§ 28 Eigenwerte, Charakteristisches und Minimal-Polynom

(28.1) Definition (Wiederholung)

(1) Sei $f \in \mathrm{End}_K V$. Ein Skalar $\lambda \in K$ heißt Eigenwert (EW) von f, wenn ein Vektor $v \in V - \{0\}$ existiert mit

$$f(v) = \lambda v := v\lambda \ .$$

In diesem Fall heißt v Eigenvektor (EV) von f zum EW λ.

(2) Sei $A \in K^{(n,n)}$. Ein Skalar $\lambda \in K$ heißt Eigenwert von A, wenn es einen Vektor $\mathfrak{w} \in K^{(n,1)} - \{\mathfrak{o}\}$ gibt mit

$$A\mathfrak{w} = \lambda \mathfrak{w} \ .$$

In diesem Fall heißt $\mathfrak{w}$ Eigenvektor von A zum EW λ.

(28.2) (a) Anmerkung: Sei $\dim_K V < \infty$!

Ist $f \in \mathrm{End}\, V$ und B Basis von V, so gilt

$$v \in V - \{0\} \text{ ist EV von } f \Leftrightarrow \mathfrak{w} = M_B(v) \text{ ist EV von } A = M_B^B(f)$$

$$\lambda \in K \text{ ist EW von } f \Leftrightarrow \lambda \in K \text{ ist EW von } A = M_B^B(f) \ .$$

weiter auf Seite 87

(b) Folgerungen: (i) Die EW'e von $f \in \mathrm{End}_K V$ sind genau die EW'e einer beliebigen Matrixdarstellung von f. Damit sind mehrere Betrachtungsweisen möglich.

(ii) Ähnliche Matrizen (- sie stellen bzgl. geeigneter Basen denselben Endomorphimus dar -) haben die gleichen Eigenwerte

Setzen wir zunächst voraus, dass wir einen Eigenwert von f (bzw. A) kennen.

(28.3) Berechnung der Eigenvektoren bei gegebenen Eigenwerten

(1) Seien $f \in \mathrm{End}_K V$, $\lambda \in K$, λ EW von f, $x \in V$; dann gilt

x ist EV von f zum EW λ $\Leftrightarrow$ x ist nicht-triviale Lösung von

$$(f - \lambda \mathrm{id}_V)(x) = 0$$

(2) Seien $A \in K^{(n,n)}$, $\lambda \in K$, λ EW von A, $\mathfrak{x} \in K^{(n,1)}$; dann gilt:

$\mathfrak{x}$ ist EV von A zum EW λ $\Leftrightarrow$ $\mathfrak{x}$ ist nicht triviale Lösung von

$$(A - \lambda E_n)\mathfrak{x} = 0.$$

Die Eigenvektoren zu einem festen Eigenwert λ sind also die Lösungen ungleich 0 eines homogenen LGS's. Damit ist Satz (10.9) anwendbar (LA I p.134).

(28.4) Folgerung und Definition

(a) Ist λ EW von $f \in \mathrm{End}_K V$, dann bilden die zu λ gehörenden Eigenvektoren zusammen mit dem Nullvektor einen UR von V:

(b) $V_{f,\lambda} := \{x \in V \mid f(x) = \lambda x\} = \mathrm{Kern}\ (f - \lambda \mathrm{id}_V)$ heißt Eigenraum von λ.

Eig$(f,\lambda) :=$

Berechnung der Eigenwerte (s. auch die Einleitung des Kapitels)
Wie wir bereits feststellten, gilt folgendes:

(28.5) Satz

(1) Seien $\dim_K V = m < \infty$, $f \in \mathrm{End}_K(V)$ und $\lambda \in K$, sei ferner B geordnete Basis von V und $A = M_B^B(f)$. Dann gilt

$$\boxed{\lambda \text{ EW von } f \Leftrightarrow \det(f - \lambda \mathrm{id}_V) = 0 \Leftrightarrow \det(A - \lambda E_n) = 0}$$

(2) Ist $A \in K^{(n,n)}$, $\lambda \in K$. Dann gilt

$$\boxed{\lambda \text{ EW von } A \Leftrightarrow \det(A - \lambda E_n) = 0}$$

Definitionsgemäß ist $\det(A - \lambda E_n) = \det(\alpha_{ij} - \lambda\delta_{ij}) =$
$\sum_{\pi \in \mathfrak{S}_n} \operatorname{sgn} \pi \prod_{j=1}^{n} (\alpha_{\pi(j)j} - \lambda\delta_{\pi(j)j})$.

