§ 26 Determinanten von Endomorphismen und der Multiplikationssatz

M ↓ Wir wollen nun auch für Endomorphismen Determinanten definieren. Zweckmäßigerweise ist die Definition so zu wählen, daß für $f \in \mathrm{End}_K(V)$ mit $\dim_K V < \infty$ gilt

$$\det f = \det M_B^B(f)$$

↑ M für eine Basis B, besser noch für jede Basis B von V–falls möglich.

Wir definieren zunächst:

(26.1) Definition

Seien V endlich-dim K-VR und B eine geordnete Basis von V. Ist $f \in \mathrm{End}_K(V)$, so definieren wir

$$\det f := \det M_B^B(f).$$

Wir wollen zeigen, daß diese Definition nicht von der speziell gewählten Basis B abhängt.

Seien $B = (b_1, \ldots, b_n)$ und $f(b_j) = \sum_{i=1}^{n} b_i \xi_{ij}$ $(j=1,\ldots,n)$, also

$M_B^B(f) = (\xi_{ij})_{i,j \in \{1,\ldots,n\}} \in K^{(n,n)}$. Dann erhalten wir

$\det f = \sum_{\pi \in \mathfrak{S}_n} (\mathrm{sgn}\ \pi)(\xi_{\pi(1)1} \cdots \xi_{\pi(n)n}$. Ein Vergleich mit Formel (*) in (15.19) führt zu

$$\det f = \Delta(f(b_1), \ldots, f(b_n)) \cdot \Delta(b_1, \ldots, b_n)^{-1}$$

für eine beliebige Determinantenform Δ auf V. (Es ist sinnvoll, hier wieder beliebige Determinantenformen zu betrachten, da die Determinante ja bzgl. einer speziellen Basis normiert ist.) Ist f nicht injektiv, so sind $f(b_1),\ldots,f(b_n)$ linear abhängige Vektoren und $\det f = 0$. Dies gilt für jede Basis B. Sei also f regulär.

(Erinnerung: Die Gruppe der regulären linearen Abbildungen von V auf sich hatten wir mit GL(V) oder Aut V bezeichnet. Ist $\dim_K V = n$, so ist sie isomorph zur Gruppe GL(n,K) aller regulären $n \times n$-Matrizen über K (vgl. 22.7).)

Wir betrachten nun zunächst $\Delta(f(x_1),\ldots,f(x_n))$.

(26.2) Hilfssatz

Ist Δ eine Determinanten-Form auf dem endlich-dimensionalen K-VR V und $f \in GL(V)$, so ist auch die durch

$$\Delta_f(x_1,\ldots,x_n) := \Delta(f(x_1),\ldots,f(x_n))$$

definierte Abbildung eine Determinanten-Form.

Beweis: Δ ist n-fach linear, f ist linear; daraus folgt die n-fach Linearität von Δ_f.
f erhält die lineare Abhängigkeit und bildet eine Basis wieder auf eine Basis ab. Daraus folgen die übrigen Behauptungen. □

Nach Satz (15.21) existiert also ein $\gamma \in K - \{0\}$: $\Delta_f = \gamma \cdot \Delta$.
Sind $B = (b_1,\ldots,b_n)$, $C = (c_1,\ldots,c_n)$ Basen von V, so ergibt sich

$$\det f \text{ (bzgl B)} = \Delta_f(b_1,\ldots,b_n)\cdot\Delta(b_1,\ldots,b_n)^{-1} = \gamma =$$
$$\Delta_f(c_1,\ldots,c_n)\cdot\Delta(c_1,\ldots,c_n)^{-1} = \det f \text{ (bzgl. C)}.$$

(26.3) Satz

Die in (26.1) definierte Determinante eines Endomorphismus f des n-dim VR's V hängt nicht von der speziell gewählten Basis ab. Vielmehr gilt

$$\boxed{\det f = \det M_B^B(f) \quad \text{für jede Basis } B \text{ von } V} \quad .$$

Außerdem haben wir gezeigt:

