

## Übung zum Lehrerweiterbildungskurs 'Geometrie'

### Aufgabe C5 (Winkelhalbierende, gleichschenkliges Dreieck, WSW)

Sei  $\triangle ABC$  ein Dreieck der euklidischen Ebene. Zeigen Sie:

- (i) Ist die Winkelhalbierende  $w_\gamma$  des Winkels  $\gamma = \sphericalangle ACB$  parallel zur Mittelsenkrechten  $m_{AB}$  von  $\overline{AB}$ , dann ist  $\triangle ABC$  gleichschenkl.
- (ii) Ist  $\triangle ABC$  gleichschenkl., dann liegt die Winkelhalbierende  $w_\gamma$  des Winkels  $\gamma = \sphericalangle ACB$  auf der Mittelsenkrechten  $m_{AB}$ .

### Lösungsskizze:

Die Winkelhalbierende  $w_\gamma$  liegt im Inneren des zu  $\gamma$  gehörenden Winkelfeldes und schneidet daher die Strecke  $\overline{AB}$  in einem Punkt  $D$ .

- (i) Ist die Winkelhalbierende  $w_\gamma$  parallel zur Mittelsenkrechten  $m_{AB}$ , so steht auch  $w_\gamma$  senkrecht auf  $\overline{AB}$  (s.: parallele freie Schenkel von Stufenwinkeln!). Wegen der Kongruenz der Winkel  $\sphericalangle ADC$  und  $\sphericalangle BDC$  und der Winkel  $\sphericalangle ACD$  und  $\sphericalangle BCD$  ( $w_\gamma$  ist Winkelhalbierende!) folgt nach dem Kongruenzsatz WSW, dass  $\triangle ADC \cong \triangle BDC$ , und daraus, dass  $\overline{AC} \cong \overline{BC}$ .
- (ii) Ist umgekehrt  $\triangle ABC$  gleichschenkl. und  $D = w_\gamma \cap \overline{AB}$ , so gilt  $\overline{AC} \cong \overline{BC}$  und, wegen der gleichlangen Schenkel,  $\sphericalangle DAC \cong \sphericalangle DBC$ , ferner  $\sphericalangle ACD \cong \sphericalangle BCD$  (da  $w_\gamma$  Winkelhalbierende ist). Also "stimmen" die beiden Dreiecke  $\triangle ADC$  und  $\triangle BDC$  in einer Seite und zwei anliegenden Winkeln "überein", sind damit nach dem Kongruenzsatz WSW kongruent, woraus  $w_\gamma \perp AB$  und  $\overline{AD} \cong \overline{DB}$  folgt.  $\square$