In diesen Ausdruck geht das folgende Polynom $\chi_A \in K[X]$ über, wenn wir $\lambda \in K$ einsetzen:

$$\chi_A = \sum_{\pi \in \mathfrak{S}_n} (\operatorname{sgn} \pi) \prod_{j=1} (\alpha_{\pi(j)j} - X\delta_{\pi(j)j}).$$

(3) Die Eigenwerte von A (bzw. von f mit darstellender Matrix A) sind genau die Nullstellen des Polynoms χ_A.

Anmerkung: In Anmerkung (27.19) hatten wir festgestellt, daß sich $K[X]$ in einen Körper $L = K(X)$ einbetten lässt sowohl die Elemente von K als auch X können als Skalare aus L aufgefasst werden und daher

$\chi_A = \sum_{\pi \in \mathfrak{S}_n} (\operatorname{sgn} \pi) \cdot \prod_{j=1}^{n} (\alpha_{\pi(j)j} - X\delta_{\pi(j)j})$ als Determinante der Matrix

$$\begin{pmatrix} \alpha_{11}-X & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22}-X & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \\ \alpha_{n1} & \cdots & & \alpha_{nn}-X \end{pmatrix} = (\alpha_{ij} - X\delta_{ij})_{i,j \in \{1,\dots,n\}} = A - XE_n \text{ über } L.$$

Wir schreiben daher auch

$$\chi_A = \det(A - XE_n)$$

Vorsicht ist aber beim Einsetzen einer Matrix B für X geboten: XE_n geht dabei nicht in das Matrizenprodukt $B \cdot E_n$ über, ⚠ da $XE_n \in K[X]^{(n,n)}$ und nicht aus $K^{(n,n)}[X]$ ist. *)

(28.6) Definition

(1) Für $A \in K^{(n,n)}$ heißt das Polynom

$\chi_A := \det(A - XE_n)$ das charakteristische Polynom von A.

(2) Ist $f \in \mathrm{End}_K(V)$, $\dim_K V < \infty$ und sind ferner B geordnete Basis von V und $A = M_B^B(f)$, so heißt

$\chi_f := \chi_A$ das charakteristische Polynom von f.

Anmerkung. Das charakteristische Polynom χ_f ist nicht von der speziellen Wahl von B anhängig, da gilt:

(28.7) Satz

$\boxed{\text{Ähnliche Matrizen haben dasselbe charakteristische Polynom.}}$

Beweis. $A \approx C \Rightarrow \exists S : A = S^{-1}CS \Rightarrow \det(A - XE_n) = \det(S^{-1}CS - XE_n)$

$$\underset{\text{in } L}{=} \det(S^{-1}(C - XE_n)S) \underset{\text{in } L}{=} \det S^{-1} \det(C - XE_n) \det S = \det(C - XE_n)$$

□

Beispiele: (i) $K = \mathbb{R}$, $n = 2$, g Spiegelung an der "x-Achse"

Darstellende Matrix (bzgl. kanonischer Basis): $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

Charakteristisches Polynom:

$$\chi_g = \chi\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} 1-X & 0 \\ 0 & -1-X \end{vmatrix} = (1 - X)(-1-X) = X^2 - 1$$

Eigenwerte: $\lambda_1 = +1$, $\lambda_2 = -1$

*) Aber auch bei $K^{(n,n)}[X]$ ist Vorsicht geboten: Z.B. geht $CX - XC = 0$ für $C \in K^{(n,n)}$ durch Einsetzen einer Matrix A für X nicht immer in eine wahre Aussage über.

Eigenräume:

$$V_{g,1}: \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow -2\eta = 0 \qquad V_{1,g} = \langle (1,0) \rangle$$

$$V_{g,-1}: \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow 2\xi = 0 \qquad V_{-1,g} = \langle (0,1) \rangle$$

geometrische Interpretation: $V_{g,1}$ und $V_{g,-1}$ sind die einzigen Nullpunktsgeraden, die bei g fix bleiben!

