

Übung zum Lehrerweiterbildungskurs 'Geometrie'

Aufgabe C12 (Kreis-Sehne, Mittelsenkrechte, Kathetenlänge)

Sei $\mathcal{K} := \mathcal{K}_{M,r}$ der Kreis mit Radius r um den Punkt M in der reellen euklidischen Ebene. Bezeichne $\text{Inn}(\mathcal{K})$ die offene Kreisscheibe, also

$$\text{Inn}(\mathcal{K}) := \{P \mid P \text{ Punkt der Ebene mit } |\overline{PM}| < r\}.$$

Zeigen Sie (die anschaulich selbstverständliche Behauptung):

Sind A und B Punkte des Kreises, so liegt jeder von A und B verschiedene Punkt der Strecke \overline{AB} im Innern des Kreises, d.h. es gilt $\overline{AB} \subseteq \text{Inn}(\mathcal{K}) \cup \{A, B\}$.

Lösungsskizze:

Sei m_{AB} das Lot von M auf \overline{AB} ; wegen $|\overline{MA}| = r = |\overline{MB}|$ ist m_{AB} die Mittelsenkrechte von \overline{AB} . Ist F der Fußpunkt des Lots, so sei $s := |\overline{MF}|$. Für die Länge s der Kathete des rechtwinkligen Dreiecks $\triangle MAF$ gilt $s < r$. Wir zeigen für jeden Punkt Q von $\overline{AB} \setminus \{A, B\}$, dass $q := |\overline{MQ}| < r$: Für F ist dies schon gezeigt; setzt man nun $t := |\overline{AQ}|$ und $u := |\overline{QF}|$ für $Q \in \overline{AF} \setminus \{A, F\}$, so folgt nach Pythagoras

$$r^2 = s^2 + (t+u)^2 \quad \text{und} \quad q^2 = s^2 + u^2,$$

woraus $q^2 < r^2$ und damit

$$q < r$$

(und nebenbei $q \geq s$) folgt.

Für Punkte $Q \in \overline{FB}$ gilt das Analoge.