Übung zum Lehrerweiterbildungskurs 'Geometrie'

Aufgabe C6 (fehlerhafter Beweis)
Finden Sie den Fehler in folgendem "Beweis"!
(Beachten Sie dabei auch Aufgabe C5 und die Tatsache, dass im rechtwinkligen Dreieck die Hypotenuse länger als jede der beiden Katheten ist!)

Behauptung: Jedes Dreieck ist gleichschenklig.

Beweis. Es sei ein Dreieck mit den Ecken A, B, C gegeben und es bezeichne ω_γ die Winkelhalbierende des Winkels γ bei C, m_{AB} die Mittelsenkrechte der Strecke $\overline{AB}$.
Sind ω_γ und m_{AB} parallel, so ist das Dreieck offenbar gleichschenklig und wir sind fertig. Wir können daher annehmen, daß genau ein Schnittpunkt O von ω_γ und m_{AB} existiert.
Fall 1: O liegt in Innern des Dreiecks (siehe Bild 1).
Weil m_{AB} die Mittelsenkrechte von $\overline{AB}$ und $O \in m_{AB}$ ist, gilt

$$|\overline{OA}| = |\overline{OB}|. \tag{1}$$

Es sei weiter D der Fußpunkt des Lotes von O auf $\overline{AC}$, E der Fußpunkt des Lotes von O auf $\overline{BC}$. Die Dreiecke $\triangle DOC, \triangle EOC$ haben eine gemeinsame Seite $\overline{OC}$ und es gilt $\sphericalangle CDO = \sphericalangle CEO = 90^o, \sphericalangle OCD = \sphericalangle OCE = \frac{1}{2}\gamma$. Also gilt:

$$|\overline{CD}| = |\overline{CE}|, |\overline{DO}| = |\overline{EO}|. \tag{2}$$

Wegen (1) und (2) zweiter Teil, sowie $\sphericalangle ADO = \sphericalangle BEO = 90^o$ gilt

$$|\overline{AD}| = |\overline{BE}|. \tag{3}$$

Aus (2), (3) folgt die Behauptung $|\overline{AC}| = |\overline{AD}| + |\overline{DC}| = |\overline{BE}| + |\overline{EC}| = |\overline{BC}|$.
Fall 2: O liegt im Außengebiet des Dreiecks (siehe Bild 2).
Der Beweis verläuft analog.

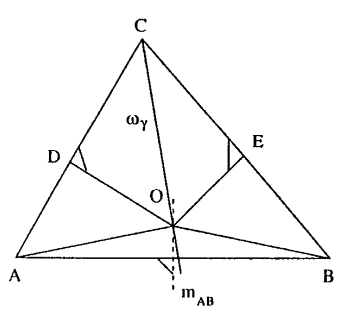

Bild 1

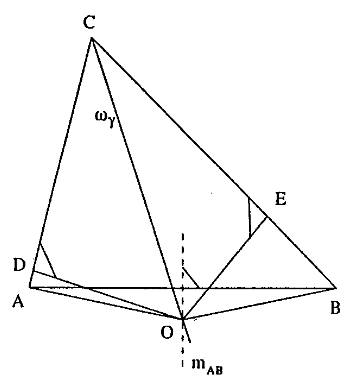

Bild 2

Fall 3: O liegt auf der Strecke $\overline{AB}$.
In diesem Fall argumentiert man ebenfalls wie im Fall 1. $\square$

Wo liegt der Fehler in diesem Beweis?

Lösungsskizze:

Vorbemerkung: Bei gleichschenkligen Dreiecken stimmen die entsprechende Höhe und Winkelhalbierende überein (s. Aufgabe C5); damit ist in diesem Fall O nicht eindeutig bestimmt.

Die Fälle 1 und 3 treten nicht auf, und im Fall 2 gilt, wie folgende Figur (erstellt mit Geogebra) andeutet,

$$D \notin \overline{AC} \vee E \notin \overline{BC}.$$