Übungen zum Lehrerweiterbildungskurs "Lineare Algebra/Analytische Geometrie II"

Aufgabe A7 (Lineare Unabhängigkeit, Linearformen, Determinante)

Seien $a_1, \dots, a_k$ Vektoren aus $V = \mathbb{R}^n$ und (für $i = 1, \dots, k$) die Abbildung $f_{a_i} : V \to \mathbb{R}$ Linearform mit Matrix a_i (bzgl. der kanonischen Basis), ferner

$$A := (f_{a_j}(a_i))_{i,j=1,\dots,k} = \begin{pmatrix} f_{a_1}(a_1) & \cdots & f_{a_k}(a_1) \\ \vdots & & \vdots \\ f_{a_1}(a_k) & \cdots & f_{a_k}(a_k) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(k,k)}.$$

Zeigen Sie:
Ist $\det A \neq 0$, so sind $f_{a_1}, \dots f_{a_k}$ linear unabhängig.
Hinweis: Wenden Sie $\sum\limits_{j=1}^{k} f_{a_j}\lambda_j = 0$ auf a_i an (für $i = 1, \dots, k$); was erhalten Sie für $A(\lambda_1, \dots, \lambda_k)^T$?
Anmerkung: Umgekeht gilt auch: Ist $\det A = 0$, so sind $f_{a_1}, \dots, f_{a_k}$ linear abhängig.

Lösungsskizze
Sei $\sum\limits_{j=1}^{k} f_{a_j}\lambda_j = 0$. Dann folgt aus
$(\sum\limits_{j=1}^{k} f_{a_j}\lambda_j)(a_i) = \sum\limits_{j=1}^{k} f_{a_j}(a_i)\lambda_j = (f_{a_1}(a_i) \cdots f_{a_k}(a_i))(\lambda_1, \dots, \lambda_k)^T$
für $i = 1, \dots k$, dass $A(\lambda_1, \dots, \lambda_k)^T = 0$ gilt. Wegen $\det A \neq 0$ hat dieses Gleichungssystem nur die triviale Lösung, woraus die sich die lineare Unabhängigkeit von $f_{a_1}, \dots f_{a_k}$ ergibt.