(ii) $K = \mathbb{R}$, $n = 3$, f Drehung um "z-Achse" mit Drehwinkel $\alpha \notin \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$ (vgl. auch *Lineare Algebra I*, S. 156).

Darstellende Matrix (bzgl. kanonischer Basis)

$$A = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Charakteristisches Polynom:

$$\chi_f = \begin{vmatrix} (\cos\alpha) - X & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha - X & 0 \\ 0 & 0 & 1-X \end{vmatrix} = (1-X)[(\cos\alpha - X)^2 + \sin^2\alpha] =$$

$$= (1-X)(X^2 - 2\cos\alpha X + 1) \in \mathbb{R}[X]$$

Eigenwerte: $\lambda_1 = 1$ (einziger EW, da für $\alpha \notin \mathbb{Z}\pi$ $\lambda_{2/3} = \cos\alpha \pm \sqrt{\cos^2\alpha - 1}$ nicht reell ist)

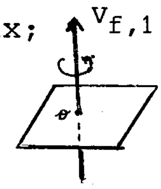
Eigenraum zu $\lambda_1 = 1$:

$$\begin{pmatrix} (\cos\alpha)-1 & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & (\cos\alpha)-1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} (\cos\alpha)-1 & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & (\cos\alpha)-1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} = 0 \wedge \xi_3 \in \mathbb{R} \text{ (beliebig)}$$

Da $\begin{vmatrix} (\cos\alpha)-1 & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & (\cos\alpha)-1 \end{vmatrix} = \cos^2\alpha - 2\cos\alpha + 1 + \sin^2\alpha = 2(1-\cos\alpha) \neq 0$ für $\alpha \notin \mathbb{Z}\pi$

hat die verbleibende Gleichung nur die triviale Lösung $\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Es ergibt sich $V_{f,1} = \mathscr{N}_3\mathbb{R}$ (Drehachse)

Keine weitere Gerade durch den Nullpunkt bleibt fix; (allerdings ist die Ebene $\langle n_1, n_2 \rangle$ f-invariant!)



(iii) $K \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}, n = 2,\ A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$;

$$\chi_A = \begin{vmatrix} 1-X & -2 \\ 1 & -1-X \end{vmatrix} = (1 - X)(-1 - X) + 2 = X^2 + 1 \text{ hat in } \mathbb{R} \text{ keine}$$

Nullstelle, in $\mathbb{C}$ die Nullstellen $i, -i$. Daher besitzt A für $K = \mathbb{R}$ keine und für $K = \mathbb{C}$ zwei Eigenwerte.

(28.8) Satz

> Ist $A = (\alpha_{ij})_{i,j} \in K^{(n,n)}$, so gilt
> grad $\chi_A = n$ und
> $\chi_A = (-1)^n X^n + (-1)^{n-1}(\text{Spur } A)X^{n-1} + \ldots + \det A.$

Hierbei bezeichnet $\overline{\underline{\text{Spur } A}} := \sum_{i=1}^{n} \alpha_{ii}$ (die Summe der Elemente der Hauptdiagonalen von A).

Beweis.

(a) Durch Induktion nach k und Entwicklung nach geeigneten Zeilen bzw. Spalten in $L = K(X)$ sieht man ein:
Ist $B \in K[X]^{(n,n)}$ eine Matrix, bei der k Einträge Polynome 1. Grades, alle übrigen Komponenten Konstanten sind, so ist det B ein Polynom höchstens k-ten Grades.