(26.4) Hilfssatz

(a) Ist Δ Determinanten-Form des endlich-dim. VR's V und $B = (b_1, \ldots, b_n)$ Basis von V, dann gilt

$$\det f = \Delta(f(b_1), \ldots, f(b_n)) \cdot \Delta(b_1, \ldots, b_n)^{-1}$$

(b) Ist $f \in \mathrm{End}_K(V)$, so gilt für alle $x_1, \ldots, x_n \in V$:

$$\Delta(f(x_1), \ldots, f(x_n)) = \det f \cdot \Delta(x_1, \ldots, x_n)$$

Anmerkung: Geometrische Interpretationen in $\mathbb{R}^3$: Da auch die Volumenfunktion $\overline{\mathrm{Vol}}$ für Parallelflachs eine Determinantenform ist, gibt det f den "Deformationsgrad" $\mathrm{Vol}(f(x_1), f(x_2), f(x_3)) \cdot \mathrm{Vol}(x_1, x_2, x_3)^{-1}$ der Abbildung f bei Anwendung auf ein Parallelflach $\mathcal{P}(x_1, x_2, x_3)$ an.

(26.5) Eigenschaften der Determinante von Endomorphismen

Sei V n-dim K-VR.

(1) Für $f \in \mathrm{End}_K V$ gilt

$$\boxed{f \in GL(V) \Leftrightarrow \det f \neq 0}$$

(2) Für $f, g \in \mathrm{End}_K V$ gilt der Multiplikationssatz:

$$\boxed{\det(f \circ g) = \det f \cdot \det g}$$

(3)
$$\boxed{\begin{array}{l} \det(\mathrm{id}_V) = 1 \text{ und} \\ \det f^{-1} = (\det f)^{-1} \quad \text{für alle } f \in GL(V) \end{array}}$$

<u>Beweis</u>: (1) $f \in GL(V) \Rightarrow \Delta_f(b_1,\ldots,b_n) \neq 0 \Rightarrow \det f \neq 0$

$f \notin GL(V) \Rightarrow \det f = 0$ (s.o.)

(2) Ist $g \notin GL(V)$, so auch $f \circ g \notin GL(V)$, da Kern $g \subseteq$ Kern$(f \circ g)$

Nach (1) ist $\det(f \circ g) = 0$ und $\det g = 0$.

Sei also $g \in GL(V)$; dann gilt für eine Basis $B=(b_1,\ldots,b_n)$

$$\det(f \circ g) = \Delta((f \circ g)(b_1),\ldots,(f \circ g)(b_n)) \cdot \Delta(b_1,\ldots,b_n)^{-1} =$$

$$\frac{\Delta(f(g(b_1)),\ldots,f(g(b_n)))}{\Delta(g(b_1),\ldots,g(b_n))} \cdot \frac{\Delta(g(b_1),\ldots,g(b_n))}{\Delta(b_1,\ldots,b_n)} \underset{\substack{\text{da} \\ (g(b_1),\ldots,g(b_n)) \\ \text{Basis von } V}}{=}$$

$$= \det f \cdot \det g.$$

(3) $\det(id_V) = \Delta(b_1,\ldots,b_n) \cdot \Delta(b_1,\ldots,b_n)^{-1} = 1$

$1 = \det(id_V) = \det(f \circ f^{-1}) = \det f \cdot \det(f^{-1})$. □

Folgerung für Determinanten von Matrizen:

<u>(26.6) Multiplikationssatz</u>

Seien $A,B \in K^{(n,n)}$; dann gilt

$$\boxed{\det(A \cdot B) = \det A \cdot \det B}$$

<u>Beweis</u>: $\det A \cdot B = \det f_{A \cdot B} = \det(f_A \circ f_B) = \det f_A \cdot \det f_B = \det A \cdot \det B$.

□

<u>(26.7) Korollar</u>

(a) Ist $A \in K^{(n,n)}$ und A <u>regulär</u>, so gilt

$$\det A^{-1} = (\det A)^{-1}$$

(2) Sind A und B ähnliche Matrizen, so gilt

$$\det A = \det B.$$

<u>Beweis:</u> (a) Aus (26.6) oder (26.5)(3)

(b) $A \approx B \Rightarrow \exists S \in K^{(n,n)}$, S regulär : $B = S^{-1}AS$. Es folgt

$\det B = (\det S^{-1})(\det A)(\det S) = (\det S)^{-1} \cdot \det S \cdot \det A$

$= \det A$. □