Übung zum Lehrerweiterbildungskurs 'Geometrie'

Aufgabe A5 (Affine Ebene, analytisch)
Zeigen Sie, dass die Diagonalen eines nicht-ausgearteten Parallelogramms in der affinen Geometrie $AG(V)$ eines K-Vektorraumes V mit $\dim_K V = 2$ genau dann nicht parallel sind, wenn in K die Aussage $1 + 1 \neq 0$ gilt.

Lösungsskizze: Seien $\vec{a} = \vec{PR} = \vec{QS}$ und $\vec{b} = \vec{PQ} = \vec{RS}$ die beiden durch das gegebene Parallelogramm bestimmten Vektoren von AG(V).
Zu den Diagonalen gehören dann die Vektoren

$$\vec{PS} = \vec{b} + \vec{a} = \vec{a} + \vec{b} \qquad \text{und} \qquad \vec{RQ} = \vec{b} - \vec{a}.$$

Es existiert dann ein Schnittpunkt $T = RQ \cap PS$ genau dann, wenn es Skalare $\mu, \lambda \in K$ gibt mit

$$(\vec{PT} =)\ \lambda\vec{PS} = \vec{a} + \mu\vec{RQ}, \qquad \text{d.h.} \qquad \lambda(\vec{a} + \vec{b}) = \vec{a} + \mu(\vec{b} - \vec{a}).$$

Wegen der linearen Unabhängigkeit von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ ist diese Gleichung genau dann erfüllt, wenn

$$\left\{ \begin{array}{lcrr} \lambda & = & 1 & -\mu \\ \lambda & = & & \mu \end{array} \right. , \qquad \text{also} \qquad 2\mu = 1 \qquad (\text{und} \quad \lambda = \mu)$$

gilt. Diese Bedingung ist aber dann und nur dann erfüllbar, wenn das Element $2 := 1 + 1 \in K$ eine Inverse besitzt, also ungleich 0 ist. $\square$