Im Falle endlicher Dim.n hat die Fundamentalmatrix von Φ bzgl. einer Orthonormalbasis B die Gestalt

$$M_B(\Phi) = E_n$$

M ↓ ↑ M

Bgzl. einer Orthonormalbasis hat Φ also eine besonders einfache Darstellung, nämlich eine dem kanonischen Skalarprodukt ähnliche. Auch die Koordinaten bzgl, einer Φ-Orthonormalbasis lassen sich für einen Vektor $x \in V$ mit Hilfe von Φ angeben.
Sei $(e_i)_{i\in I}$ Φ-Orthonormalbasis, so existiert $(\lambda_i)_{i\in I} \in \mathbb{K}^{(I)}$ mit $x = \sum_{i\in I} e_i\lambda_i$ (nur endlich viele λ_i ungleich 0). Für $j \in I$ gilt damit

$$\Phi(x,e_j) = \Phi(\sum_{i\in I} e_i\lambda_i, e_j) = \sum_{i\in I} \lambda_i\Phi(e_i,e_j) = \sum_{i\in I} \lambda_i\delta_{ij} = \lambda_j .$$

Damit erhalten wir:

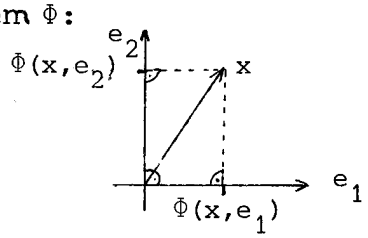
(32.4) Satz : Koordinaten bzgl. einer Orthonormalbasis

Ist $B = (e_i)_{i\in I}$ eine Φ-Orthonormalbasis eines Prähilbertraumes V, dann gilt für jedes $x \in V$:

$$x = \sum_{i\in I} e_i\Phi(x,e_i) .$$

D.h. die i-te Koordinate von x bzgl. B (sozusagen die "Orthogonalprojektion" von x auf e_i) ist $\Phi(x,e_i)$.

Beispiel: $\mathbb{R}^2$ mit kanonischem Φ:



Anm.: Falls $B = (e_i)_{i\in J}$ ein maximales ONS in einem Hilbertraum ist, kann man zeigen: $\forall \varepsilon > 0\ \exists J_\varepsilon \subseteq J$ mit J_ε endlich, derart dass für alle endlichen J mit $J_\varepsilon \subseteq J \subseteq J$ gilt: $\|x - \sum_{i\in J} \Phi(x,e_i)e_i\| < \varepsilon$.

(32.5) Anmerkung

Die Koeffizienten $\Phi(x,e_i)$ werden auch die Fourierkoeffizienten von x bzgl. der Φ-Orthonormalbasis B genannt.

Diese Bezeichnungsweise kommt von der Entwicklung einer Funktion $f \in \mathcal{C}([0,2\pi],\mathbb{R})$ in eine Fourierreihe her, bei der versucht wird, f(x) als eine Reihe der Form

$\frac{\alpha_0}{\sqrt{2}} + \sum_{k=1}^{\infty} (\alpha_k \cos kx + \beta_k \sin kx)$ darzustellen (vgl. z.B. W.J. Smirnow, Lehrgang d. höheren Mathematik, Teil II, Berlin 1963 p. 363 ff oder H. Heuser Lehrbuch der Analysis 2, Stuttgart 1981 Kap.XVII). Setzt man auf der Suche nach einer solchen Reihe die gleichmäßige Konvergenz voraus, sodaß dann gliedweise integriert werden kann, ergeben sich (ähnlich wie beim Beweis 32.4) als Koeffizienten

$$\alpha_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1}{\sqrt{2}} f(t)\,dt; \quad \alpha_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \cos kt\, dt; \quad \beta_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \sin kt\, dt.$$

Dabei nützt man u.a. die in Beispiel (2) nach 31.1 angeführten Eigenschaften aus: Die Funktionen sin mx, cos nx ($n \in \mathbb{N}$) - und zusätzlich $\frac{1}{\sqrt{2}}$ - bilden ein Φ-Orthonormalsystem S bzgl. des durch

$$\Phi(f,g) := \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t)g(t)\,dt$$ definierten Skalarproduktes.

Man beachte, daß α_i, β_i von der Form $\phi(f, e_i)$ mit $e_i \in S$ sind.
Zu untersuchen bleibt dann die Frage der Konvergenz der Reihe sowie die Übereinstimmung mit f.

