Übung zum Lehrerweiterbildungskurs Mathematik
'Lineare Algebra/Analytische Geometrie II'

Aufgabe C7 (Eigenwerte, Eigenräume, Diagonalisierung, inverse Matrix)
Sei

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(2,2)}!$$

1. Bestimmen Sie alle Eigenwerte und die zugehörigen Eigenräume[1] von A !

2. Sei

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(2,2)}!$$

   Berechnen Sie $B^{-1}AB$!

Lösungsskizze

1. Das charakteristische Polynom von A ist

$$\chi_A(X) = \begin{vmatrix} 5-X & 4 \\ 2 & 3-X \end{vmatrix} = (5-X)(3-X) - 8 = X^2 - 8X + 7.$$

   Mit der $(p,q)-$Formel berechnet man die Nullstellen

$$\lambda_{1/2} = 4 \pm \sqrt{16-7} = 4 \pm 3,$$

   also $\lambda_1 = 7$ und $\lambda_2 = 1$.

   Die Eigenräume erhält man für

$\lambda_1 = 7$ aus

$$\begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 2 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

also $-2\xi_1 + 4\xi_2 = 0$ und $\mathrm{Eig}(A;7) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \mathbb{R}$; für

$\lambda_2 = 1$ aus

$$\begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

also $\xi_1 + \xi_2 = 0$ und $\mathrm{Eig}(A;1) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \mathbb{R}$

2. Zunächst ist B^{-1} zu bestimmen. Durch elementare Zeilenumformungen erhält man

$$\left(\begin{array}{rr|rr} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{rr|rr} 3 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{rr|rr} 3 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{array} \right) \rightsquigarrow$$

[1] Teil 1 frei nach Aufgabe 8.5 (b) in: Dietlinde Lau: Übungsbuch zur Linearen Algebra und analytischen Geometrie, Springer V. 2007

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \end{array}\right)$$

und damit

$$B^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Schliesslich ergibt sich:

$$B^{-1}AB = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Anmerkung: Beachten Sie, dass in der Matrix B die Spalten zwei linear unabhängige Eigenvektoren von A sind und dass $B^{-1}AB$ eine Diagonalmatrix ist, in deren Diagonale die Eigenwerte von A stehen.