Übung zum Lehrkräfteweiterbildungskurs 'Geometrie'

Aufgabe B3 (Inneres Winkelfeld)
Sei $\angle POQ$ ein Winkel in einer Ebene E eines geordneten affinen Raumes, kein gestreckter Winkel und kein Nullwinkel. Zeigen Sie

$$\bigcup_{R\in]P,Q[} OR^+ \setminus \{O\} \subseteq \text{ Inn } (\angle POQ).$$

Anmerkung: Man kann sogar die Gleichheit zeigen.

Lösungsskizze:

Laut Definition ist Inn($\angle POQ$) gleich $OQP^+ \cap OPQ^+$. Wegen $R \in]P,Q[$ gilt (evtl. nach Übergang zur entgegengesetzten Ordnung auf PQ) $Q < R < P$, daher und wegen $RP \cap OQ = \{Q\}$ dann $[R,P] \cap OQ = \emptyset$. Also liegen P und R in der gleichen Halbebene bzgl. der Geraden OQ; d.h. R ist Element von OQP^+. Damit ist dann auch jeder Punkt X des Strahles $OR^+ \setminus \{O\}$ enthalten in OQP^+: Denn (evtl. nach Übergang zur entgegengesetzten Ordnung auf OR) ist $O < X \leq R$ oder $O < R \leq X$, und die Strecke XR enthält nicht den Schnittpunkt O der Trägergeraden OR von $[X,R]$ mit OQ.
Analog sieht man $(OR^+ \setminus \{O\}) \subseteq OPQ^+$.
Insgesamt folgt $(OR^+ \setminus \{O\}) \subseteq OQP^+ \cap OPQ^+ =$Inn($\angle POQ$). $\square$