Es erhebt sich nun die Frage nach der Existenz einer Orthonormalbasis. Wir beweisen zunächst folgenden Satz:

(32.6) Orthonormierungsverfahren*) von Erhard Schmidt**) und J.P. Gram***)

(a) Existenz

Sei (V,Φ) Prähilbertraum und $(a_i)_{i\in I}$ mit $I = \{1,\dots,n\}$ oder $I = \mathbb{N}$ eine (endliche bzw. abzählbar -unendliche) Familie linear unabhängiger Vektoren.

Dann existiert ein Φ-Orthonormalsystem $(e_i)_{i\in I}$ mit

$$\langle e_1,\dots,e_j\rangle = \langle a_1,\dots,a_j\rangle \quad \text{für alle } j \in I.$$

Die Familie $(e_i)_{i\in I}$ der in (a) angegebenen Eigenschaften erhält man folgendermaßen:

*) Das Verfahren war (nach Wikipedia) schon vorher bekannt, z.B. Laplace und Cauchy.
**) deutscher Mathematiker (1876-1959) (u.a. Prof. in Berlin)
***) dänischer Mathematiker (1850-1916)

(b) <u>Konstruktion</u> (rekursiv)

$$e_1 := \frac{1}{\|a_1\|_\Phi} a_1$$

Sind $e_1, \ldots, e_j$ bestimmt, und ist $j+1 \in I$, so definiert man $\boxed{b_{j+1} := a_{j+1} - \sum_{i=1}^{j} e_i \Phi(a_{j+1}, e_i)}$ und normiert zu

$$e_{j+1} := \frac{1}{\|b_{j+1}\|} b_{j+1}$$

<u>Anmerkung</u>: Wir werden später sehen, daß $\sum_{i=1}^{j} e_i \Phi(a_{j+1}, e_i)$ gerade das Bild von a_{j+1} unter der Orthogonalprojektion auf $\langle e_i \mid i=1,\ldots,j \rangle$ ist.

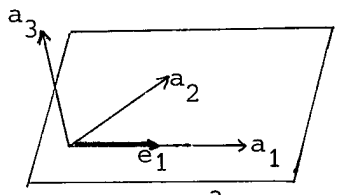
<u>Beweis</u> durch vollständige Induktion:

(i) <u>Induktions Beginn</u>: $j = 1$

a_1 l.u. $\Rightarrow a_1 \neq 0 \Rightarrow \|a_1\|_\Phi \neq 0 \Rightarrow$

$e_1 = \frac{1}{\|a_1\|} a_1$ definiert und normiert

(vgl. Anmerkung in § 31)



Bsp. $\mathbb{R}^3$, $j=1$, $I=\{1,2,3\}$

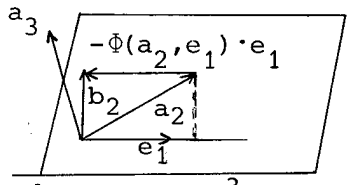
(ii) <u>Induktions-Voraussetzung:</u> Sei $(e_i)_{i=1,\ldots,j}$ ein Φ-Orthonormalsystem mit $\langle e_i, \ldots, e_j \rangle = \langle a_1, \ldots, a_j \rangle$

(iii) <u>Induktions-Schritt</u>

(α) Ist $j+1 \notin I$, so $I = \{1,\ldots,j\}$ und wir sind fertig.

Sei also $j+1 \in I$ und a_{j+1} gegeben.

Wäre $b_{j+1} := a_{j+1} - \sum_{i=1}^{j} e_i \Phi(a_{j+1}, e_i)$ gleich σ, so $a_{j+1} \in \langle e_1, \ldots, e_j \rangle = \langle a_1, \ldots, a_j \rangle$ und a_{j+1} l.a. von $a_1, \ldots, a_j$, ein Widerspruch.



Bsp. $\mathbb{R}^3$, $j=1$

Damit ist

$\|b_{j+1}\|_\Phi \neq 0$ und $e_{j+1} := \frac{1}{\|b_{j+1}\|_\Phi} b_{j+1}$ definiert und Vektor der Länge 1.

