Übungen zum Lehrerweiterbildungskurs
"Lineare Algebra/Analytische Geometrie II"

Aufgabe A6 (Determinante, Fixelemente, LGS)

Sei $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(3,3)}$ Matrix der linearen Abbildung

$$f_A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \quad \text{mit} \;\; v \mapsto Av.$$

(a) Bestimmen Sie alle Lösungen $x \in \mathbb{R}$ der Gleichung

$$(*) \qquad \det(A - xE_3) = 0.$$

(b) Zeigen Sie, dass f_A einen Fixpunkt $v \neq 0$ hat, also die Gleichung $Av = v$ (mindestens) eine nicht-triviale Lösung besitzt.

(c) Bestimmen Sie alle Fixpunkte von f_A und alle Nullpunktsgeraden, die fix bleiben! Gibt es eine Nullpunktsebene, die unter f_A fest bleibt?

Lösungsskizze

(a) Wegen

$$\begin{aligned} \det(A - xE_3) &= \det\left[\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} - x \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right] \\ &= \begin{vmatrix} 1-x & 0 & 0 \\ 0 & 1-x & 0 \\ 0 & 1 & 1-x \end{vmatrix} \\ &= (1-x)^3 \end{aligned}$$

ist $x = 1$ die einzige Lösung von $(*)$.

(b) Ein Punkt (bzw. sein Ortsvektor) wird genau dann durch die lineare Abbildung f_A festgelassen, wenn $Av = v$, d.h.

$$(**) \qquad (A - E_3)\, v = 0$$

gilt. Die Existenz eines Fixpunktes $v \neq 0$ ergibt sich dann sofort, da nach (a) mit $x = 1$ die Matrix $A - E_3$ singulär ist.

c) Genauer ergibt sich aus

$$\text{Rang } (A - E_3) = \text{Rang } \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = 1,$$

dass der Lösungsraum L von $(**)$ die Dimension $3 - \text{Rang}\,(A - E_3) = 2$ hat, und aus

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

dass

$$L = \{ \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \,|\, \xi_2 = 0 \}$$

ist. Die Menge der Fixpunkte von f_A formen also eine Unterebene L von $\mathbb{R}^3$; diese ist eine fest bleibende Nullpunktebene, und jede Gerade in dieser Ebene ist eine Fixgerade von f_A.

Umgekehrt muss jeder Punkt $v \neq 0$ einer Fixgeraden durch 0 die Gleichung $Av = xv$, also $(A - xE_3)\,v = 0$, für ein geeignetes x erfüllen, woraus

$$\text{Rang}\,(A - xE_3) < 3$$

und damit $(*)$ folgt. Aus (a) ergibt sich dann, dass v Fixpunkt ist und die Gerade $v\mathbb{R}$ zu den in L liegenden Fixgeraden gehört.