(b) Induktion nach n
Für $n = 1$ gilt $\chi_A = \det(\alpha_{11} - X) = \alpha_{11} - X$ (Spur $A = \det A = \alpha_{11}$)
Sei die Behauptung richtig für $(n \times n)$-Matrizen, und sei A eine $(n+1) \times (n+1)$-Matrix. Dann folgt durch Entwicklung in L:

$$\begin{vmatrix} \alpha_{11}-X & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1n+1} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22}-X & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \alpha_{n+11} & \cdots & & \alpha_{n+1n+1}-X \end{vmatrix} = (\alpha_{n+1n+1}-X) \begin{vmatrix} \alpha_{11}-X & \cdots & \alpha_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{n1} & \cdots & \alpha_{nn}-X \end{vmatrix} + \sum_{i=1}^{n} \alpha_{in+1} Q_i$$

Dabei sind $Q_1,\dots,Q_n$ nach (a) Polynome vom Grad $\leq n-1$. Aus der Induktions-Voraussetzung folgt:

$$\det(A - XE_{n+1}) = (\alpha_{n+1\ n+1} - X)\,[(-1)^n X^n + (-1)^{n-1}(\sum_{i=1}^{n} \alpha_{ii}) X^{n-1} + P] + R$$

(mit grad $P \leq n-2$ und grad $R \leq n-1$)

$$= (-1)^{n+1} X^{n+1} + \alpha_{n+1\ n+1} (-1)^n X^n + (-1)^n (\sum_{i=1}^{n} \alpha_{ii} X^n) + S$$

(mit grad $S \leq n-1$)

$\det(A - XE_{n+1})$ hat als absolutes Glied $\det(A - 0 \cdot E_{n+1}) = \det A$. □

(28.9) Folgerungen für $K \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$:

(1) Ist $A \in \mathbb{R}^{(n,n)}$ und n ungerade, so besitzt A mindestens einen Eigenwert.

Bew. χ_A ist Polynom vom Grad n über $\mathbb{R}$. Ein reelles Polynom P ungeraden Grades hat aber mindestens eine (reelle) Nullstelle (es gibt dann $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ mit $P(x_1) \geq 0$, $P(x_2) \leq 0$, sodass die Behauptung aus dem Zwischenwertsatz folgt). □

Für $\alpha + \beta i \in \mathbb{C}$ mit $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ definieren wir (vgl. Übg.)
$\overline{\alpha + \beta i} := \alpha - \beta i$ und für $(\alpha_{ij}) \in \mathbb{C}^{(n,n)}$ ferner $\overline{(\alpha_{ij})} := (\overline{\alpha_{ij}})$

(2) Sei $A \in \mathbb{C}^{(n,n)}$ mit $A = \bar{A}^T$ (A "hermitesch") bzw
$A = (\alpha_{ij}) \in \mathbb{R}^{(n,n)}$ mit $A = A^T$ (d.h. A symmetrisch).
Dann besitzt A Eigenwerte und diese sind alle reell.

Bew. (i) Zunächst bemerken wir, daß für $\lambda \in \mathbb{C}$ gilt: $\lambda = \bar{\lambda} \Leftrightarrow \lambda \in \mathbb{R}$. Für $A \in \mathbb{R}^{(n,n)} \subseteq \mathbb{C}^{(n,n)}$ folgt daher $A = \bar{A}$. Fassen wir also auch $A \in \mathbb{R}^{(n,n)}$ als hermitesche Matrix über $\mathbb{C}$ auf!

(ii) χ_A ist komplexes Polynom vom Grad $n \in \mathbb{N}$. Nach dem Fundamentalsatz der Algebra (s. Anmerkung zu 27.16) besitzt χ_A mindestens eine komplexe Nullstelle. A (aufgefaßt als Matrix über $\mathbb{C}$) hat also mindestens einen EW.

(iii) Sei λ EW von A. Dann existiert mindestens ein

$$\mathfrak{e} \in \mathbb{C}^{(n,1)} - \{\mathfrak{O}\} : A\mathfrak{e} = \lambda\mathfrak{e}.$$ Es gilt

$\lambda \cdot (\mathfrak{e}^T\bar{\mathfrak{e}}) = (\lambda\mathfrak{e})^T\,\bar{\mathfrak{e}} = (A\mathfrak{e})^T\,\bar{\mathfrak{e}} = \mathfrak{e}^T A^T \bar{\mathfrak{e}}$, andererseits

$\mathfrak{e}^T \bar{A}\,\bar{\mathfrak{e}} = \mathfrak{e}^T\,(\overline{A\mathfrak{e}}) = \mathfrak{e}^T\,(\overline{\lambda\mathfrak{e}}) = \bar{\lambda}\,(\mathfrak{e}^T\bar{\mathfrak{e}})$ und $\bar{A} = A^T$.