(β) Laut Induktions-Voraussetzung ist $(e_i)_{i=1,\dots,j}$ ein Φ-Orthonormalsystem; um dies auch von $(e_i)_{i=1,\dots,j+1}$ zu zeigen, genügt der Nachweis von $e_{j+1} \perp_\Phi e_k$, also von $\Phi(e_{j+1},e_k) = 0$, für alle $k \in \{1,\dots,j\}$. Es gilt

$$\Phi(e_{j+1},e_k) = \Phi\left(\frac{}{\|b_{j+1}\|} b_{j+1}, e_k\right) = \frac{1}{\|b_{j+1}\|}\,\Phi(b_{j+1},e_k);$$

$\Phi(b_{j+1},e_k) = \Phi(a_{j+1} - \sum_{i=1}^{j} e_i \Phi(a_{j+1},e_i), e_k)$ und wegen der Linearität im 1. Argument:

$$\Phi(b_{j+1},e_k) = \Phi(a_{j+1},e_k) - \sum_{i=1}^{j} \Phi(a_{j+1},e_i)\,\underbrace{\Phi(e_i,e_k)}_{=\delta_{ik} \text{ laut Induktion-Voraussetzung}}$$

$$= \Phi(a_{j+1},e_k) - \Phi(a_{j+1},e_k) = 0.$$

Damit ist $(e_i)_{i=1,\dots,j+1}$ ein Φ-Orthonormalsystem.

Weiter gilt:

$$a_{j+1} = b_{j+1} + \sum_{i=1}^{j} e_i \Phi(\cdot,\cdot) = e_{j+1}\cdot\|b_{j+1}\|_\Phi + \sum e_i \Phi(\cdot,\cdot) \in \langle e_1,\dots,e_{j+1}\rangle,$$

somit nach Induktions-Voraussetzung $\langle a_1,\dots,a_{j+1}\rangle \subseteq \langle e_1,\dots,e_{j+1}\rangle$.

Da $a_1,\dots,a_{j+1}$ l.u. sind, folgt die Gleichheit (aus Dimensionsgründen).

Ende des Induktionsbeweises.

Für jedes $i \in I$ ist somit ein e_i definiert, und es gilt $(e_i)_{i\in I}$ ist ein Orthonormalsystem der angegebenen Eigenschaft. □

<u>Beispiele</u>

(i) Seien $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, $V = \mathbb{R}^2$, $G := \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$, B kanonische Basis,

$\Phi(x,y) := \mathfrak{x}^T G \mathfrak{y}$ für $x = \mathfrak{x}_B$, $y = \mathfrak{y}_B$. Φ definiert ein Skalarprodukt: Da $M_B(\Phi) = G$ symmetrisch und nicht-singulär ist, definiert Φ eine nicht-ausgeartete symmetrische Bilinearform;

diese ist positiv definit wegen

$$\Phi(x,x) = (4\xi_1 - 2\xi_2, -2\xi_1 + 3\xi_2)\begin{pmatrix}\xi_1\\ \xi_2\end{pmatrix} = 4\xi_1^2 - 2\xi_1\xi_2 - 2\xi_1\xi_2 + 3\xi_2^2$$
$$= (2\xi_1 - \xi_2)^2 + 2\xi_2^2 \;;$$

$a_1 := (1,0)$ und $a_2 := (1,1)$ sind l.u..

$$e_1 := \frac{1}{\|a_1\|_\Phi}\, a_1 = \frac{1}{\sqrt{\Phi(a_1,a_1)}}\, a_1 = \frac{1}{2}\, a_1 = (\tfrac{1}{2},0)\,.$$

$$b_2 := a_2 - \Phi(a_2,e_1)\cdot e_1 = (1,1) - [(1,1)\begin{pmatrix}4 & -2\\ -2 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\ 0\end{pmatrix}](\tfrac{1}{2},0)$$
$$= (1,1) - [(2\;\;1)\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\ 0\end{pmatrix}](\tfrac{1}{2}\;\;0) = (1,1) - (\tfrac{1}{2},0) = (\tfrac{1}{2},1)$$

$$e_2 = \frac{1}{\|b_2\|}\, b_2 = \frac{1}{\sqrt{(2\cdot\frac{1}{2}-1)^2 + 2\cdot 1^2}}\,(\tfrac{1}{2},1) = \frac{1}{\sqrt{2}}\,(\tfrac{1}{2},1) = (\frac{1}{2\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}})$$

Ergebnis: $(\frac{1}{2},0)$ und $(\frac{1}{2\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}})$ bilden eine Φ-Orthonormalbasis von V.

<u>Beispiel (ii)</u>

Sei $V = \mathcal{P}(\mathbb{R})$ der $\mathbb{R}$-VR der Polynom-Abbildungen

$B := ((id_{\mathbb{R}})^n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ ist eine (abzählbare) Basis von V.

