§ 31 Skalarprodukt und Norm

Generalvoraussetzung:
$\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$, V $\mathbb{K}$-VR

(31.1) Definition

(a) Jede positiv definite hermitesche Form Φ auf V heißt Skalarprodukt.

Also: Φ Skalarprodukt auf $V :\Longleftrightarrow$

$\Phi : V \times V \longrightarrow \mathbb{K}$ mit

(1) $\Phi(x,x) \in \mathbb{R}$ (folgt auch aus (3))

$\Phi(x,x) \geq 0$ und $\Phi(x,x) = 0 \Leftrightarrow x = \mathcal{O}$

(2) $\Phi(x_1 \lambda + x_2 \mu, y) = \lambda \Phi(x_1, y) + \mu \Phi(x_2, y)$

(3) $\Phi(x,y) = \overline{\Phi(y,x)}$

für alle $x, x_1, x_2, y \in V, \lambda, \mu \in \mathbb{K}$

Im Falle $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ist Φ symmetrische positiv-definite Bilinearform.

(b) Ist Φ Skalarprodukt auf V, dann heißt (V, Φ) Prähilbertraum (reeller bzw. komplexer VR mit Skalarprodukt).

Im Falle $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ heißt ein Prähilbertraum euklidischer (Vektor-) Raum,

im Falle $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ heißt ein Prähilbertraum unitärer (Vektor-) Raum.

Beispiele

(1) $V = \mathbb{K}^n$; Φ kanonisches Skalarprodukt (gewöhnliches Skalarprodukt):

$$\Phi(x,y) := \sum_{i=1}^{n} \xi_i \overline{\eta}_i = x\overline{y}^T \quad (\text{für } x=(\xi_1,\dots,\xi_n),\ y=(\eta_1,\dots,\eta_n) \in \mathbb{K}^n)$$

(Φ ist positiv definit wegen $\Phi(x,x) = \sum_{i=1}^{n} \xi_i\overline{\xi_i} = \sum_{i=1}^{n} |\xi_i|^2 > 0$ für $x \neq \Theta$)

(2) Sei I kompaktes reelles Intervall und

- $V = \mathcal{C}(I,\mathbb{C})$ (bzw. $V = \mathcal{C}(I,\mathbb{R})$) der VR der stetigen komplexen (bzw. reellen) Funktionen auf I.

$\Phi(f,g) := \int_I f(t)\overline{g(t)}\,dt$ definiert eine hermitesche Form:

U.a. gilt

$$\Phi(f,f) = \int_I f(t)\overline{f(t)}\,dt = \int_I |f(t)|^2 dt \geq 0$$
$$= 0 \text{ nur für } f = 0$$

Daher ist (V,Φ) Prähilbertraum

(3) $\mathbb{K} = \mathbb{C}$

$$\ell^2 := \{(\xi_i)_{i\in\mathbb{N}} \mid (\xi_i)_{i\in\mathbb{N}} \text{ komplexe Folge} \wedge \sum_{i\in\mathbb{N}} |\xi_i|^2 \text{ konvergent}\}$$

Addition und S-Multiplikation komponentenweise definiert,

ℓ^2 ist $\mathbb{C}$-VR (Beweis ?)

$\Phi((\xi_i)_{i\in\mathbb{N}},(\eta_i)_{i\in\mathbb{N}}) := \sum_{i=1}^{\infty} \xi_i\overline{\eta}_i$ ist Skalarprodukt auf ℓ^2

(Bew. der Konvergenz ähnlich zum folgenden Beweis der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung, s.u.)

