KAP. IV: Vektorräume, Lineare Abbildungen, Matrizen
Fortsetzung von Kap. III der Linearen Algebra I

§ 17 Faktorräume und der Homomorphiesatz für lineare Abbildungen

M ↓ In § 4 hatten wir auf der Menge der vollen Urbilder eines Gruppenhomomorphismus eine Verknüpfung derart definieren können, daß eine zur Bildgruppe isomorphe Gruppe entstand.
Eine entsprechende Konstruktion streben wir nun für VR-Homomorphismen an. Zunächst erinneren wir an die Bildung von Faktorgruppen (s. (4.11)), wobei wir uns hier auf kommutative Gruppen beschränken, und definieren dann ↑ M "Faktorräume nach Unterräumen".

Erinnerung:
Ist $(V,+)$ kommutative Gruppe, so ist jede Untergruppe U von $(V,+)$ Normalteiler (vgl. (4.8)): es gilt ja $a+U=U+a$ für alle $a \in V$. Ist also U Untergruppe von $(V,+)$, so kann man $(V/U, \oplus)$ definieren:
- Elemente von V/U sind die Nebenklassen $a+U$ für $a \in V$
- Die Verknüpfung $\oplus$ auf V/U ist definiert durch

$$(a+U) \oplus (b+U) := (a+b)+U.$$

Ist nun auf V zusätzlich eine S-Multiplikation "$\cdot_K$" definiert und $(V,+,\cdot_K)$ ein Vektorraum, so erhebt sich die Frage, ob auch $(V/U,\oplus)$ zu einem Vektorraum gemacht werden kann.

(17.1) Definition

Sei V VR über dem Körper K und U UR von V. Auf V/U erklären wir eine S-Multiplikation $\odot_K$ durch

$$(v+U)\odot\lambda := v\cdot\lambda + U \quad \text{für alle } v \in V,\ \lambda \in K.$$

Man zeigt nun leicht, daß $(v+U)\odot\lambda$ nicht vom Repräsentanten v abhängt, also $\odot_K : V/U \times K \longrightarrow V/U$ wohldefiniert ist.

$(V/U,+,\odot_K)$ heißt <u>Faktorraum von V nach U</u> (V aufgeteilt nach U).

(17.2) Satz

Ist V K-VR und U UR von V, so gilt:
$(V/U,\oplus,\odot_K)$ ist K-VR.

<u>Bew.</u> (V 1) : $(V/U,\oplus)$ ist Gruppe nach (4.11) und kommutativ.

(V 2) & (V 3)

1. Distributivgesetz

$$[(v+U)\oplus(w+U)]\odot\lambda \underset{\substack{\text{Def.}\\ \text{Add.}}}{=} [(v+w)+U]\odot\lambda \underset{\substack{\text{Def.}\\ \text{S-Mult.}}}{=} (v+w)\cdot\lambda+U \underset{\substack{\text{Distributiv-}\\ \text{Ges. in V}}}{=}$$

$$(v\lambda+w\lambda)+U \underset{\substack{\text{Def.}\\ \text{Add.}}}{=} (v\lambda+U)\oplus(w\lambda+U) \underset{\substack{\text{Def.}\\ \text{S-Multi.}}}{=} (v+U)\odot\lambda\oplus(w+U)\odot\lambda$$

Analog beweist man das 2. Distributivgesetz und das gemischte Assoziativgesetz

(V 4) : $(v+U)\odot 1 = v\cdot 1+U = v+U$ für alle $v\in V$. □

(17.3) <u>Anmerkung</u>: Oft ist es zweckmäßig, die Untersuchung eines VR's V aufzugliedern in diejenige eines Unterraumes U von V, und diejenige des Faktorraumes V/U. (<u>1. Möglichkeit zur Reduktion</u>).