$\Phi(f,g) := \int_{-1}^{1} f(t)g(t)dt$ definiert ein Skalarprodukt auf V.

Wendet man das Schmidt'sche Orthonormierungs-Verfahren auf B an, so erhält man als Φ-Orthonormalbasis eine Familie $(L_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ von Polynomabbildungen; man kann zeigen, daß diese-bis aufs Vorzeichen - durch

$$L_n(x) := \frac{1}{2^n n!}\,\frac{\sqrt{2n+1}}{2}\,\frac{d^n}{dx^n}\,((1-x^2)^n) \quad \text{für } x\in\mathbb{R}$$

gegeben sind .

L_n heißt <u>Legendre-Polynom</u> vom Grad n.

(32.7) Korollar

Jeder Prähilbertraum endlicher oder abzählbar-unendlicher Dimension besitzt eine Φ-Orthonormalbasis.

Wie wir in (32.3) bemerkten, gilt im endlich-dim. Falle für die Fundamentalmatrix von Φ bzgl. einer Φ-ONB B:

$$\underline{M_B(\Phi) = E_n.}$$

Wegen $(\xi_1,\ldots,\xi_n)E_n\begin{pmatrix}\bar{\eta}_1\\ \vdots\\ \bar{\eta}_n\end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{n}\xi_i\bar{\eta}_i$ ergibt sich

(32.8) Korollar

Ist (V,Φ) ein endlich-dim. Prähilbertraum, so existiert eine Basis $B = (e_1,\ldots,e_n)$ derart, daß für alle Vektoren

$$x = \begin{pmatrix}\xi_1\\ \vdots\\ \xi_n\end{pmatrix}_B \quad \text{und} \quad y = \begin{pmatrix}\eta_1\\ \vdots\\ \eta_n\end{pmatrix}_B \quad \text{gilt}$$

$$\boxed{(1) \quad \Phi(x,y) = \sum_{i=1}^{n}\xi_i\bar{\eta}_i} \quad \text{und}$$

$$(2) \quad \xi_i = \Phi(x,e_i) \quad \text{für alle } i \in \{1,\ldots,n\}$$

Damit ist es uns im Falle $\mathbb{R}^2$ bzw. $\mathbb{R}^3$ trotz der relativ allgemeinen Definition des "Skalarprodukts" gelungen, für dieses eine Darstellung ähnlich der des kanonischen Skalarprodukts zu erreichen: Bezüglich einer orthonormalen (nicht mehr notwendig der kanonischen) Basis ist $\Phi(x,y) = \mathfrak{x}^T\mathfrak{y}$.

M ↓ In einer Anmerkung zu Satz (32.4) hatten wir schon angedeutet, daß sich $\Phi(x,e_i)$ als Orthogonalprojektion von x auf e_i interpretieren läßt. Dies wollen wir nun präzisieren. Zunächst definieren wir den Begriff "(Parallel-) Projektion". Dazu ↑ M ziehen wir eine nur scheinbar schwache Eigenschaft heran:

(32.9) Definition

Sei V ein K-VR (K beliebiger Körper).

(a) Dann heißt $p \in \mathrm{Hom}_K(V,V)$ eine (Parallel)-Projektion von V in sich, wenn gilt:

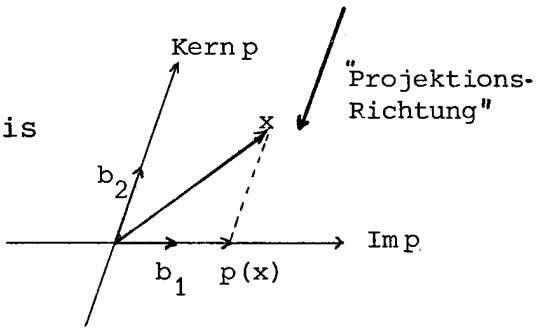
$$p \circ p = p \qquad \text{(Idempotenz von p).}$$

(b) Ist $U = \mathrm{Im}\, p$ und $N = \mathrm{Kern}\, p$, so heißt die Projektion p auch Projektion von V auf U längs N:

N heißt Projektionsrichtung von p.

Bsp.: V 2-dim $\mathbb{R}$ — VR, $B = (b_1, b_2)$ Basis

$$p : \begin{cases} V \longrightarrow V \\ \binom{\xi}{\eta}_B \longmapsto \binom{\xi}{0}_B \end{cases}$$



$p \circ p = p$ und $\mathrm{Im}\, p = \langle b_1 \rangle$, $\mathrm{Kern}\, p = \langle b_2 \rangle$.