Nun ist $\mathfrak{e}^T\bar{\mathfrak{e}} = \|\mathfrak{e}\|^2 \neq 0$, da $\mathfrak{e} \neq 0$ ist. Es folgt $\lambda = \bar{\lambda}$ sodass λ reell ist (und im Fall $A \in \mathbb{R}^{(n,n)}$ ebenfalls Eigenwert von A). □

Beispiele:

(a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(2,2)}$ ist symmetrisch und besitzt daher Eigenwerte:

$$\chi_A = \begin{vmatrix} 1-X & 2 \\ 2 & 1-X \end{vmatrix} = (1-X)^2 - 4 = X^2 \underbrace{-2X}_{\text{Spur }A} \underbrace{-3}_{\det A};\quad \lambda_1 = 3,\ \lambda_2 = -1$$

(b) $A = \begin{pmatrix} 1 & -i \\ i & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{(2,2)}$ ist hermitesch und besitzt daher nur reelle Eigenwerte:

$$\chi_A = \begin{vmatrix} 1-X & -i \\ i & 1-X \end{vmatrix} = X^2 - 2X + (1 - i\bar{i}) = X^2 - 2X$$

Eigenwerte: $\lambda_1 = 0; \lambda_2 = 2$

(c) (weiteres Beispiel)

Sei $A := \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{(2,2)}$! Es gilt dann:

$$\chi_A(X) = \det\begin{pmatrix} -X & -\frac{i}{2} \\ \frac{i}{2} & -X \end{pmatrix} = X^2 - (\frac{-i^2}{4}) = X^2 - \frac{1}{4} = (X - \frac{1}{2})(X + \frac{1}{2}).$$

Als Eigenwerte erhalten wir: $\lambda_{1/2} = \pm\frac{1}{2}$.

Anmerkungen:

- In der Quantentheorie stellt $S_y := \hbar A$ (mit dem Planckschen Wirkungsquantum h und $\hbar = \frac{h}{2\pi}$) einen der drei Spin-Operatoren S_x, S_y, S_z bei der Messung des Quantenzustands z.B. eines Elektrons dar.
(→ Elektronenspin $\pm\frac{1}{2}$).

- Neben der zu S_y gehörender Matrix $\sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$ sind $\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ und $\sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ die sogenannten Pauli-Matrizen, benannt nach dem österreichischen Physiker Wolfgang Ernst Pauli (1900-1958). Die Pauli-Matrizen zusammen mit der Einheitsmatrix $\sigma_0 = E_2$ als „nullte Pauli-Matrix" spielen eine Rolle in der relativistischen Quantentheorie.

- $\sigma_0, \sigma_x, \sigma_y$ und σ_z bilden eine Basis des $\mathbb{C}-$Vektorraums $\mathbb{C}^{(2,2)}$ und ebenfalls eine Basis des $\mathbb{R}-$Vektorraums, den die hermiteschen $(2 \times 2)-$ Matrizen bilden.

Ist f Endomorphismus (bzw. A Matrix), so sind die EW'e von f (bzw. A) Nullstellen von χ_f (bzw. χ_A).
Außer Elemente von K können wir in χ_f (bzw. χ_A) auch Elemente anderer K-Algebren einsetzen, z.B. aus $\mathrm{End}_K V$ oder $K^{(n,n)}$ (vgl. §13).

(28.10) Satz von Cayley und Hamilton

(a)	$A \in K^{(n,n)} \Rightarrow \chi_A(A) = 0$
(b)	$\dim V = n < \infty \wedge f \in \mathrm{End}_K V \Rightarrow \chi_f(f) = 0$

Bsp.: $K = \mathbb{R}$, $n = 2$, $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$; $\chi_A = \begin{vmatrix} 2-X & 1 \\ 1 & 2-X \end{vmatrix} = (2-X)^2 - 1 = X^2 - 4X + 3$

$$A^2 - 4A + 3E_n = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 8 & 4 \\ 4 & 8 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Beweis von (28.10): *)

