Übungen zum Lehrerweiterbildungskurs
"Lineare Algebra/Analytische Geometrie II"

Aufgabe B3 (Kern, Bild, Dimension, Fortsetzungssatz)
Seien V ein $n-\dim$ und W ein $m-\dim$ Vektorraum über dem Körper K (mit $n, m \in \mathbb{N}$)! Ferner sei X ein Unteraum von V und Y ein Unterraum von W. Welche Bedingung an die Dimensionen ist 1.) notwendig und 2.) hinreichend für die Existenz einer linearen Abbildung

$$f : V \to W \quad \text{mit} \quad \text{Kern } f = X \quad \text{und} \quad \text{Bild } f = Y.$$

(Mit Begründung!)

Lösungsskizze
1.) Für eine beliebige lineare Abbildung $f : V \to W$ gilt die Dimensionsformel

$$\dim_K(\text{Kern } f) + \dim_K(\text{Bild } f) = \dim_K V.$$

Für Kern $f = X$ und Bild $f = Y$ folgt als notwendige Bedingung:

$$(*) \quad \dim_K X + \dim_K Y = n.$$

2.) Diese Bedingung ist auch hinreichend. Beweis: Es gelte $(*)$. Nach dem Basisexistenzsatz existiert eine Basis B_X von X; dabei ist $|B_X| = \dim_K X$. Nach dem Basisergänzungssatz kann man diese Basis zu einer Basis $B = B_X \dot{\cup} D$ von V ergänzen. Aus $(*)$ folgt, dass

$$r := |D| = |B| - |B_X| = n - \dim_K X = \dim_K Y$$

ist. Eine Basis C_Y von Y hat ebenfalls die Mächtigkeit r; wir setzten $D = (d_1, \ldots, d_r)$ und $C_Y = (c_1, \ldots, c_r)$. Damit definieren wir eine Abbildung

$$\tilde{f} : B \to W \quad \text{durch} \quad \tilde{f}(B_X) := \{0_W\} \quad \text{und} \quad \tilde{f}(d_i) := c_i \quad \text{für} \quad i = 1, \ldots, r.$$

Nach dem Fortsetzungssatz existiert eine lineare Abbildung $f : V \to W$ mit $f|_B = \tilde{f}$. Die so konstruierte lineare Abbildung f erfüllt Kern $f = X$ und $f(V) = Y$. $\square$