(32.10) Eigenschaften

(a) Sei p Projektion von V in sich. Dann gilt $V = \mathrm{Im}\, p \oplus \mathrm{Kern}\, p$

(b) Umgekehrt:

Ist $V = U \oplus N$ mit UR'en U und N, so existiert eine Projektion p mit $\mathrm{Im}\, p = U$ und $\mathrm{Kern}\, p = N$.

Anmerkung: Ist p Projektion von V auf U längs N, so lässt sich $v \in V$ nach 32.10 eindeutig darstellen als $v = u + w$ mit $u \in U = \mathrm{Im}\, p$ und $w \in N = \mathrm{Kern}\, p$. Es ist dann (für geeignetes $u' \in U$):

$p(v) = p(u) + \mathfrak{o} = p(p(u')) = p(u') = u$, also

$$p(u + w) = u \ .$$

p hat also das Verhalten, das man sich anschaulich von einer Parallelprojektion vorstellt.

<u>Beweis von (32.10)</u> (a) Sei p Parallelprojektion von V in sich.

Für $v \in V$ gilt:

(i) $p(v - p(v)) = p(v) - p^2(v) = p(v) - p(v) = \mathfrak{o} \Rightarrow v - p(v) \in \operatorname{Kern} p \Rightarrow$

$v = (v - p(v)) + p(v) \in \operatorname{Kern} p + \operatorname{Im} p$.

(ii) $v \in \operatorname{Kern} p \cap \operatorname{Im} p \Rightarrow \exists v' : v = p(v') \wedge v \in \operatorname{Kern} p \Rightarrow \exists v'$:

$\mathfrak{o} = p(v) = p^2(v') = p(v') = v$

Daher $\operatorname{Kern} p \cap \operatorname{Im} p = \mathfrak{o}$

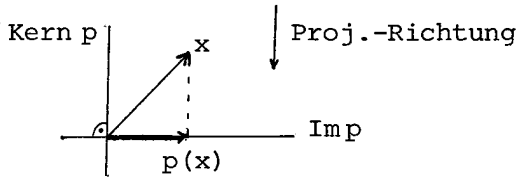
(b) Ist $V = U \oplus N$, so existiert eine eindeutige Darstellung von $v \in V$ der Form $v = u + w$ mit $u \in U$, $w \in N$.

$$p : \begin{cases} V \longrightarrow V \\ v = u + w \longmapsto u \end{cases}$$ hat die geforderten Eigenschaften □

<u>(32.11) Definition</u>

Sei (V, Φ) ein Prähilbertraum.

Eine Parallelprojektion p von V in sich heißt <u>Φ-Orthogonalprojektion</u>, falls $\operatorname{Im} p \perp_\Phi \operatorname{Kern} p$ gilt.



<u>(32.12) Satz</u>

Sei (V, Φ) Prähilbertraum, U ein endlich-dim. UR von V mit ON-Basis $(e_1, \ldots, e_m)$. Dann gilt

(1) Ist p Φ-Orthogonalprojektion auf $U (= \operatorname{Im} p)$, so gilt für alle $x \in V$:

$$p(x) = \sum_{i=1}^{m} e_i \ \Phi(x, e_i)$$

(2) Definiert man $p: \begin{cases} V \longrightarrow V \\ x \longrightarrow \sum_{i=1}^{m} e_i \Phi(x,e_i) \end{cases}$ so ist p Φ-Orthogonalprojektion auf V mit $\operatorname{Im} p = U$ und $\operatorname{Kern} p = U^{\perp\Phi}$.

Anmerkung: Die Φ-Orthogonalprojektionen auf einen endlich - dim. UR existieren also und sind eindeutig bestimmt. Ist speziell $U = \langle e_j \rangle$, so ergibt sich $p(x) = e_j \Phi(x,e_j)$, d.h. $\Phi(x,e_j)$ ist - wie oben schon anschaulich angeführt - die Orthogonalprojektion von x auf $\langle e_j \rangle$.

