

## Übung zum Lehrerweiterbildungskurs 'Geometrie'

**Aufgabe D4** (Drehungen) (Teil von Skript-Aufgabe 89)

Bezeichne  $\delta_\alpha$  die Drehung der reellen euklidischen Ebene mit fest vorgegebenem Zentrum  $Z$  und (orientierter) Drehwinkelgröße  $\alpha$ . Beweisen Sie für die positiv orientierte Winkelgröße  $\psi$  und die orientierten Winkelgrößen  $\varphi$  and  $\eta$  mit

$$|\varphi|, |\psi|, |\eta| < R$$

die Aussage

$$\delta_\varphi \circ \delta_\psi = \delta_\eta \iff \eta = \varphi + \psi.$$

*Lösungshinweis:* Benutzen Sie die Darstellung  $\delta_\varphi = \gamma_g \circ \gamma_h$  und  $\delta_\psi = \gamma_h \circ \gamma_l$  !

**Lösungsskizze:**

Laut Hinweis benutzen wir die Darstellung  $\delta_\varphi = \gamma_g \circ \gamma_h$  und  $\delta_\psi = \gamma_h \circ \gamma_l$  ; diese ist möglich für Geraden  $g, h, l$  durch  $Z$ , wobei die eingeschlossenen Winkel  $\frac{\psi}{2}$  bzw.  $\pm|\frac{\varphi}{2}|$  sind. Die Winkel addieren sich (unter Beachtung der vorgegebenen Orientierung von  $\psi$  und den beiden möglichen Orientierungen von  $\varphi$ ) zum Winkel der Größe  $\frac{\psi+\varphi}{2}$  (vgl. die beiden Skizzen), zu dem wegen

$$\delta_\varphi \circ \delta_\psi = \gamma_g \circ \gamma_h \circ \gamma_h \circ \gamma_l = \gamma_g \circ \gamma_l$$

die Drehung um  $Z$  um die Winkelgröße  $\psi + \varphi$  gehört.

