Übungen zum Lehrerweiterbildungskurs
"Lineare Algebra/Analytische Geometrie II"

Aufgabe A3 (Lineare Unabhängigkeit)
Für $a \in \mathbb{R}$ sei $e_a(x) := e^{ax}$. Zeigen Sie, dass die Menge $E := \{e_a | a \in \mathbb{R}\}$ in $\mathrm{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ linear unabhängig ist. Was folgt daraus für die Dimension von $\mathrm{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$?
Hinweis: Gilt $a_i \neq a_j$ für $i \neq j$, so hat die Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & a_1 & \cdots & a_1^n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & a_{n+1} & \cdots & a_{n+1}^n \end{pmatrix}$$

vollen Rang; eine solche Matrix (oder die dazu transponierte) heißt *Vandermonde-Matrix*.