

Übung zum Lehrerweiterbildungskurs 'Geometrie'

Aufgabe B3 (Inneres Winkelfeld) (Teil von Aufgabe 32 des Skripts)

Sei $\angle POQ$ ein Winkel in einer Ebene E eines geordneten affinen Raumes, kein gestreckter Winkel und kein Nullwinkel. Zeigen Sie

$$\bigcup_{R \in]P, Q[} OR^+ \setminus \{O\} \subseteq \text{Inn}(\angle POQ).$$

Anmerkung: Man kann sogar die Gleichheit zeigen.

Lösungsskizze:

Laut Definition ist $\text{Inn}(\angle POQ)$ gleich $OQP^+ \cap OPQ^+$. Wegen $R \in]P, Q[$ gilt (evtl. nach Übergang zur entgegengesetzten Ordnung auf PQ) $Q < R < P$, daher und wegen $RP \cap OQ = \{Q\}$ dann $[R, P] \cap OQ = \emptyset$. Also liegen P und R in der gleichen Halbebene bzgl. der Geraden OQ ; d.h. R ist Element von OQP^+ . Damit ist dann auch jeder Punkt X des Strahles $OR^+ \setminus \{O\}$ enthalten in OQP^+ : Denn (evtl. nach Übergang zur entgegengesetzten Ordnung auf OR) ist $O < X \leq R$ oder $O < R \leq X$, und die Strecke XR enthält nicht den Schnittpunkt O der Trägergeraden OR von $[X, R]$ mit OQ .

Analog sieht man $(OR^+ \setminus \{O\}) \subseteq OPQ^+$.

Insgesamt folgt $(OR^+ \setminus \{O\}) \subseteq OQP^+ \cap OPQ^+ = \text{Inn}(\angle POQ)$. \square