

Übung zum Lehrerweiterbildungskurs 'Geometrie'

Aufgabe B1 (Zwischenrelation, analytisch)

Auf jeder Geraden $g = a + bK$ von $\mathcal{A} = \text{AG}(3, K)$ (mit geordnetem Körper K , z.B. $K = \mathbb{R}$) sei eine Ordnungsrelation wie folgt definiert (vgl. Skript 7.4 und 7.5):

$$(*) \quad a + bk \leq_g a + b\ell \quad \Leftrightarrow \quad k \leq \ell$$

Zeigen Sie: Bei einer zentrischen Streckung bleibt die Zwischenrelation erhalten und die vorgegebenen Ordnungen werden sämtlich belassen oder sämtlich umgedreht.

Lösungsskizze:

Eine zentrische Streckung δ in $\text{AG}(3, K)$ hat die Abbildungsgleichung

$$\delta(x) = (x - p)m + p \quad \text{mit} \quad p \in K^3 \quad \text{und} \quad m \in K \setminus \{0\}.$$

Es folgt

$$\begin{aligned} \delta(a + bk) \leq_{\delta(g)} \delta(a + b\ell) &\Leftrightarrow (a + bk - p)m + p \leq_{\delta(g)} (a + b\ell - p)m + p \\ &\Leftrightarrow (am - pm + p) + bkm \leq_{\delta(g)} (am - pm + p) + b\ell m \\ &\Leftrightarrow km \leq \ell m \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} k \leq \ell & (\text{falls } m > 0) \\ k \geq \ell & (\text{falls } m < 0) \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} a + bk \leq_g a + b\ell & (\text{falls } m > 0) \\ a + bk \geq_g a + b\ell & (\text{falls } m < 0) \end{cases} \end{aligned}$$

Da m durch δ fest gegeben ist, bleiben die Ordnungen entweder alle erhalten (im Falle, dass der Streckungsfaktor m positiv ist) oder werden alle umgedreht (falls der Streckungsfaktor negativ ist). Die Zwischenrelation bleibt in beiden Fällen erhalten.