# Übung zum Lehrerweiterbildungskurs 'Geometrie'

**Aufgabe A6** (Parallelität– elementargeometrisch und analytisch)
Seien $V$ ein 2-dim Vektorraum über dem Körper $K$ und $\mathcal{A} = \mathrm{AG}(V)$ die zugehörige affine Ebene; seien ferner

$$g = p + mK \quad \text{und} \quad h = q + nK \quad \text{(insbeondere mit } m, n \neq 0)$$

zwei verschiedene Geraden von $\mathcal{A}$. Zeigen Sie:
$g$ und $h$ sind disjunkt (, also parallel im elementargeometrischen Sinne,)
genau dann, wenn gilt:
$mK = nK$ (, also $g$ und $h$ parallel im Sinne der analytischen Geometrie sind).

*Lösungshinweis.* Beachten Sie $q - p \in V = mK + nK$ im Falle $mK \neq nK$.

**Lösungsskizze**

"$\Leftarrow$" Im Falle $mK = nK$ sind die Geraden Nebenklassen zum gleichen Unterraum, daher entweder gleich (was wegen $g \neq h$ hier nicht vorliegt) oder disjunkt. [Eigenschaft von Nebenklassen.
Beweis: $p + mK \cap q + mK \neq \emptyset \Rightarrow \exists k_1, k_2 \in K : p + mk_1 = q + mk_2 \Rightarrow \exists k_1, k_2 \in K : p + mK = \underbrace{q + m(k_2 - k_1)}_{p} + mK = q + mK$.]

"$\Rightarrow$" Seien $g$ und $h$ disjunkt. Wäre $nK \neq mK$, so $mK + nK \supset mK$ und aus Dimensionsgründen daher $mK + nK = V$; daher existieren $k_1, k_2 \in K$ mit (s. Lösungshinweis) $q - p = nk_1 + mk_2$, also

$$p + mk_2 = q - nk_1 \in p + mK \cap q + nK = g \cap h,$$

ein Widerspruch. $\square$