# Übung zum Lehrerweiterbildungskurs 'Geometrie'

**Aufgabe A8** (Translationen)
Es seien $N, P, Q$ nicht-kollineare Punkte eines 3-dim affinen Raumes $\mathcal{A}$. Zeigen Sie:

(a) Jede Translation $\tau$ von $\mathcal{A}$ bildet jede Ebene $E$ von $\mathcal{A}$ auf eine zu ihr parallele Ebene ab.

(b) Die Translation $\tau_{NP}$ und die Translation $\tau_{NP} \circ \tau_{NQ}$ lassen die Ebene $NPQ$ fest.

*Hinweise:*
1.) Die Aussagen von (3.3)(ii)-(iv) und (3.4) (b) bzw. (2.9) des Skripts dürfen Sie hier unbewiesen verwenden.
2.) Bei der Aufgabe handelt es sich um die Aufgaben 23 und 24b des Skripts.
3.) *Lösungshilfe:*
zu (a): Sei $S \in E \cap \tau(E)$. Zeigen Sie dann z.B.: $RS = S\tau(S)$ für das Urbild $R$ von $S$.
zu (b): Wenden Sie (a) für $\tau = \tau_{NP}$ und $S = P$ an!

**Lösungsskizze**
zu (a): Nach (3.3) bildet $\tau$ die Ebene $E$ wieder auf eine Ebene ab. Zu zeigen ist also nur die Parallelität.
Für die Translation $\tau = \mathrm{id}$ sind jede Ebene und ihr Bild gleich und damit parallel. Falls $\tau \neq \mathrm{id}$ und $E \cap \tau(E) = \emptyset$ gilt, sind die Ebene und ihr Bild nach Definition parallel.
Gelte also $\tau \neq \mathrm{id}$ und $E \cap \tau(E) \neq \emptyset$. Es existiert also ein Schnittpunkt $S$ und, da Translationen bijektiv sind, ein $R \in E$ mit $\tau(R) = S$. Nach (3.4)(b) ist $RS = R\tau(R)$ Fixgerade, also $RS \subseteq E \cap \tau(E)$. Man wählt nun noch $X \in E$ derart, dass $X, R, S$ nicht kollinear sind. Da $\tau(S)\tau(X) \parallel SX \subseteq E$ und $\tau(S) \in E$, erhält man auch $\tau(X) \in E$. Da $X, S, R$ nicht kollinear sind, folgt dies unmittelbar auch für die Bilder. Durch die drei Punkte $\tau(X), \tau(S), \tau(R)$ wird $\tau(E)$ aufgespannt. Aber da sie alle drei in $E$ liegen, folgt $\tau(E) = E$.
*Alternativ zu (a)*: Sind $g$ und $h$ zwei sich in $S$ schneidende Geraden der Ebene $E$, so schneiden sich auch $\tau(g)$ und $\tau(h)$ und sind parallel zu $E$; die von $\tau(g)$ und $\tau(h)$ aufgespannte Ebene ist dann gleich $\tau(E)$ und nach (2.9) parallel zu $E$.
zu (b): Wegen $\tau_{NP}(N) = P$, also $P \in E \cap \tau_{NP}(E)$, lässt $\tau_{NP}$ die von $N, P$ und $Q$ aufgespannte Ebene $E$ fest: denn aus $E \cap \tau_{NP}(E) \neq \emptyset$ erhält man (vgl. den Beweis zu (a)) $E = \tau_{NP}(E)$. Ganz analog ergibt sich auch $E = \tau_{NQ}(E)$.
Damit ist aber $\tau_{NP} \circ \tau_{NQ}(E) = \tau_{NP}(E) = E$. $\square$