(a) Wir definieren: $C := A - XE_n$

$$\tilde{C} := (\tilde{\gamma}_{ij})_{i,j\in\{1,\dots,n\}} \text{ mit } \tilde{\gamma}_{ij} := (-1)^{i+j}\det(C_{ji}).$$

Aus dem allgemeinen Laplace'schen Entwicklungssatz (s. 25.2) folgt

$$C\cdot\tilde{C} = C\cdot \mathrm{adj}(C) =$$

$$= \det C\cdot E_n = \chi_A \cdot E_n.$$

Aufgrund der Definition von $\tilde{C}$ sind die Einträge von $\tilde{C}$ Polynome vom Grad $\le n-1$; es existieren also Matrizen $C_0, C_1, \dots, C_{n-1} \in K^{(n,n)}$ mit

$$\tilde{C} = C_0 + XC_1 + \dots + X^{n-1}C_{n-1}.$$

Damit ergibt sich

---

*) Anm.: Man könnte versucht sein, A in $\det(A - XE)$ für X einzusetzen. Dazu beachte man den Hinweis auf S. 88 Zeile 4ff. Man muss sich daher überlegen, unter welchen Bedingungen A für X eingesetzt werden kann oder wie folgt vorgehen:

$$\chi_A \cdot E_n = C\cdot\tilde{C} = (A - XE_n)\cdot\sum_{i=0}^{n-1} X^i C_i = AC_\circ + X(AC_1 - C_\circ) + \ldots + X^{n-1}(AC_{n-1} - C_{n-2}) - X^n C_{n-1}$$

In dieser Gleichung dürfen wir X durch A ersetzen: [Denn aus

$$\left(\sum_{k=0}^{m} \gamma_k X^k\right)\cdot(\lambda_{ij})_{i,j} = \sum_{k=0}^{m} X^k (\beta_{ij}^{(k)})_{i,j} \qquad \text{folgt}$$

$$\left(\sum_k \gamma_k X^k \lambda_{ij}\right)_{i,j} = \left(\sum_k X^k \beta_{ij}^{(k)}\right)_{i,j} \qquad \text{und daraus}$$

$\sum \gamma_k X^k \lambda_{ij} = \sum_k X^k \beta_{ij}^{(k)}$ für alle $i,j \in \{1,\ldots,n\}$; da $\{X^i \mid i \in \mathbb{N}_\circ\}$ Basis von $K[X]$ ist, liefern Koeffizientenvergleiche

$\gamma_k \lambda_{ij} = \beta_{ij}^{(k)}$ für alle vorkommenden i,j,k; das zeigt

$\gamma_k (\lambda_{ij})_{i,j} = (\beta_{ij}^{(k)})_{i,j}$ für alle $k \in \{0,\ldots,m\}$ und somit

$A^k \gamma_k (\lambda_{ij}) = A^k (\beta_{ij}^{(k)})$, woraus sich

$\left(\sum_k \gamma_k A^k\right)\cdot(\lambda_{ij}) = \sum_k A^k (\beta_{ij}^{(k)})$ ergibt.]

Setzen wir also A für X in die Gleichung

$$\chi_A \cdot E_n = AC_\circ + \sum_{i=1}^{n-1} X^i (AC_i - C_{i-1}) - X^n C_{n-1} \qquad \text{ein!}$$

Wir erhalten

$$\begin{aligned}\chi_A(A) = \chi_A(A)\cdot E_n &= AC_\circ + \sum_{i=1}^{n-1} A^i (AC_i - C_{i-1}) - A^n C_{n-1} = \\ &= AC_\circ + \sum_{i=1}^{n-1} A^{i+1} C_i - \sum_{i=1}^{n-1} A^i C_{i-1} - A^n C_{n-1} = \\ &= AC_\circ + A^n C_{n-1} - AC_\circ - A^n C_{n-1} = \mathcal{O}\end{aligned}$$

(b) folgt sofort aus (a) durch Übergang zu einer darstellenden Matrix von f ($f \longmapsto M_B^B(f)$ ist Algebren-Homomorphismus). □