(ℓ^2,Φ) ist Prähilbertraum, der sog. <u>Hilbert'sche Folgenraum</u>

(4) Sei G reelle symmetrische $n \times n$-Matrix mit positiven Eigenwerten und besitze G eine Eigenbasis $(b_1,\dots,b_n)$ mit $b_i^T \cdot b_j = 0$ für $i \neq j$.
Dann definiert $\Phi(x,y) := x^T G y$ ein Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^n$. Denn Φ ist symmetrische Bilinearform und es gilt

$$\Phi(\mathfrak{v},\mathfrak{v})=(\sum_{i=1}^n b_i\alpha_i)^T G(\sum_{i=1}^n b_i\alpha_i)=(\sum_{i=1}^n b_i\alpha_i)^T \sum_{j=1}^n b_j\lambda_j\alpha_j$$ (mit den Eigenwerten $\lambda_1,\dots,\lambda_n$)

$$=\sum_{i,j=1}^n (b_i^T b_j)\alpha_i\alpha_j\lambda_j = \sum_{i=1}^n b_i^T b_i\alpha_i^2\lambda_i \geq 0$$

und $\Phi(\mathfrak{v},\mathfrak{v})=0 \Leftrightarrow \alpha_1^2=\dots=\alpha_n^2=0 \Leftrightarrow \mathfrak{v}=0.$ □

(31.2) Wichtige Ungleichungen

Sei (V,Φ) Prähilbertraum; dann gilt für alle $x,y\in V$:

(a) Ungleichung von Cauchy-Bunyakowski-Schwarz

$$\boxed{|\Phi(x,y)|^2 \leq \Phi(x,x)\cdot\Phi(y,y)}$$

(b) Minkowskische Ungleichung

$$\sqrt{\Phi(x+y,x+y)} \leq \sqrt{\Phi(x,x)} + \sqrt{\Phi(y,y)}$$

Beweis (a) Ist $y=0$, so $\Phi(x,y)=0=\Phi(y,y)$:

$(\Phi(x,0)=\Phi(x,0+0)=\Phi(x,0)+\Phi(x,0) \Rightarrow \Phi(x,0)=0)$

Sei also $y\neq 0$. Da Φ positiv definit ist, gilt $\Phi(y,y)\neq 0$

und $\alpha := -\dfrac{\Phi(x,y)}{\Phi(y,y)}$ ist definiert.

$$0\leq \Phi(x+y\alpha,x+y\alpha)=\Phi(x,x)+\alpha\Phi(y,x)+\bar\alpha\Phi(x,y)+\alpha\bar\alpha\Phi(y,y)$$

$$=\Phi(x,x)-\frac{\Phi(x,y)}{\Phi(y,y)}\overline{\Phi(x,y)}-\frac{\overline{\Phi(x,y)}}{\Phi(y,y)}\Phi(x,y)+\frac{|\Phi(x,y)|^2}{\Phi(y,y)^2}\Phi(y,y)$$

$$=\frac{\Phi(x,x)\cdot\Phi(y,y)-2|\Phi(x,y)|^2+|\Phi(x,y)|^2}{\Phi(y,y)} \underset{\Phi(y,y)\geq 0}{\Rightarrow} 0\leq\Phi(x,x)\cdot\Phi(y,y)-|\Phi(x,y)|^2$$

Beweis von (b) s. Seite 116a !

Anmerkung: Anwendung von (31.2)(a) auf Beispiel (2) ergibt z.B.

$$\left|\int_I f(t)\overline{g(t)}\,dt\right|^2 \leq \int_I |f(t)|^2dt\cdot\int_I|g(t)|^2dt$$ für alle auf I stetigen komplexwertigen Funktionen f und g.

Die Definition der Länge eines Vektors in $\mathbb{R}^3$ gemäß Beispiel (1) von § 30 legt folgende Verallgemeinerung nahe:

(31.3) Definition

Sei (V,Φ) Prähilbertraum; für $x\in V$ definieren wir

$$\|x\|_\Phi := \sqrt{\Phi(x,x)}.$$

Beweis von (b):
Es gilt

$$\begin{aligned}\Phi(x+y,x+y) &= \Phi(x,x)+\Phi(x,y)+\Phi(y,x)+\Phi(y,y)\\ &= \Phi(x,x)+\Phi(x,y)+\overline{\Phi(x,y)}+\Phi(y,y)\\ &= \Phi(x,x)+2\mathbf{Re}(\Phi(x,y))+\Phi(y,y)\end{aligned}$$