Beweis von 32.12

(1) $x \in V$ hat die Darstellung $x = u + w$ mit $u \in U = \operatorname{Im} p$ und $w \in \operatorname{Kern} p \subseteq U^{\perp\Phi}$ (vgl. 32.10(a) und 32.11). Nach der Anmerkung zu (32.10) gilt $p(x) = u$. Da $(e_1,\ldots,e_m)$ ON-Basis von U ist, ergibt sich wie im Beweis zu (32.4) $u = \sum_{i=1}^{m} e_i \Phi(u,e_i)$. Somit erhalten wir:

$$p(x) = u = \sum_{i=1}^{m} e_i \Phi(u,e_i) = \sum_{i=1}^{m} e_i \Phi(x-w,e_i) = \sum_{i=1}^{m} e_i \Phi(x,e_i) - \sum_{i=1}^{m} e_i \Phi(w,e_i).$$

Wegen $w \in U^{\perp\Phi} = \langle e_1,\ldots,e_m \rangle^{\perp\Phi}$ ist die zweite Summe gleich $\mathcal{O}$.

(2) (i) p ist wohldefiniert und linear.

(ii) $p^2(x) = p(\sum_{i=1}^{m} e_i \Phi(x,e_i) = \sum_{i=1}^{m} p(e_i)\Phi(x,e_i) = \sum_{i=1}^{m} e_i \Phi(x,e_i) = p(x)$.

(iii) $\operatorname{Im} p = \langle e_1,\ldots,e_m \rangle = U$;

(iv) $U^{\perp\Phi} \subseteq \operatorname{Kern} p = \{x \mid \Phi(x,e_i) = 0 \text{ für alle } i=1,\ldots,m\} \subseteq U^{\perp\Phi}$. □

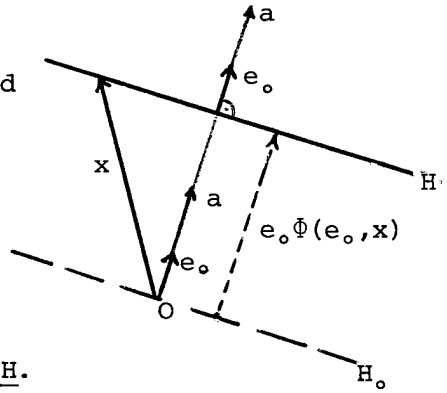
Anwendungsbeispiel*:

Sei $V = \mathbb{R}^n$ und Φ das kanonische Skalarprodukt. Dann läßt sich nach (14.12) eine beliebige Hyperebene H durch eine Gleichung der Form

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \xi_i = \beta \qquad \text{mit } (\alpha_1,\ldots,\alpha_n) \in \mathbb{R}^n - \{(0,\ldots,0)\},\ \beta \in \mathbb{R}$$

beschreiben. Durch Übergang zu $a = (\alpha_1,\ldots,\alpha_n)$ und $x = (\xi_1,\ldots,\xi_n)$ und

Verwendung von Φ erhält man $H=\{x \in \mathbb{R}^n \mid \Phi(a,x) = \beta\}$. Die Hyperebene H ist parallel zur Hyperebene $H_o = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \Phi(a,x) = 0\}$. Daher ist a ein Vektor, der senkrecht auf H_o und damit auf H steht.



Um (32.12) anwenden zu können, normieren wir a und setzen $e_o := \frac{1}{\|a\|_\Phi} a$ sowie $\delta_o := \frac{1}{\|a\|_\Phi} \beta$.

Dann lautet die Gleichung von H:

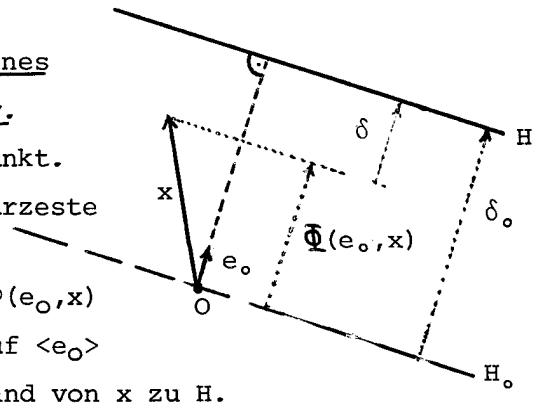
$$\boxed{\Phi(e_o,x) - \delta_o = 0 \qquad (\text{mit } \|e_o\|_\Phi = 1)}$$

Sie heißt <u>Hessesche Normalform der Gleichung von H</u>.

(s. die Ergänzung zu (1.2) und (1.3) im Skript LA I!). Ist x_p ein Punkt von H, so gilt übrigens $\delta_o = \Phi(e_o,x_p)$; insgesamt also $\boxed{\Phi(e_o,\ x-x_p) = 0}$

Der Vektor $e_o\Phi(e_o,x)$ ist nun nach (32.12) die Orthogonalprojektion von x auf $\langle e_o \rangle$; deren Länge ist gleich $|\Phi(e_o,x)|$. Wir sprechen daher von $\Phi(e_o,x)$ als der mit Vorzeichen versehenen Länge der Orthogonalprojektion.

