Übung zum Lehrerweiterbildungskurs 'Geometrie'

Aufgabe A9 (Translation, Parallelogramm)
Zeigen Sie: Wenn sich in einem 3-dimensionalen affinen Raum $\mathcal{A}$ die Diagonalen jedes nicht-ausgearteten Parallelogramms schneiden, so ist keine Translation von $\mathcal{A}$ involutorisch, d.h. es gilt $\tau^2 \neq \mathrm{id}$ für jede Translation $\tau \neq \mathrm{id}$ von $\mathcal{A}$.
Hinweis: Ohne Beweis dürfen Sie sonstige Eigenschaften von Translationen verwenden, u.a., dass die Spuren einer Translation parallele Fixgeraden sind und dass Bildpunkte durch Parallelogramm-Konstruktionen bestimmbar sind.
Anmerkung: Dass die Diagonalen in einem affinen Raum unter bestimmten Umständen parallel sein können, folgt aus der Lösung von Aufgabe A5.

Lösungsskizze
(Kontraposition!)
Angenommen, es existiert ein τ mit $\tau^2 = \mathrm{id} \neq \tau$. Der Punkt A sei beliebig aus $\mathcal{A}$ und $C \notin A\tau(A)$. Das Viereck $\Diamond A\tau(A)\tau(C)C$ ist dann ein nicht-ausgeartetes Parallelogramm (lt. Parallelogramm-Konstruktion von $\tau(C)$). Die Diagonalen sind $A\tau(C)$ und $C\tau(A)$; für diese gilt $C\tau(A) \parallel \tau(C)\tau(\tau(A))$ (Urbild und Bildgerade), d.h. $C\tau(A) \parallel \tau(C)A$ (wegen $\tau^2 = \mathrm{id}$). Die beiden Diagonalen sind also parallel; sie sind verschieden, da sonst $A, \tau(C), C, \tau(A)$ kollinear wären. $\square$