(Hierbei bezeichnet $\mathbf{Re}(z)$ den Realteil a von $z=a+bi$ mit $a,b\in\mathbb{R}$.)
Aus der Ungleichung von Cauchy-Schwarz-Bunyakowski (CSB) folgt:

$$\begin{aligned}\big[\mathbf{Re}(\Phi(x,y))\big]^2 &\leq \big[\mathbf{Re}(\Phi(x,y))\big]^2+\big[\mathbf{Im}(\Phi(x,y))\big]^2\\ &= |\Phi(x,y)|^2 \overset{(CSB)}{\leq} \Phi(x,x)\cdot\Phi(y,y),\end{aligned}$$

damit

$$2\mathbf{Re}(\Phi(x,y)) \leq 2|\mathbf{Re}(\Phi(x,y))| \leq 2\sqrt{\Phi(x,x)}\cdot\sqrt{\Phi(y,y)},$$

folglich

$$\begin{aligned}\Phi(x+y,x+y) &\leq \Phi(x,x)+2\sqrt{\Phi(x,x)}\cdot\sqrt{\Phi(y,y)}+\Phi(y,y)\\ &= \big[\sqrt{\Phi(x,x)}+\sqrt{\Phi(y,y)}\big]^2. \qquad \square\end{aligned}$$

(31.4) Satz und Definition

> Ist (V,Φ), Prähilbertraum, so definiert $\|\cdot\|_\Phi$ eine Norm auf V.

Dabei heißt eine Abbildung

$$\|\cdot\| : \begin{cases} V \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \|x\| \end{cases}$$

Norm auf (dem $\mathbb{K}$-VR) V, wenn gilt

(a) $\forall x \in V \quad \|x\| \geq 0$, $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = \Theta$ (strenge positive Definitheit)

(b) $\forall x \in V,\ \lambda \in \mathbb{K} : \|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$ (positive Homogenität)

(c) $\forall x,y \in V : \quad \|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (Dreiecks-Ungleichung)

Ist $\|\cdot\|$ eine Norm auf dem $\mathbb{K}$ VR V, so heißt $(V,\|\cdot\|)$ normierter Raum.

Also

> Für jeden Prähilbertraum (V,Φ) ist $(V,\|\cdot\|_\Phi)$ normierter Raum

Jeder Prähilbertraum kann als spezieller normierter Raum aufgefaßt werden, dessen Norm von einem Skalarprodukt induziert wird.

Beweis von (31.4)

(a) $\|x\|_\Phi = \sqrt{\Phi(x,x)} \geq 0$

$\|x\|_\Phi = 0 \Leftrightarrow \Phi(x,x) = 0 \underset{\Phi \text{ pos.def.}}{\Longleftrightarrow} x = \Theta$

(b) $\|\lambda x\|_\Phi = \sqrt{\Phi(\lambda x, \lambda x)} = \sqrt{\lambda\bar{\lambda}\Phi(x,x)} = |\lambda| \cdot \sqrt{\Phi(x,x)} = |\lambda|\ \|x\|_\Phi$

(c) Minkowskische Ungleichung (31.2.b)

Die Norm $\|x\|_\Phi$ übernimmt hier die Rolle der elementaren mathematischen Länge eines Vektors.

Beispiel (1) $V = \mathbb{K}^n$, kanonisches Skalarprodukt, $x = (\xi_1,\ldots,\xi_n)$

$$\|x\| = \sqrt{\Phi(x,x)} = \sqrt{\sum_i \xi_i \bar{\xi}_i} = \sqrt{\sum_i^n |\xi_i|^2}$$ (euklidische Norm, Länge von x)

(2) $V = \mathcal{C}(I,\mathbb{K})$, $\Phi(f,g) := \int_I f(t)\overline{g(t)}\,dt$ für $f,g \in V$

$\|f\|_\Phi = \sqrt{\int_I |f(t)|^2 dt}$

(3) $V = \ell^2$ (Hilbertscher Folgenraum) (vgl. Bsp. (3) nach 31.1)

$\Phi((\xi_i),(\eta_i)) = \sum_{i=1}^{\infty} \xi_i \bar{\eta}_i$

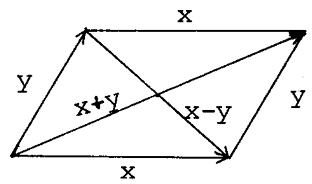
$\|(\xi_i)_{i\in\mathbb{N}}\|_\Phi = \sqrt{\sum_{i=1}^{\infty} |\xi_i|^2}$.