Für alle $x \in H$ ist diese Länge gleich δ_o. Dabei ist δ_o <u>der mit Vorzeichen versehene Abstand von H zum Nullpunkt</u>.*)



(Allgemein versteht man unter dem <u>Abstand eines Punktes P von einer Geraden</u> g (für n = 2) <u>bzw. Ebene</u> E (für n = 3) den Abstand zum Lotfußpunkt. Man kann zeigen (s. 32.14), daß dies der kürzeste Abstand von P zu einem Punkt g bzw. E ist.)

Für einen beliebigen Punkt $x \in \mathbb{R}^n \setminus H$ ist $e\Phi(e_o,x)$ ebenfalls die Orthogonalprojektion von x auf $\langle e_o \rangle$ und damit, $-\Phi(e_o,x) + \delta_o$ der gerichtete Abstand von x zu H.

In jedem Fall ist also $\boxed{\delta := |\Phi(e_o,x) - \delta_o|}$ <u>der Abstand von</u> x <u>zu</u> H. **)

Eine weitere Folgerung aus 32.12 ist:

<u>(32.13) Satz (Existenz des orthogonalen Komplements)</u>

Ist (V,Φ) Prähilbertraum und U ein endlich-dim UR von V, dann gilt

$$V = U \oplus U^{\perp_\Phi}$$

$U^{\perp_\Phi}$ heißt das <u>orthogonale Komplement</u> von U in V.

<u>Beweis</u>:

(32.10), (32.12)(2).

*) δ_o ist positiv oder negativ, jenachdem e_o oder $-e_o$ als Normalenvektor gewählt ist.

**) Dabei hat $-\Phi(e_o,x)+\delta_o$ das gleiche Vorzeichen wie δ_o, wenn x auf der gleichen Seite wie der Nullpunkt liegt.

Literatur-Hinweis zur Frage der Existenz eines orth. Komplements im allgemeinen Fall: z.B.: Dieudonné: "Foundations of modern Analysis".

Wir behandeln nun folgende wichtige Eigenschaft der Orthogonalprojektion:

(32.14) Satz

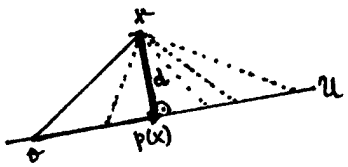
Sei (V,Φ) Prähilbertraum, U endlich-dim. UR von V. Sei ferner p die Φ-Orthogonalprojektion von V auf U. Dann gilt für $x \in V$:

$$d_\Phi(x,p(x)) = \min_{u \in U} d_\Phi(x,u).$$

Anmerkung:

p(x) ist also ein Element von U, das unter allen Elementen von U minimalen Abstand von x hat.

Man nennt daher p(x) auch die Bestapproximation von x mit Elementen aus U bzgl. des Skalarprodukts Φ.



Beweis von 32. 14

$$d_\Phi(x,u)^2 = \|x-u\|_\Phi^2 = \Phi(x-u,x-u) = \Phi((x-p(x))+(p(x)-u),(x-p(x))+((p(x)-u))$$

$$= \|x-p(x)\|^2 + \|p(x)-u\|^2 + \underbrace{\Phi(x-p(x),p(x)-u)}_{=0} + \underbrace{\Phi(p(x)-u,x-p(x))}_{=0}$$

da $x-p(x) \in U^{\perp_\Phi}$

und $p(x)-u \in U$

$$= d_\Phi(x,p(x))^2 + \underbrace{\|p(x)-u\|^2}_{\geq 0}$$

□

Anmerkung: p(x) ist sogar das einzige Element von U mit minimalem Abstand.

Falls der Abstand nicht von einem Skalarprodukt herrührt, braucht eine Bestapproximation nicht eindeutig bestimmt zu sein. Z.B. ist in $\mathbb{R}^2$, versehen mit der max-Norm, jeder Punkt aus $\{(\xi,0) \mid \xi \in [-1,1]\}$ Bestapproximation von (0,1) mit Elementen von $(1,0)\mathbb{R}$.