<u>(28.11) Anmerkung</u>

(a) Daß es zu gegebenem Endomorphismus f eines endlich-dimensionalen K VR's V (bzw. zu gegebener Matrix A) überhaupt ein Polynom $P \in K[X]-\{0\}$ gibt mit

$$P(f) = \mathcal{O} \quad \text{(0-Abbildung) bzw. } P(A) = \mathcal{O} \quad \text{(0-Matrix)},$$

folgt leichter aus Dimensionsgründen: Wegen $\dim_K(\mathrm{End}_K V) = n^2 = \dim_K K^{(n,n)}$ sind $f^0, f^1, f^2, \ldots, f^{n^2}$ (bzw. $A^0, A^1, A^2, \ldots, A^{n^2}$) linear abhängig.
Es existieren daher $\alpha_0, \ldots, \alpha_{n^2} \in K$, nicht alle 0, mit

$$\sum_{i=0}^{n^2} \alpha_i f^i = \mathcal{O} \qquad \left(\text{bzw. } \sum_{i=0}^{n^2} \alpha_i A^i = \mathcal{O}\right)$$

Für $P_0 = \sum_{i=0}^{n^2} \alpha_i X^i$ gilt dann $P_0(f) = \mathcal{O}$ (bzw. $P_0(A) = \mathcal{O}$) und $P_0 \neq \mathcal{O}$.

P_0 "annulliert" f (bzw. A).

(b) Ist $A \in K^{(n,n)}$, so ist
$J := \{S \in K[X] \mid S(A) = \mathcal{O}\}$ ein Ideal in $K[X]$.
(Entsprechend bilden für $f \in \mathrm{End}_K V$ und $\dim V < \infty$ die f "annullierenden" Polynome ein Ideal in $K[X]$.)

<u>Beweis.</u> (i) $P_0 \in J$ (vgl. 28.11(a)) $\Rightarrow J \neq \emptyset$.

(ii) $\forall S_1, S_2 \in J \; \forall \alpha_1, \alpha_2 \in K$: $(\alpha_1 S_1 + \alpha_2 S_2)(A) \underset{\substack{(27.7)\\ S \mapsto S(A)\\ \text{Algebren-Hom.}}}{=} \alpha_1 S_1(A) + \alpha_2 S_2(A) = \mathcal{O} \Rightarrow J$ UR.

(iii) $T \in K[X] \Rightarrow (T \cdot S)(A) \underset{(27.7)}{=} T(A) \cdot S(A) = T(A) \cdot \mathcal{O} = \mathcal{O}$ (für alle $S \in J$). □

Da in $K[X]$ jedes Ideal Hauptideal ist (s. 27.17) existiert in J für $J \neq \{0\}$ ein (eindeutig bestimmtes) normiertes Polynom H minimalen nicht-negativen Grades , das J erzeugt: $J = (H)$. Daraus ergibt sich:

<u>(28.12) Satz</u>

(1) Zu $A \in K^{(n,n)}$ existiert ein eindeutig bestimmtes normiertes Polynom $H_A \in K[X]$ von minimalem nicht-negativen Grad mit

$$H_A(A) = \mathcal{O},$$

das sogenannte <u>Minimalpolynom</u> von A.

(2) H_A ist Teiler jeden Polynoms $Q \in K[X]$ mit $Q(A) = \mathcal{O}$

(3) H_A ist Teiler von χ_A

Anmerkung: Analog gibt es für $f \in \mathrm{End}_K V$ mit V endlich-dim. K-VR ein Minimalpolynom H_f. Dieses stimmt mit dem Minimalpolynom jeder f darstellenden Matrix überein: $H(f) = 0 \Leftrightarrow H(M_B^B(f)) = 0$ gilt, da M_B^B Algebren-Homomorphismus ist.

Beweis von 28.12

(1) s.o.; (2) $Q \in J = (H_A) \Rightarrow H_A | Q$ (3) (28.10) und (2) □

(28.13) Anmerkung

> Sind die Matrizen $A^\circ = E_n, A, A^2, \dots, A^{r-1}$ l.u. und $E_n, A, A^2, \dots, A^{r-1}, A^r$ linear abhängig, so existieren $\alpha_0, \dots, \alpha_{r-1} \in K$ mit $A^r = \sum_{i=0}^{r-1} \alpha_i A^i$. Das Polynom $X^r - \sum_{i=0}^{r-1} \alpha_i X^i$ ist dann das Minimalpolynom von A.