(31.5) Anmerkungen

(a)* Sei $(V,\|\cdot\|)$ ein normierter Raum über $\mathbb{K}$.
Genau dann wird die Norm $\|\cdot\|$ durch ein Skalarprodukt induziert (d.h. es gilt $\|\cdot\| = \|\cdot\|_\Phi$), wenn die sogenannte Parallelogrammgleichung gilt:

$$\boxed{\forall x,y \in V: \qquad \|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)}$$

Beweis der Gültigkeit für $\|\cdot\|_\Phi$:



$\Phi(x+y\ ,x+y) + \Phi(x-y,x-y) =$
$\Phi(x,x) + \Phi(x,y) + \Phi(y,x) + \Phi(y,y) +$
$\Phi(x,x) - \Phi(y,x) - \Phi(x,y) + \Phi(y,y) = 2(\Phi(x,x) + \Phi(y,y))$

Umkehrung: Satz von Neumann, Bew. s. Literatur!

(b) Es gibt normierte Räume, in denen die Parallologrammgleichung nicht gilt; dort rührt die Norm also nicht von einem Skalarprodukt her:
Bsp. $V = \mathbb{R}^2$, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Für $x = (\xi_1,\xi_2)$ definiert $\|x\| := \max(|\xi_1|,|\xi_2|)$ eine Norm mit $\|e_1 + e_2\|^2 + \|e_1 - e_2\|^2 = 1 + 1 = 2$

$2(\|e_1\|^2 + \|e_2\|^2) = 2(1+1)$

(c) Ist $(V,\|\cdot\|)$ normierter Raum, so definiert $d(x,y) := \|x-y\|$ eine Metrik d auf V.
Dabei heißt die Abbildung $d: M \times M \longrightarrow \mathbb{R}$ Metrik (Abstand) auf der Menge M (und (M,d) metrischer Raum), falls für alle $x,y,z \in M$ gilt:

(1) $d(x,y) \geq 0$
$d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$
(2) $d(x,y) = d(y,x)$
(3) $d(x,y) + d(y,z) \geq d(x,z)$.

Damit ergibt sich als Korollar zu (31.4):

(31.6) Korollar

> Ist (V,Φ) Prähilbertraum, so ist durch
>
> $$d_\Phi(x,y) := \sqrt{\Phi(x-y,x-y)}$$
>
> eine Metrik (ein Abstand) auf V definiert.

Jeder Prähilbertraum ist also als spezieller metrischer Raum auffaßbar.

(d) Damit ist es sinnvoll, einen Prähilbertraum auf CF-Vollständigkeit zu untersuchen, d.h. zu prüfen, ob jede Cauchy-Folge konvergiert.

Ein Prähilbertraum (V,Φ) heißt Hilbertraum, falls V bzgl. d_Φ CF-vollständig ist.

Beispiele (1) Jeder endlich-dim Prähilbertraum ist ein Hilbertraum (da sogar jeder endlich-dim. normierte Raum CF-vollständig ist (Bew. s.z.B. Doerk, Huppert, Kroll LA II p.127)-

(2) $\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$ mit $\Phi(f,g) = \int_0^1 f(t)g(t)dt$ ist nicht CF-vollständig und damit kein Hilbertraum.

(3) (ℓ^2,Φ), der Hilbertsche Folgenraum, ist ein Hilbertraum.

Literatur: G.F. Simmons: Introduction to Topology and Modern Analysis 1963
oder eine Einführung in die Funktionalanalysis.