Nach (4.12) gibt es einen (kanonischen) Gruppenhomomorphismus von $(V,+)$ auf $(V/U,\oplus)$ mit Kern U, nämlich

$$h_U : \begin{cases} V \longrightarrow V/U \\ v \longmapsto v+U \end{cases}$$

<u>(17.4) Hilfssatz</u>

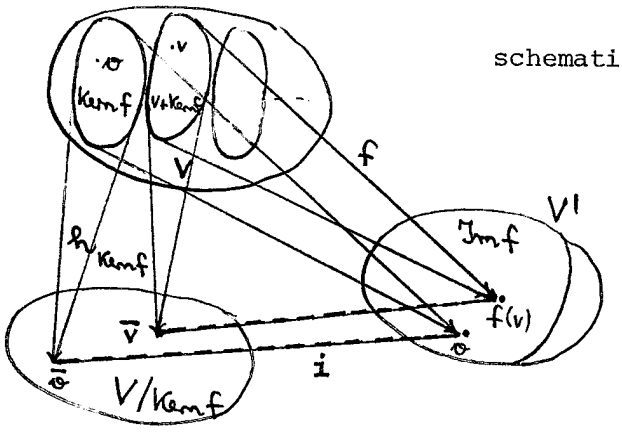
Ist V K-VR und U UR von V, so ist $h_U : \begin{cases} V \twoheadrightarrow V/U \\ v \longmapsto v+U \end{cases}$ ein VR-Homomorphismus mit Kern U.

V/U ist also homomorphes Bild von V.

<u>Bew.</u> Wegen (4.12) reicht der Nachweis der Homogenität:

$$h_U(v\cdot\lambda) = v\cdot\lambda+U = (v+U)\odot\lambda = h_U(v)\odot\lambda$$ □

Sei nun $f : V \longrightarrow V'$ ein gegebener VR-Homomorphismus und $U := \text{Kern } f$; beschränken wir uns auf die Gruppenstruktur, so gibt es - s. Beweis. zu (4.13) - einen Gruppenisomorphismus $i : V/U \longrightarrow \text{Im } f$ mit $i(v+U) = f(v)$, also $f(v) = i(v+U) = i(h_{\text{Kern } f}(v)) = (i \circ h_{\text{Kern } f})(v)$.



schematisch:

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "f", "\text{VR-Hom.}"'] \arrow[dr, "h_{\text{Kern } f}"'] & \text{Im } f \subseteq V' \\ & V/\text{Kern } f \arrow[u, "i"'] \end{tikzcd}$$

Insbesondere gilt:

$$\boxed{f\big|_{V \longrightarrow \text{Im } f} = i \circ h_{\text{Kern } f}}$$

Wir wollen zeigen, daß $i : \begin{cases} V/U \longrightarrow \text{Im } f \\ v + U \longmapsto f(v) \end{cases}$ ein VR-Isomorphismus ist.

Da in (4.13) bewiesen wurdem daß i Gruppenisomorphismus ist, reicht es wieder, die Homogenität nachzuprüfen:

Seien $\lambda \in K$, $v \in V$, dann erhalten wir

$$i(v+U) \odot \lambda) = i(v\lambda + U) = f(v\lambda) \underset{f \text{ homogen}}{=} f(v) \cdot \lambda = [i(v+U)] \cdot \lambda \ .$$

Dies zeigt:

(17.5) Homomorphiesatz für Vektorräume

Sind V und V' VR'e über dem Körper K, und ist $f : V \longrightarrow V'$ ein VR-Homomorphismus, dann gilt

$$\boxed{V/\text{Kern } f \cong \text{Im } f} \qquad \text{(als K-VR'e).}$$

Diagramm:

$$\begin{tikzcd}
V \arrow[d, bend right, "V/\mathrm{Kern}\, f"'] \arrow[dr] & V' \\
\mathrm{Kern}\, f \arrow[d] \arrow[r] & \mathrm{Im}\, f \\
\{o\} \arrow[r, "f"'] & \{o\}
\end{tikzcd}$$

Bevor wir zu Anwendungen dieses Satzes kommen, wollen wir noch eine Untersuchung über die "Unterraum-Verbands-Struktur" eines VR'es nachholen.