Beweis: Offensichtlich gibt es $\alpha_0, \dots, \alpha_{r-1}$ mit $A^r - \sum_{i=0}^{r-1} \alpha_i A^i = 0$. Wegen der linearen Unabhängigkeit von $\{A^i | i=0,\dots,r-1\}$ gibt es kein Polynom $G \in K[X]-\{0\}$ kleineren Grades mit $G(A) = 0$. □

Beispiele

(1) $$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}, \quad K = \mathbb{R}$$

Minimalpolynom: A°, A sind l.u.

$$A^2 = \begin{pmatrix} 6 & -3 & -3 \\ -3 & 6 & -3 \\ -3 & -3 & 6 \end{pmatrix}$$ ist l.a. von A°, A: $A^2 + 3A = 0$

$\Rightarrow H_A = X^2 + 3X$

Charakteristisches Polynom:

$$\chi_A = \det(A - XE_3) = \dots = -X(X+3)^2 = -(X+3) \cdot H_A$$

(2) $V = \mathbb{R}^2$, f Spiegelung an einer Nullpunkt-Geraden.

Es gilt $f \in \mathrm{End}_K V$ und $f^2 = \mathrm{id}_V$, daher $H_f | X^2 - 1$. Wegen $X^2-1 = (X+1)(X-1)$ sind folgende Polynome einzige Kandidaten für H_f: $X^2-1, (X+1), (X-1)$.
Wegen $f \neq \pm\mathrm{id}$ folgt $H_f = \chi_f = X^2 - 1$.

Da H_A Teiler von χ_A ist, gibt es ein $S \in K[X] : \chi_A = S \cdot H_A$.
Die Nullstellen von H_A sind daher auch solche von χ_A, also Eigenwerte von A (entsprechend für Endomorphismen). Es gilt sogar

(28.14) Satz und Zusammenfassung

(a) Sei $A \in K^{(n,n)}$, $\lambda \in K$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent

(1) λ EW von A

(2) $\chi_A(\lambda) = 0$

(3) $H_A(\lambda) = 0$

(b) Sei $\dim_K V = n$ und $f \in \mathrm{End}_K V$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

(1) λ EW von f

(2) $\chi_f(\lambda) = 0$

(3) $H_f(\lambda) = 0$

Anmerkung

Die EW'e eines Endomorphismus (einer Matrix) sind also sowohl genau die Nullstellen des charakteristischen Polynoms als auch die Nullstellen des Minimalpolynoms.

Die Nullstellen des Minimalpolynoms unterscheiden sich von denen des charakteristischen Polynoms höchstens durch ihre Vielfachheit. (Zur Definition von "Vielfachheit einer Nullstelle" s. 29.4(a)!).

Beweis. (1) $\Leftrightarrow$ (2) s. (28.5) und Anmerkung dazu;

(3) $\Rightarrow$ (1) s. Anmerkung vor (28.14)

(1) $\Rightarrow$ (3) Zu zeigen ist, daß alle EW'e Nullstellen des Minimalpolynoms sind. Sei λ EW von f. Dann existiert

$x_1 \in V - \{0\}: f(x_1) = \lambda x_1$. Durch vollständige Induktion folgt $f^k(x_1) = \lambda^k x_1$ für $k \in \mathbb{N}$.

Nun ist wegen $H_f | \chi_f$ grad $H_f \leq n$, sodaß $H_f = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i X^i$ mit $\alpha_i \in K$ gesetzt werden kann.

Damit gilt

$$0 \underset{\substack{(28.12)\\ \text{Anm.}}}{=} [H_f(f)](x_1) = \left(\sum_{i=0}^{n} \alpha_i f^i\right)(x_1) = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i f^i(x_1) = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i \lambda^i x_1 = \left(\sum_{i=0}^{n} \alpha_i \lambda^i\right) x_1 = H_f(\lambda) \cdot x_1$$

Aus $x_1 \neq 0$ folgt $\qquad H_f(\lambda) = 0$.

Analog für Matrizen.

□