Beispiel einer Bestapproximation mittels Orthogonalprojektion

(vgl. Klingenberg/Klein, LA u. Analytische Geometrie II p.300) :

Seien $K = \mathbb{R}$, $V = \mathcal{C}([-1,1],\mathbb{R})$, $\Phi(f,g) := \int_{-1}^{1} f(t)g(t)dt$,

$U = \{g \mid g$ reelle Polynomabbildung von Grad ≤ 3, eingeschränkt auf $[-1,1]\}$,

sowie als konkretes Beispiel: $f_1 : [-1,1] \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = |x|$.

Wir wollen f_1 durch ein Element aus U approximieren.

Da $\dim_{\mathbb{R}} U = 4$ gilt, können wir Satz (32.12) anwenden: Es existiert eine Orthogonalprojektion p von $\mathcal{C}([-1,1],\mathbb{R})$ auf U. Wir wollen das Bild $p(f_1)$ bestimmen. Um nun nicht eine ON-Basis von U, bestehend aus Legendre-Polynomen benutzen zu müssen, beachten wir, daß für das Bild eines Vektors unter einer Orthogonalprojektion folgendes gilt:

(32.15) Hilfssatz

Seien (V,Φ) Prähilbertraum, U endlich-dim. UR von V,

$B = (b_1,\ldots,b_m)$ Basis von U (nicht notwendig orthonormal),

p Orthogonalprojektion von V auf U sowie $x \in V$ und $p(x) = \sum_{i=1}^{m} b_i\alpha_i$;

dann gilt $\Phi(x,b_j) = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \Phi(b_i,b_j) = \Phi(p(x),b_j)$ für $j=1,\ldots,m$.

Beweis: Es ist $x = p(x) + w$ mit $w \in U^{\perp_\Phi}$ und daher

$$\Phi(x,b_j) = \Phi(p(x) + w,b_j) = \Phi(p(x),b_j) + \underbrace{\Phi(w,b_j)}_{=0} =$$

$$\Phi(\sum_{i=1}^{m} b_i\alpha_i,b_j) = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i\Phi(b_i,b_j). \qquad \square$$

Fortsetzung des Beispiels

Wir wählen $(b_0,\ldots,b_3)$ mit $b_i := \begin{cases} [-1,1] \to \mathbb{R} \\ x \longmapsto x^i \end{cases}$ als Basis von U

und setzen $p(f_1) = \sum_{i=0}^{3} b_i\alpha_i$; mit (32.15) gilt dann

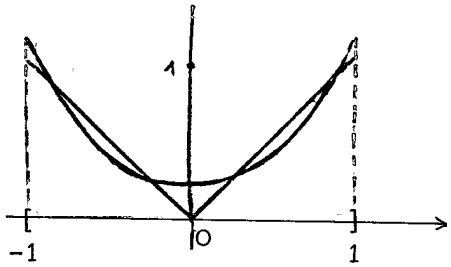
$$\sum_{i=0}^{3} \alpha_i \int_{-1}^{+1} t^i t^j dt = \underbrace{\int_{-1}^{1} |t|\, t^j dt}_{\Phi(f_1,b_j)} = \int_{-1}^{0} -t^{j+1}dt + \int_{0}^{1} t^{j+1}dt \qquad \text{für } j = 0,\ldots,3 .$$

Für die Koeffizienten α_i ergibt sich das LGS:

$$\sum_{i=0}^{3} \frac{1-(-1)^{i+j+1}}{i+j+1}\,\alpha_i = \frac{1}{j+2}\,(1+(-1)^{j+2}) \qquad j \in \{0,1,2,3\},$$

aus dem $\alpha_0 = \frac{3}{16}$, $\alpha_2 = \frac{15}{16}$ und $\alpha_1 = \alpha_3 = 0$ und damit (wegen der Existenz der Projektion auch umgekehrt)

$$p(f_1) : \begin{cases} [-1,1] \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \frac{3}{16} + \frac{15}{16}\,x^2 \end{cases}$$ folgt.



$$g_1 : \begin{cases} [-1,1] \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \frac{3}{16} + \frac{15}{16}\,x^2 \end{cases}$$ ist also die Bestapproximation von $f_1 : \begin{cases} [-1,1] \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto |x| \end{cases}$

durch eine Polynomabbildung vom Grad ≤ 3 (bzgl. des Skalarprodukts $\Phi(f,g) = \int_{-1}^{1} f(t)g(t)dt$), also das Polynom g vom Grad ≤ 3, für das

$$\sqrt{\int_{-1}^{1} [f_1(t) - g(t)]^2 dt}$$ minimal ist.