

## Übung zum Lehrerweiterbildungskurs 'Geometrie'

### Aufgabe C3 (Parallelogramm/Rhombus/Wechselwinkel/Kongruenzsätze)

Ein *Parallelogramm* ist ein ebenes Viereck, in dem nicht-benachbarte Seiten parallel sind (s.Aufgabe C2!). Ein *Rhombus (Raute)* ist ein ebenes Viereck, in dem alle Seiten kongruent sind.

Zeigen Sie:

Stehen in einem euklidischen Raum die Diagonalen eines Parallelogramms **P** aufeinander senkrecht, so ist **P** ein Rhombus.

*Lösungshinweis:* Zeigen Sie zunächst, dass sich die Diagonalen halbieren.

### Lösungsskizze:

Sei  $\diamond ABCD$  ein Parallelogramm mit orthogonalen Diagonalen (vgl. die Skizze). Dann gilt nach Definition und nach Aufgabe C2 für die gegenüberliegenden Seiten  $\overline{AB}$  und  $\overline{CD}$ :

$$AB \parallel CD \quad \text{und} \quad \overline{AB} \equiv \overline{CD}.$$

Die Winkel  $\sphericalangle ABD$  und  $\sphericalangle BDC$  sind Wechselwinkel und damit kongruent.

Das Gleiche gilt für  $\sphericalangle BAC$  und  $\sphericalangle ACD$ . Ist  $M$  der Schnittpunkt der Diagonalen (er liegt "innerhalb" des Parallelogramms), so stimmen die Dreiecke  $\triangle ABM$  und  $\triangle CDM$  in einer Seite und allen drei Winkeln überein. Z.B. nach dem Kongruenzsatz WSW sind sie damit kongruent. Es folgt  $\overline{AM} \equiv \overline{MC}$  und  $\overline{BM} \equiv \overline{MD}$ .

Nach dem Kongruenzsatz SWS sind dann die Dreiecke  $\triangle ABM$  und  $\triangle ADM$  (mit gleicher Seite  $\overline{AM}$  und kongruenten Seiten  $\overline{MB}$  bzw.  $\overline{MD}$  und eingeschlossenen rechten Winkeln) kongruent. Es folgt  $\overline{AB} \equiv \overline{AD}$  und damit die Behauptung.  $\square$

